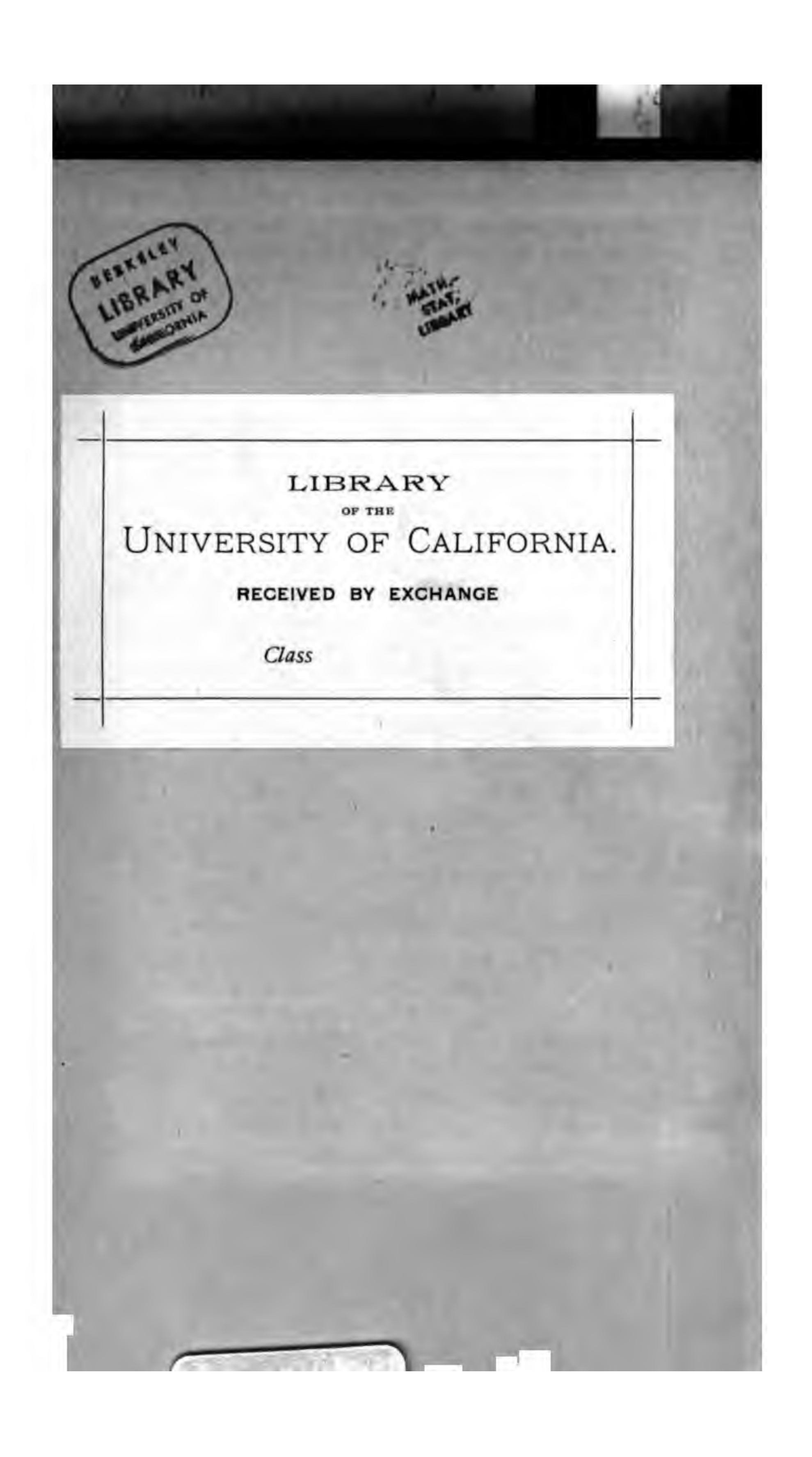

UC-NRLF
B 3 976 241


BERKELEY
LIBRARY
UNIVERSITY OF
CALIFORNIA
MATH-
STAT.
LIBRARY
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
RECEIVED BY EXCHANGE
Class





Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1904. Heft I.

München.
Verlag der K. Akademie.
1904.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



Sitzungsberichte

der

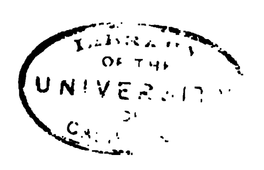
mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

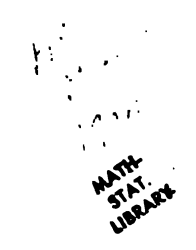
zu München.

Band XXXIV. Jahrgang 1904.



München.
Verlag der K. Akademie.
1905.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.



Uebersicht

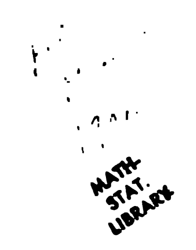
des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXXIV
Jahrgang 1904.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 2. Januar 1904. Seite

Sitzung vom 6. Februar 1904.

Sitzung vom 5. März 1901.



Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.



Uebersicht
des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXXIV
Jahrgang 1904.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 2. Januar 1904. Seite

Sitzung vom 6. Februar 1904.

Sitzung vom 5. März 1904.

Sitzung vom 7. Mai 1904.

Sitzung vom 4. Juni 1904.

Sitzung vom 2. Juli 1904.

Öffentliche Sitzung zur Feier des 145. Stiftungstages am 14. März 1904.

Sitzung vom 5. November 1904.

Öffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinzregenten am 12. November 1904.

Sitzung vom 3. Dezember 1904.



Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 2. Januar 1904.

Herr Ludwig Radlkofer hält einen Vortrag: „Über Thonerdeablagerungen in Pflanzenzellen."

Derselbe berichtet über ein auffallendes Vorkommen reichlicher schaliger Thonerdeablagerungen im Inneren der Blattzellen gewisser Symplocaceen. Auf die Vermutung, dass diese Ablagerungen aus Thonerde bestehen, führte den Vortragenden nach verschiedenen vergeblichen Versuchen zu ihrer Aufklärung eine vor mehr als 200 Jahren von Rumphius niedergeschriebene Bemerkung, dass die Blätter einer hieher gehörigen Pflanze, die er Alaun-Baum nannte, in der Färberei zur Bindung roter Pflanzenfarbstoffe verwendet werden, was der auch heutigen Tages üblichen Anwendung der Thonerde bei der Färbung, z. B. mit Krapprot, entspricht. Herr Geheimrat v. Baeyer hatte die Güte, durch Herrn Professor K. Hofmann eine chemische Untersuchung der betreffenden Blätter vornehmen zu lassen, wobei sich ergab, dass die volle Hälfte ihrer Asche aus Thonerde besteht. Auch die Bindung entsprechender Farbstoffe durch diese Ablagerungen liess sich unter dem Mikroskope deutlich beobachten. Welche Bedeu-

tung dieser massenhaften Ablagerung von Thonerde, die bisher nur in Spuren und nur bei sehr wenigen Pflanzen sich nachweisen liess, für die betreffenden Pflanzen selbst zukomme, lässt sich zur Zeit nur vermuten. Möglicherweise wird von denselben schwefelsaure Thonerde in grösserer Menge, wie sonst schwefelsaurer Kalk, aufgenommen, um den für die Herstellung der Eiweissstoffe nötigen Schwefel zu gewinnen.

Der Vortrag wird in einer botanischen Zeitschrift zur Veröffentlichung gelangen.

Sitzung vom 6. Februar 1904.

1. Herr August Föppl berichtet: „Über einen Kreiselversuch zur Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde."

Der Kreisel besteht aus einem an drei Drähten aufgehängten Elektromotor, auf dessen Welle beiderseits Schwungräder von je 30 kg Gewicht und 50 cm Durchmesser aufgekeilt sind. Lässt man den Kreisel mit Winkelgeschwindigkeiten von 1500 bis 2300 Umdrehungen in der Minute umlaufen, so erfährt er wegen der Erddrehung Ablenkungen von 5 bis 8 Grad, wenn die Kreiselachse in der Ruhelage horizontal und senkrecht zum Meridiane steht, während er keine Ablenkung erfährt, wenn die Ruhelage der Kreiselachse in den Meridian fällt. Die daraus berechnete Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung stimmt innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler, d. h. bis auf etwa 2 vom Hundert mit der Drehung der Erde gegen den Fixsternhimmel überein. Der Versuch übertrifft an Genauigkeit erheblich den Foucault'schen Pendelversuch, der im Übrigen zu demselben Ergebnisse geführt hat.

2. Herr H. v. Seeliger legt zwei Abhandlungen vor:

a) von Observator Dr. J. B. Messerschmitt: „Das magnetische Ungewitter vom 31. Oktober 1903."

Die Störung setzte um 7 Uhr Vorm. plötzlich ein, indem die Magnetnadel heftig zuckte und zitterte, was bis Mittag dauerte. Dann hörte das Zittern auf, dagegen wurden die Pendelbewegungen grösser, so dass z. B. sich die Missweisung

in kurzen Zwischenzeiten oft um mehr als 1° änderte. Von abends 8 Uhr an wurden die Schwingungen ruhiger und gingen allmählich in normale über. Gleichzeitig mit der Störung traten so starke Erdströme auf, dass der Telegraphendienst auf der ganzen nördlichen Halbkugel vielfach ganz unterbrochen war. Eine Störung von diesem Betrage ist in München seit dem 2. September 1859 nicht mehr beobachtet worden.

b) von Dr. Siegfried Guggenheimer: „Über die universellen Schwingungen eines Kreisringes."

Die Arbeit ist eine Übertragung der von Korn für die Kugel entwickelten Theorie auf den Kreisring. Es werden zunächst die Differentialgleichungen der universellen Funktionen für den Innen- und Aussenraum eines schwach kompressiblen Kreisringes in einem inkompressiblen Medium aufgestellt und die universellen Funktionen in erster Annäherung berechnet. Das Studium der Grundschwingung ergibt hierauf, dass dieselbe eine Pulsation ist, mit dem weiteren Resultate, dass sich, für grosse Entfernungen, der Ring wie eine pulsierende Kugel verhält.

3. Herr W. Königs legt eine Arbeit der Herren Richard Willstätter und Eugen Mayer: „Über Chinondiimid" vor.

4. Herr Alfred Pringsheim spricht über eine Untersuchung von Herrn Dr. Georg Faber, Gymnasiallehrer in Traunstein: „Über die Nicht-Fortsetzbarkeit gewisser Potenzreihen."

Vor einigen Jahren hat der französische Mathematiker Ch. Fabry einen auf die vorliegende Frage bezüglichen, interessanten allgemeinen Satz aufgestellt; sein Beweis ist aber äusserst kompliziert und in gewissen Einzelheiten kaum verständlich. Herr Faber gibt einen neuen, verhältnismässig einfachen Beweis jenes Satzes.

Über einen Kreiselversuch zur Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde.

Von **A. Föppl.**

(*Eingelaufen 6. Februar.*)

Unter der Drehung der Erde ist hier die Drehung zu verstehen, die sie gegen einen Raum ausführt, für den das Trägheitsgesetz erfüllt ist und zwar unter der ausdrücklichen Voraussetzung, dass diese Drehung aus der Beobachtung von Bewegungsvorgängen nachgewiesen ist, die sich in der Nähe der Erdoberfläche selbst abspielen. An sich wäre es nämlich keineswegs ausgeschlossen, dass die irdischen Bewegungserscheinungen durch die Erdrotation selbst beeinflusst würden, derart, dass für sie die Drehung der Erde mit der gegen den Fixsternhimmel nicht zusammenfiele. Ob dies zutrifft oder nicht, kann nur der Versuch entscheiden. Nun haben zwar schon die bisher in dieser Absicht angestellten Versuche das Bestehen einer solchen Abweichung unwahrscheinlich gemacht. Namentlich der Foucault'sche Pendelversuch, der von allen dahin gehörigen Versuchsanordnungen bisher die genauesten Ergebnisse geliefert hat, deutet darauf hin, dass auch für die irdischen Bewegungsvorgänge das Trägheitsgesetz für einen Raum erfüllt ist, der gegen den Fixsternhimmel keine Drehung ausführt.

Zunächst ist aber der Foucault'sche Pendelversuch mit solchen Fehlerquellen behaftet, dass die Genauigkeit selbst bei vorsichtigster Ausführung noch manches zu wünschen übrig lässt. Und dann wäre es auch immerhin möglich, dass ein etwaiger besonderer Einfluss der Erdrotation, den man bei diesen

Versuchen entdecken möchte, bei den hin und her schwingenden Bewegungen eines Pendels herausfiele, während er sich bei der stets in gleichem Sinne erfolgenden Drehung eines Kreisels bemerklich machen könnte. Selbst wenn die Genauigkeit des Foucault'schen Pendelversuchs nichts zu wünschen übrig liesse, wäre daher eine Ergänzung durch Kreiselversuche noch keineswegs entbehrlich gemacht.

Freilich sind solche Kreiselversuche schon von Foucault selbst und später oft wieder vorgenommen worden. Man findet eine Aufzählung der dahin gehörigen Literatur in dem Handbuche der Physik von Winkelmann, Band I, Breslau 1891, S. 187. Eine sehr lesenswerte Besprechung der bisher vorliegenden Versuche dieser Art mit einer Kritik der dabei erreichten Genauigkeit enthält der letzte Abschnitt des vor kurzem erschienenen dritten Heftes von dem bekannten Buche von Klein und Sommerfeld „Ueber die Theorie des Kreisels", Leipzig 1903. Die Genauigkeit lässt danach viel zu wünschen übrig und reicht längst nicht an die des Foucault'schen Pendelversuchs hin.

Es war daher kein überflüssiges Unternehmen, mit erheblich verbesserten Hilfsmitteln einen neuen Kreiselversuch zur Ermittelung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde in dem vorher erörterten Sinne anzustellen. Man wird auch sehen, dass es mir gelungen ist, diesen Versuch mit einer Genauigkeit durchzuführen, die selbst die des Foucault'schen Pendelversuchs erheblich übertrifft.

Meine anfängliche Hoffnung, hierbei auf ein neues Resultat zu kommen, nämlich einen deutlichen Unterschied zwischen der aus genauen Messungen an irdischen Bewegungsvorgängen zu erschliessenden Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde und jener gegenüber dem Fixsternhimmel nachweisen zu können, hat sich dabei freilich nicht erfüllt. Immerhin ist aber die Feststellung nicht ohne Wert, dass ein solcher Unterschied, falls er etwa doch noch bestehen sollte, nur einen geringen Bruchteil des Betrages jeder der beiden Grössen ausmachen kann.

Veranlasst wurde ich zu meinen Versuchen, wie ich zu erwähnen hier nicht unterlassen will, durch die Beschäftigung

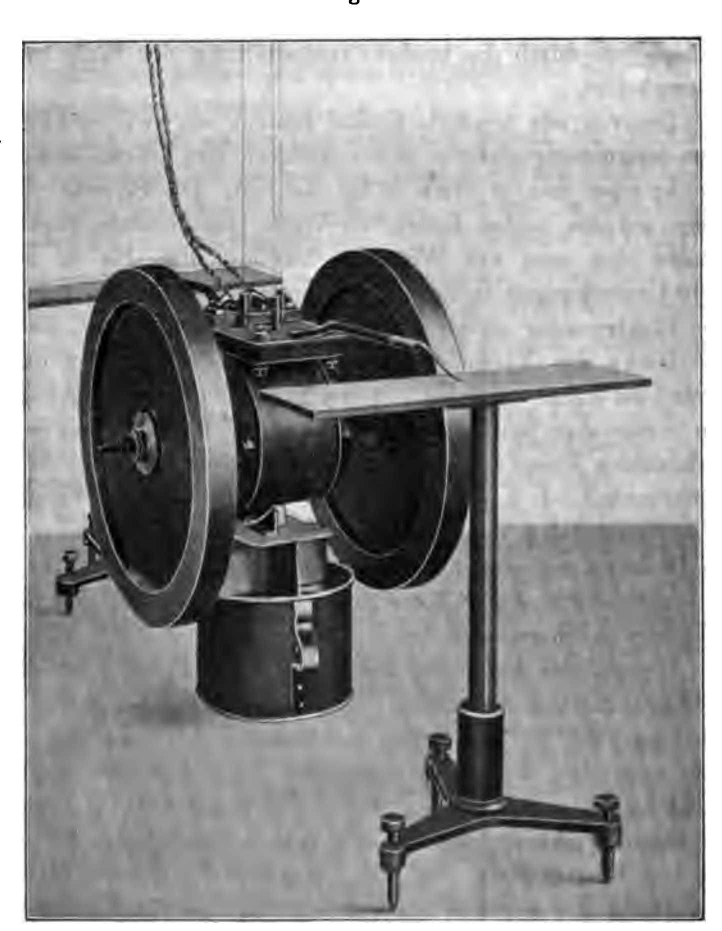
mit der Theorie der von Herrn O. Schlick in Hamburg zur Milderung der Rollbewegungen von Seeschiffen erdachten Kreiselvorrichtung. Meine Versuchsanordnung ist mit dem Schlick'schen Schiffskreisel ziemlich eng verwandt, näher freilich noch mit einer schon von Foucault verwendeten Einrichtung, von der sie sich nur durch die bessere Ausgestaltung der Einzelheiten unterscheidet.

Der von mir benützte Kreisel besteht aus zwei aus Flusseisen zusammengenieteten Schwungrädern von 50 cm äusserem Durchmesser und je etwa 30 kg Gewicht. Die Schwungräder sitzen auf den beiden Enden der Welle eines kleinen Elektromotors, den man mit Winkelgeschwindigkeiten bis zu etwa 2400 Umdrehungen in der Minute umlaufen zu lassen vermag. Der Elektromotor ist an drei Stahldrähten aufgehängt, die an der Decke des Versuchsraums befestigt werden. Der ganze Kreisel ist daher zunächst mit drei Freiheitsgraden aufgehängt, von denen aber jene beiden, die sich auf Verschiebungen in der horizontalen Ebene beziehen, nicht in Betracht kommen, da das Kreiselgestell, d. h. der Elektromotor während des Versuchs keine horizontalen Verschiebungen erfährt. Es bleibt daher nur die Drehung um eine lotrechte Achse übrig, wobei das in die Gleichgewichtslage zurückdrehende Moment der trifilaren Aufhängung zu überwinden ist.

Umstehende Abbildung zeigt diese Vorrichtung nach einer photographischen Aufnahme. Man sieht zu beiden Seiten die Schwungräder, in der Mitte den Elektromotor und die nach oben gehenden drei Aufhängedrähte, ausserdem die von der Decke lose herabhängenden Stromzuführungsdrähte (je zwei für die Magnetwicklung und für den Anker). Nach unten hin sind mit dem Elektromotor zwei sich kreuzende Blechtafeln verbunden, die in das darunter stehende mit Oel gefüllte Gefäss eintauchen. Diese Einrichtung dient wie die ihr ähnliche beim Mascart'schen Quadranten-Elektrometer zur Dämpfung der Schwingungen. Oben sind mit dem Elektromotor zwei Zeiger verbunden, die auf Gradeinteilungen einspielen. Diese Gradteilungen sind auf horizontalen, von Stativen getragenen Brett-

chen angebracht, von denen sich das nach vorne zu liegende in der Abbildung dem Blicke sofort aufdrängt.

Fig. 1.



Zur bequemen Bedienung des Elektromotors, den man nach den beiden entgegengesetzten Richtungen mit innerhalb gewisser Grenzen beliebigen Umdrehungsgeschwindigkeiten längere Zeit hindurch konstant umlaufen lassen kann, ist eine mit den er-

forderlichen Messinstrumenten, Widerständen u. dgl. versehene Schalttafel an der Wand des Laboratoriums angebracht. Diese wurde nach den Angaben meines Kollegen, Herrn Ossanna, Professor der Elektrotechnik an unserer technischen Hochschule, in einer ihrem Zwecke sehr gut entsprechenden Einrichtung hergestellt. Es sei mir gestattet, Herrn Professor Ossanna für seine wertvolle Unterstützung auch an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen.

Um festzustellen, mit welcher Geschwindigkeit der Kreisel in einem bestimmten Augenblicke umläuft, braucht man an der Schalttafel die Schaltung nur so zu ändern, dass die zum Anker führenden Drähte von der äusseren Leitung gelöst und durch Zwischenschaltung des Voltmeters kurz geschlossen werden. Der Elektromotor läuft dann für die kurze Zeit der Messung als Dynamomaschine und aus der Angabe des Voltmeters lässt sich, da die Magneterregung konstant erhalten wird, die Umlaufsgeschwindigkeit des Ankers erkennen. Eine besondere Versuchsreihe diente zur Eichung dieser Messvorrichtung, indem die Angaben eines Tourenzählers unmittelbar mit den Voltmeterausschlägen verglichen wurden. Danach wurde eine Eichungstabelle aufgestellt, aus der man später die Winkelgeschwindigkeit, die zu einer Voltmeterablesung gehört, unmittelbar entnehmen konnte.

Die Ausführung eines Versuchs spielt sich nun in folgender Weise ab. Man lässt den Motor anlaufen, bis er die gewünschte Geschwindigkeit erlangt hat, wozu wegen der Beschleunigung der verhältnismässig grossen Schwungradmassen immerhin ein Zeitraum von etwa 10 Minuten im Durchschnitt erforderlich ist. Auf die Ausschläge, die der Zeiger während der Anlaufperiode anzeigt, ist nicht viel Wert zu legen. Man muss nur darauf achten, dass der Zeiger nicht schon während der ersten zehn oder zwanzig Sekunden der Anlaufszeit einen Ausschlag gibt. Das tut er nämlich aus leicht verständlichen Gründen sofort, wenn die Kreiselachse nicht genau genug horizontal liegt. Mit der Erddrehung hat dies gar nichts zu tun und durch horizontalstellen mit Hilfe der an der oberen Befestigung der Aufhänge-

drähte angebrachten Stellschrauben lässt sich dieser Ausschlag leicht beseitigen. Im übrigen kommt diese Fehlerquelle überhaupt nur während der Anlaufperiode und nicht während des Umlaufens mit konstanter Geschwindigkeit, also für die Zeit der Messung in Betracht. Bei den älteren Versuchen dieser Art mag sie aber oft eine sehr entscheidende Rolle gespielt haben.

Nachdem die in Aussicht genommene Geschwindigkeit erreicht ist, hält man sie durch entsprechende Schaltung für eine viertel oder halbe Stunde lang konstant. Der Kreisel hat zu Beginn dieser Zeit von der Anlaufperiode her noch eine gewisse Präzessionsgeschwindigkeit und er führt daher gedämpfte Schwingungen, die sehr langsam verlaufen (etwa 3 bis 4 Minuten Dauer für einen einfachen Schwingungsweg im Durchschnitt), um die ihm jetzt zukommende Gleichgewichtslage herum aus. Um sicher zu sein, dass keine fremde Störung eingewirkt hat, liest man von Minute zu Minute den Zeigerausschlag auf beiden Seiten ab und trägt den Mittelwert als Ordinate zu einer die Zeit darstellenden Abscissenachse auf. Uebrigens unterscheiden sich die Zeigerausschläge auf beiden Seiten bei einem störungsfreien Versuche nur innerhalb der Grenzen der Ablesungsfehler (d. h. bis etwa $^1/_{10}$ Grad) von einander. Die Kurve, die man auf diese Weise erhält, muss nun, wenn der Versuch brauchbar sein soll, die bekannte, nach einem Exponentialgesetz in der Amplitude abnehmende Wellenform der gedämpften Schwingungen zeigen. Aus ihr lässt sich dann auf beiläufig $^1/_{10}$ Grad genau die Gleichgewichtslage, um die die Schwingung erfolgt, ableiten. Zu warten, bis die Schwingungen erloschen sind, ist daher nicht nötig und auch nicht empfehlenswert, weil sich bei zu langer Versuchsdauer durch Erwärmen des Elektromotors u. s. f. die Versuchsbedingungen merklich ändern könnten. Auf die Theorie dieser Schwingungen, die für die ganze Versuchsausführung von wesentlicher Bedeutung sind, werde ich übrigens späterhin noch zurückkommen.

Die ersten Versuche, die ich auf solche Art vornahm, waren sehr ungenau. Die Schwingungen zeigten einen sehr unregelmässigen Verlauf, was auf grosse Störungen hinwies und die

Ausschläge waren im Mittel beträchtlich kleiner als sie nach der Voraussetzung erwartet werden mussten, dass die Erddrehung auch für irdische Bewegungsvorgänge mit der Drehung gegen den Fixsternhimmel übereinstimme. Es schien mir daher anfänglich, als wenn ich einer ganz neuen Tatsache auf der Spur wäre. Um diese Frage entscheiden zu können, musste man vor allem die Störungen beseitigen. Es zeigte sich bald, dass sie von dem durch die schnell umlaufenden Schwungräder erzeugten Wind herrührten, denn ein in der Nähe aufgestellter grösserer Körper beeinflusste den Schwingungsvorgang und den Ausschlag erheblich. Dagegen liess sich leicht Abhilfe schaffen, indem man die rotierenden Teile einkapselte. Ich liess daher zwei Trommeln aus Blech herstellen, die die Schwungräder mit etwa 1 cm Spielraum umschlossen und deren Hohlräume durch kurze Anschlussstutzen, die am Elektromotorgehäuse abgedichtet wurden, mit dem Luftraume, in dem der Anker läuft, in Verbindung standen. Alle Fugen wurden sorgfältig mit Modellierwachs abgedichtet, so dass der ganze innere Luftraum nach aussen hin luftdicht abgeschlossen war. Von da ab führte der Kreisel, wenn sonst keine Störungen einwirkten, regelmässig verlaufende Präzessionsschwingungen aus und es zeigte sich, dass die früher gehegte Vermutung von einer deutlich ausgesprochenen Abweichung zwischen der aus irdischen Bewegungsvorgängen erschlossenen und der astronomischen Erddrehung unbegründet war.

Nicht geringe Schwierigkeiten machten anfänglich eine Reihe von elastischen Schwingungen verschiedener Art, die durch die Beigabe der Blechkapseln, die übrigens unter sich und mit dem Elektromotorgehäuse gut abgesteift wurden, noch vermehrt wurden. Die Aufhängedrähte können Saitenschwingungen, die Blechkapseln Membranschwingungen ausführen u. s. f. und sobald eine dieser Schwingungen mit der Umlaufzahl des Motors in Resonanz kommt, tritt sie in grosser Stärke hervor und verhindert genaue Beobachtungen. So lassen die Blechkapseln ein sehr kräftiges trommelndes Geräusch hören, sobald der Motor entweder mit ungefähr 1200 oder auch mit

ungefähr 1500 Umdrehungen in der Minute läuft. Sowie man aber ein wenig über eine dieser kritischen Tourenzahlen hinaus ist, hören diese Schwingungen plötzlich auf oder sie werden wenigstens so unmerklich, dass sie keine Störung mehr verursachen. Aus diesen Gründen ist auch die niedrigste Winkelgeschwindigkeit, für die noch zuverlässige Beobachtungen gemacht werden konnten, bei etwas über 1500 Umläufen in der Minute gelegen.

Bei manchen Versuchen, namentlich bei den höheren Geschwindigkeiten über 2200 hinaus, traten langsam schwingende Verschiebungen der Ankerwelle des Elektromotors in ihrer Längsrichtung auf, so dass sie sich in den Lagern hin und her schob. Die Ankerwelle hatte nämlich keinen Anschlag, der solche Verschiebungen verhindern konnte. Bei Umlaufzahlen, die nicht erheblich über 2200 hinausgingen, konnte man aber gute Versuchsreihen erhalten, bei denen diese Schwingungen nicht auftraten. Ich sah daher davon ab, den Elektromotor umbauen, d. h. ihn mit einer Einrichtung versehen zu lassen, durch die diese Schwingungen abgedämpft werden konnten, da dies ziemlich erhebliche Kosten verursacht haben würde. Wenn diese Schwingungen einmal auftraten, beruhigten sie sich nicht von selbst wieder, sondern der ganze Versuch wurde unbrauchbar.

Zur besseren Abdämpfung der verschiedenen unerwünschten Schwingungen liess ich übrigens vor der Vornahme der endgültigen Versuche ausser dem aus der photographischen Abbildung zu ersehenden Öltopfe noch zwei weitere Ölgefässe unter den Zeigerarmen aufstellen, in die von jedem Zeigerarme ein fest damit verbundener Flügel herabging und eintauchte. Die Sicherheit der Nullstellung wurde dadurch nicht beeinträchtigt; nach Beendigung des Versuchs gingen die Zeiger, wenn die Schwungräder wieder still standen, so genau in die anfängliche Nullstellung zurück, als es die Genauigkeit der Ablesung zu erkennen gestattete. Ein Versuch, bei dem dies nicht zugetroffen wäre, hätte natürlich verworfen werden müssen.

Die Theorie des Versuchs gestaltet sich, wenn man zunächst von den nachher noch besonders zu besprechenden Präzessionsschwingungen absieht, sehr einfach. Das Trägheitsmoment der rotierenden Massen sei mit Θ, die konstante Winkelgeschwindigkeit, mit der sie während des Versuchs umlaufen, mit w und die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung, unter der Voraussetzung, dass sie mit der astronomischen übereinstimme, mit u bezeichnet. Ferner sei φ die geographische Breite des Beobachtungsortes, ψ der Winkel, den die Gleichgewichtslage des rotierenden Kreisels mit der Ost-West-Richtung bildet und M das Moment des von der Aufhängevorrichtung auf das Kreiselgestell in dieser Gleichgewichtslage in der horizontalen Ebene übertragenen Kräftepaares. Nach dem Flächensatze muss M gleich der lotrechten Komponente der Änderungsgeschwindigkeit des Kreiseldralls infolge der Erddrehung sein. Dabei verstehe ich unter dem „Dralle" jenen Vektor, den man sonst auch das statische Moment der Bewegungsgrösse oder nach Klein und Sommerfeld den Impuls des Kreisels nennt.

Die Änderungsgeschwindigkeit des Kreiseldralls ist gleich dem äusseren Produkte aus dem Drall selbst und der als Vektor aufgefassten Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung. Von diesem Produkte ist die lotrechte Komponente zu nehmen und gleich M zu setzen. Das liefert nach einfacher Ausrechnung die Gleichung

$$M = \Theta\, w\, u \cos\varphi \cos\psi.$$

Wegen der regelmässigen Gestalt der Schwungräder konnte das Trägheitsmoment Θ durch Rechnung gefunden werden und zwar genauer, als es durch einen Schwingungsversuch in bekannter Weise hätte ermittelt werden können. Der Beitrag des Ankers zu Θ ist nämlich gegenüber dem Anteile der Schwungräder so geringfügig, dass er ohne merklichen Fehler selbst ganz hätte vernachlässigt werden können; er wurde indessen schätzungsweise berücksichtigt. Man erhielt im technischen Masssysteme, in dem das kg als Krafteinheit gilt,

$$\Theta = 26{,}7 \text{ cmkg sec}^2.$$

Die geographische Breite des Beobachtungsortes wurde $\varphi = 48^0\,8'\,20''$, die Beschleunigung der Fallbewegung

$$g = 981\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

gesetzt.

Das Moment M ist dem Verdrehungswinkel der Aufhängevorrichtung gegenüber der Nulllage bei stillstehendem Kreisel ziemlich genau proportional und kann daher in der Form $M = c\,\chi$ angeschrieben werden, wenn mit χ jener Verdrehungswinkel und mit c ein Proportionalitätsfaktor bezeichnet wird. Den Faktor c hätte man aus den Daten der trifilaren Aufhängung unter Berücksichtigung der sich dabei geltend machenden Torsionselastizität der Aufhängedrähte berechnen können, was zur Probe auch einmal geschehen ist. Zuverlässiger war aber wegen verschiedener Nebenumstände, namentlich wegen des an sich zwar geringfügigen Einflusses der lose herabhängenden Stromzuführungsdrähte die Ermittelung des Zusammenhanges zwischen M und χ durch einen unmittelbaren Versuch, der durch eine einfache Einrichtung leicht mit vollständig ausreichender Genauigkeit vorgenommen werden konnte. Die Proportionalität zwischen M und χ hat sich dabei hinlänglich genau bestätigt und im Mittel aus allen Versuchen ergab sich

$$M = 0{,}03696 \text{ cmkg für } \chi = 1^0$$

oder wenn man χ in Bogenmass ausdrückt, $c = 2{,}12$ cmkg.

Diese Zahlen beziehen sich auf den Fall des mit den Blechkapseln und allem sonstigen Zubehör für die endgültigen Versuche versehenen Kreisels.

Die Beobachtungen der Kreiselablenkung durch die Erddrehung erstreckten sich nur auf die beiden Fälle, dass die Nulllage des ruhenden Kreisels entweder in den Meridian fiel oder senkrecht dazu stand, also in die Ost-West-Richtung zeigte. Im ersten Falle dürfte nach der Annahme, dass die astronomische Erddrehung auch für die irdischen Bewegungsvorgänge massgebend sei, keine Ablenkung der Kreiselachse

infolge der Rotation entstehen. Dies hat sich auch, wie man nachher sehen wird, hinreichend bestätigt. Ohne die Dazwischenkunft des richtenden Kräftepaares der Aufhängung müsste zwar, je nachdem man den Kreisel im einen oder im entgegengesetzten Sinne rotieren lässt, die Nulllage eine stabile oder eine labile Gleichgewichtslage sein. Das richtende Moment M der Aufhängung reichte aber für alle Winkelgeschwindigkeiten, die zur Verfügung standen, weitaus hin, um auch im letzten Falle die Gleichgewichtslage zu einer stabilen zu machen. Der Kreisel verhält sich in dieser Hinsicht genau wie eine Magnetnadel, die an einem Drahte von genügender Torsionssteifigkeit aufgehängt, auch dann im stabilen Gleichgewichte steht, wenn der Nordpol im magnetischen Meridiane nach Süden zeigt. Nur die Schwingungsdauer um die Gleichgewichtslage wird etwas grösser als bei der umgekehrten Lage. Das hat sich auch bei den Präzessionsschwingungen des Kreisels, wie man noch sehen wird, unter den gleichen Umständen gezeigt; ich kann dieses Ergebnis aber nicht als ganz zuverlässig hinstellen, weil die Schwingungen auch sonst, wo sich ein bestimmter Grund dafür nicht nachweisen liess, Unregelmässigkeiten von nahezu ähnlicher Grössenordnung aufweisen. Da es sich hierbei um kleine Störungen handelte, die für den Hauptzweck der Untersuchung nur von geringer Wichtigkeit sind, habe ich es nicht für nötig gehalten, ihnen durch eine Häufung der Versuche weiter nachzugehen; sonst wäre es voraussichtlich möglich gewesen, auch in diesem untergeordneten Punkte eine befriedigendere Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung herzustellen.

Bei der anderen Versuchsanordnung, wenn nämlich die Kreiselachse in der Nulllage senkrecht zum Meridiane steht, fällt der Verdrehungswinkel χ, dem das Moment M proportional ist, mit dem früher eingeführten Winkel ψ zusammen und die Gleichung, um deren Prüfung es sich handelt, kann in der Form

$$c\,\psi = \Theta\, w\, u \cos\varphi \cos\psi$$

geschrieben werden. Für u wäre dabei wohl eigentlich die

Winkelgeschwindigkeit der Erde, die einer Umdrehung in einem Sterntage entspricht, einzusetzen; die Genauigkeit der Versuche reichte aber nicht aus, um zwischen dieser Winkelgeschwindigkeit und der anderen, die einer Umdrehung in einem mittleren Sonnentage entspricht, zu entscheiden. Daher wurde zunächst die letztere zu Grunde gelegt.

Alle Grössen, die in der vorausgehenden Gleichung vorkommen, sind hiernach teils vorher bekannt, teils den Ablesungen während eines Versuchs zu entnehmen und es handelt sich nun darum, ob die Gleichung durch diese Werte befriedigt wird. Zur Durchführung des Vergleichs wurden die übrigen Grössen in die Gleichung eingesetzt und dann der „theoretische" Wert des Winkels ψ daraus berechnet. Dieser wurde dem wirklich beobachteten Werte gegenübergestellt. Da sich herausstellte, dass sich ψ ber. und ψ beob. immer nur wenig von einander unterscheiden, durfte übrigens ohne in Betracht kommenden Fehler auf der rechten Seite der Gleichung in cos ψ sofort schon der beobachtete Wert von ψ eingesetzt werden, so dass es nicht nötig war, die transzendente Gleichung für ψ als solche aufzulösen.

Ich lasse jetzt die Beobachtungsergebnisse folgen und erwähne dabei, dass ich bei der Vornahme der Versuche und der Ausführung der dazu gehörigen Zahlenrechnungen durch die geschickte und gewissenhafte Mitarbeit meines Assistenten, des Herrn Diplom-Ingenieur R. Düll, sehr wirksam unterstützt wurde. Es ist mir eine angenehme Pflicht, ihm dafür meine Anerkennung und meinen Dank auszusprechen.

A. Nulllage der Kreiselachse im Meridian.

Hierbei wurde absichtlich vor Beginn der Ablesungen durch einen Anstoss eine Schwingung angeregt, da ein Ausschlag von selbst nicht zu stande kam. Dann wurde von Minute zu Minute die Zeigerstellung aufgeschrieben, wobei an den Umkehrpunkten auch noch Zwischenablesungen der grössten Ausschläge gemacht wurden. Die Zahlen gaben die aufeinander-

folgenden Ablesungen; die in Klammern stehenden Zahlen beziehen sich auf die Zwischenablesungen unter Voransetzung der Zahl der Sekunden, die seit der vorhergehenden Ablesung verstrichen waren. Zwischen je zwei nicht in Klammern stehenden aufeinanderfolgenden Zahlen liegt daher ein Zeitraum von einer Minute. Der Sinn, in dem der Motor bei dem Versuche umlief, ist durch Angabe der Richtung des Drehungsvektors gekennzeichnet und zwar so, dass z. B. ein „Drehungsvektor nach Süden" bedeutet, dass sich die Schwungräder von Süden her gesehen im Uhrzeigersinne drehten. Der Ausschlag ist mit einem +-Zeichen versehen, wenn die Drehung der Kreiselachse von oben gesehen im Uhrzeigersinne erfolgte; im entgegengesetzten Falle mit einem —-Zeichen.

1. Versuch. Drehungsvektor nach Süden.
Umlaufzahl 1915 in der Minute.

Ablesungen: — 4,2; — 1,4; + 2,7; + 4,1; + 1,4; — 1,95; — 3,6; — 1,85; + 1,6; + 3,5; + 2,35; — 0,5; — 2,8; (+ 30" : — 3,0); — 2,45; + 0,15; + 2,55; (+ 30" : + 2,9); + 2,7; + 0,4; — 1,7; (+ 45" : — 2,4); — 2,3; — 0,7; + 1,6; + 2,4; + 1,15; — 0,9; — 2,0; — 1,1; + 0,8; + 2,0; (+ 15" : + 2,05).

Hierauf wurde, nach einer Beobachtungsdauer von 28′ 15" der Versuch abgebrochen. Die Gleichgewichtslage berechnet sich nach diesen Zahlen zu + 0,1°, d. h. ihre Abweichung von der Nulllage übersteigt nicht die Fehlergrenze der Ablesungen. Dauer einer vollen Schwingung im Mittel 6′ 17".

2. Versuch. Drehungsvektor nach Norden.
Umlaufzahl 1830 in der Minute.

Ablesungen: — 3,0; — 2,45; — 0,8; + 1,15; + 2,15; + 1,6; — 0,2; — 1,95; (+ 45" : — 2,5); — 2,4; — 1,6; 0,0; + 1,3; (+ 30" : + 1,8); + 1,7; + 0,9; — 0,8; — 1,9; (+ 30" : — 2,05); — 1,9; — 1,05; + 0,2; + 1,2; (+ 30" : + 1,3); + 1,2; + 0,3; — 0,9; — 1,8; — 1,5; — 0,75; + 0,3; + 0,95; (+ 30" : + 1,05).

Nach 27′ 30″ wird der Versuch abgebrochen; die Gleichgewichtslage, um die die Schwingungen erfolgten, berechnet sich zu — 0,28°, eine Abweichung von der Nulllage, die zwar nicht mehr durch blosse Ablesungsfehler, aber doch noch durch anderweitige Versuchsfehler erklärt werden kann. Schwingungsdauer 7′ 51″.

B. Nulllage der Kreiselachse senkrecht zum Meridian.

Die Bezeichnungen sind die gleichen wie im vorigen Falle.

3. Versuch. Drehungsvektor nach Westen.
Umlaufzahl 1520 in der Minute.

Ablesungen: — 11,1; — 8,0; — 2,5; — 0,9; — 3,8; — 7,7; — 9,55; — 7,9; — 4,15; — 2,65; — 4,2; — 6,8; — 8,25; (+ 15″ : — 8,3); — 7,15; — 4,3; — 3,1; — 4,35; — 6,35; — 7,35; — 6,7; — 5,1; — 4,3; — 4,8; — 6,05; — 7,0; (+ 15″ : — 7,05); — 6,7; — 5,85; — 4,9; — 4,7; — 4,8; — 5,4; — 6,2; (+ 45″ : — 6,3).

Abgebrochen nach 30′ 45″ Beobachtungsdauer. Die Gleichgewichtslage der Schwingung zeigt eine Abweichung von — 5,65° von der Nulllage. Schwingungsdauer 6′ 9″.

4. Versuch. Drehungsvektor nach Westen.
Umlaufzahl 1530 in der Minute.

Ablesungen: + 0,6; — 2,0; — 7,3; — 10,9; (+ 15″: — 11,0); — 9,5; — 4,5; — 1,4; (+ 15″: — 1,35); — 2,95; — 6,5; — 9,2; (+ 15″ : — 9,45); — 8,4; — 5,0; — 2,65; (+ 15″ : — 2,6); — 3,5; — 6,0; — 8,05; (+ 30″: — 8,2); — 7,8; — 5,3; — 3,75; (+ 30″: — 3,7); — 4,2; — 6,0; — 7,3; (+ 30″: — 7,5); — 7,2; — 5,5; — 4,0; (+ 30″ : — 3,9).

Abgebrochen nach 24′ 30″. Abweichung der Gleichgewichtslage von der Nulllage gleich — 5,71°. Schwingungsdauer 6′ 7″.

5. Versuch. Drehungsvektor nach Osten.
Umlaufzahl 1540 in der Minute.

Ablesungen: + 8,3; + 5,85; + 3,1; (+ 30" : + 2,95); + 3,6; + 5,7; + 7,5; (+ 15":+ 7,6); + 6,75; + 4,7; + 3,7; + 4,8; + 6,2; + 6,9; + 5,7; + 4,7; (+ 30" : + 4,6); + 4,8; + 5,75; + 6,45; (+ 30" : + 6,6); + 6,2; + 5,4; + 5,2; + 5,55; + 5,85; (+ 45" : + 5,95).

Abgebrochen nach 21' 45". Abweichung der Gleichgewichtslage von der Nulllage gleich + 5,58°. Schwingungsdauer 5' 26".

6. Versuch. Drehungsvektor nach Osten.
Umlaufzahl 1550 in der Minute.

Ablesungen: —0,5; +1,8; +7,1; +10,65; (+15":+10,75); +8,6; +3,5; +1,5; +4,0; +7,75; +9,55; +7,2; +3,25; (+ 45" : + 2,3); + 2,65; + 4,9; + 7,65; (+ 45" : + 8,25); + 8,0; + 5,3; + 3,15; (+ 15" : + 3,1); + 3,95; + 6,05; + 7,5; (+ 15" : + 7,6); + 6,7; + 4,5; (+ 45" : + 3,7); + 3,85; + 5,0; + 6,5; (+ 45" : + 7,05); + 6,95; + 5,7; + 4,8; (+15":+4,7).

Abgebrochen nach 28' 15". Abweichung der Gleichgewichtslage von der Nulllage gleich + 5,60°. Schwingungsdauer 5' 39".

7. Versuch. Drehungsvektor nach Osten.
Umlaufzahl 1710 in der Minute.

Ablesungen: + 10,8; (+ 45" : + 12,1); + 11,7; + 6,95; + 1,8; (+ 30":+ 0,9); + 1,6; + 5,0; + 9,0; (+45":+10,45); + 10,35; + 7,5; + 3,5; (+ 45" : + 2,4); + 2,55; + 4,8; + 7,85; + 9,2; + 7,55; + 4,5; + 3,4; + 4,85; + 7,1; + 8,4: + 7,6; + 5,45; + 4,3; + 5,0; + 6,65; + 7,8; (+ 30":+ 7,9); + 7,6; + 5,95; + 4,75; (+ 30":+ 4,7); + 5,0; + 6,15; + 7,2; (+ 30" : + 7,4).

Abgebrochen nach 31' 30". Abweichung der Gleichgewichtslage von der Nulllage gleich + 6,12°. Schwingungsdauer 6' 9".

8. Versuch. Drehungsvektor nach Westen.
Umlaufzahl 1800 in der Minute.

Ablesungen: — 15,0; — 12,4; — 5,5; — 0,2; (+ 30": + 0,3); — 0,4; — 4,7; — 9,8; — 12,3; (+ 15": — 12,4); — 10,8; — 6,1; — 2,2; (+ 30": — 1,7); — 2,15; — 5,0; — 8,7; — 10,55; (+ 15": — 10,6); — 9,6; — 6,5; — 3,8; (+ 45": — 3,25); — 3,5; — 5,2; — 7,8; — 9,4; (+ 30": — 9,5); — 9,1; — 7,15; — 5,0; — 4,2; — 5,2; — 7,0; — 8,4; (+ 45": — 8,7).

Abgebrochen nach 28' 45". Abweichung der Gleichgewichtslage von der Nulllage gleich — 6,61°. Schwingungsdauer 7' 11".

9. Versuch. Drehungsvektor nach Osten.
Umlaufzahl 1900 in der Minute.

Ablesungen: + 7,5; + 7,2; + 6,95; + 6,9; + 6,95; + 7,15; + 7,35; (+ 15": + 7,4); + 7,35; + 7,25; + 7,1; + 7,0; + 7,05; + 7,15; + 7,25; + 7,3; + 7,2; + 7,1; + 7,1.

Abgebrochen nach 17'. Abweichung der Gleichgewichtslage von der Nullage gleich + 7,18°. Schwingungsdauer unsicher; ungefähr 6' 48".

10. Versuch. Drehungsvektor nach Westen.
Umlaufzahl 2000 in der Minute.

Ablesungen: — 9,3; — 8,8; — 7,6; — 6,4; — 5,8; — 6,15; — 7,2; — 8,3; — 8,85; — 8,55; — 7,7; — 6,7; — 6,2; — 6,4; — 7,05; — 7,9; — 8,5; (+ 15": — 8,55); — 8,3; — 7,8; — 7,1; — 6,6.

Abgebrochen nach 20'. Abweichung der Gleichgewichtslage von der Nulllage gleich — 7,45°. Schwingungsdauer 8' 0".

11. Versuch. Drehungsvektor nach Osten.
Umlaufzahl 2200 in der Minute.

Ablesungen: + 13,95; + 11,5; + 6,8; + 3,1; (+ 45": + 2,3); + 2,55; + 4,7; + 8,2; + 11,15; (+ 45": + 12,15); + 12,1; + 10,55; + 7,4; + 4,4; (+ 30": + 3,75); + 3,85; + 5,3;

+ 7,8; + 10,05; + 11,05; + 10,15; + 7,8; + 5,15; + 4,65; + 5,75; + 7,65; + 9,5; + 10,35; + 9,95; + 7,9; + 5,65; + 4,95; + 5,8; + 7,5; + 9,2; + 10,05.

Abgebrochen nach 32'. Abweichung der Gleichgewichtslage von der Nulllage gleich + 7,63°. Schwingungsdauer 8' 0".

12. Versuch. Drehungsvektor nach Westen. Umlaufzahl 2280 in der Minute.

Ablesungen: — 7,0; — 7,2; — 7,75; — 8,55; — 9,1; (+ 30": — 9,2); — 9,15; — 8,7; — 8,05; — 7,55; — 7,4; — 7,7; — 8,15; — 8,5; — 8,8; — 8,65; — 8,3; — 7,95; — 7,8; — 7,95; — 8,15; — 8,4; — 8,65; — 8,6; — 8,5; — 8,3; — 8,15; (+ 45": — 8,1).

Abgebrochen nach 25' 45". Abweichung der Gleichgewichtslage von der Nulllage gleich — 8,23°. Schwingungsdauer 8' 35".

Nach diesen Zahlen lässt sich die Wellenform der Schwingung auftragen. Dies ist mit allen 12 Versuchen geschehen, um sie darauf hin zu prüfen, ob sie von merklichen Störungen frei waren. Ich begnüge mich damit, umstehend zwei dieser Abbildungen wiederzugeben, die sich auf die Versuche 2 und 6 beziehen.[1]) Die anderen sind ganz ähnlich.

Eine Zusammenstellung der beobachteten Ausschläge ψ und einen Vergleich mit den in der früher angegebenen Weise berechneten Werten von ψ liefert die folgende Tabelle:

---

[1]) Die Gleichgewichtslage, um die die Schwingungen erfolgten, ist durch eine gestrichelte, die theoretisch zu erwartende Gleichgewichtslage durch eine ausgezogene Linie angegeben, die im Falle der Figur 2 mit der Abszissenachse zusammenfällt.

Versuch Nr.	Richtung des Drehungsvektors nach	Zahl der Umläufe in der Minute	ψ ber.	ψ beob.	Unterschied	Dauer einer vollen Schwingung
1	Süden	1915	0	+ 0,10	+ 0,10	6′ 17″
2	Norden	1830	0	− 0,28	− 0,28	7′ 51″
3	Westen	1520	− 5,54	− 5,65	− 0,11	6′ 9″
4	Westen	1530	− 5,58	− 5,71	− 0,13	6′ 7″
5	Osten	1540	+ 5,62	+ 5,58	− 0,04	5′ 26″
6	Osten	1550	+ 5,65	+ 5,60	− 0,05	5′ 39″
7	Osten	1710	+ 6,23	+ 6,12	− 0,11	6′ 9″
8	Westen	1800	− 6,55	− 6,61	− 0,06	7′ 11″
9	Osten	1900	+ 6,92	+ 7,18	+ 0,26	6′ 48″
10	Westen	2000	− 7,27	− 7,45	− 0,18	8′ 0″
11	Osten	2200	+ 7,99	+ 7,63	− 0,36	8′ 10″
12	Westen	2280	− 8,27	− 8,23	+ 0,04	8′ 35″

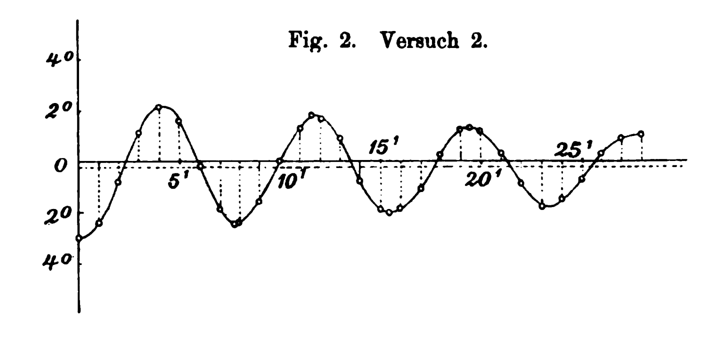


Fig. 2. Versuch 2.

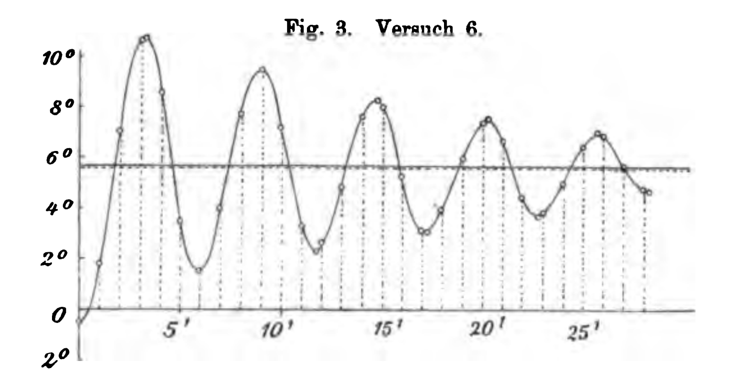
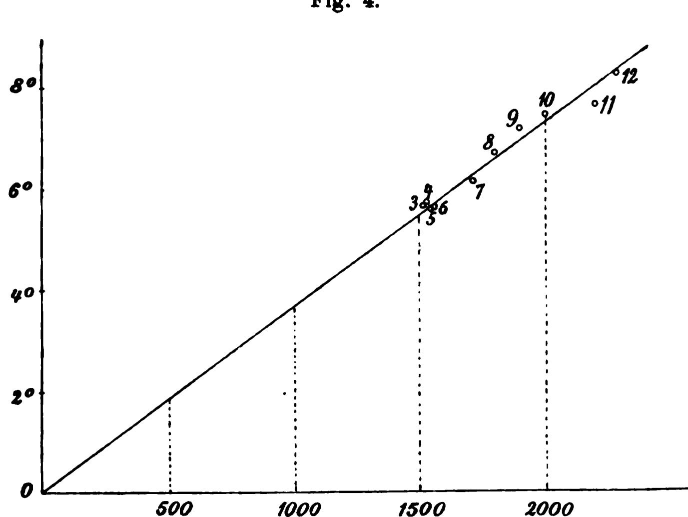


Fig. 3. Versuch 6.

Der grösste Unterschied zwischen ψ ber. und ψ beob. macht daher bei den letzten zehn Versuchen etwa 4,5 vom Hundert eines der beiden Werte aus, ist aber im Durchschnitt viel kleiner. Das Überwiegen der mit dem negativen Vorzeichen versehenen Unterschiede scheint auf einen systematischen Fehler von geringer Grösse hinzudeuten.[1]) Als Gesamtergebnis wird man wohl aussprechen dürfen, dass der Unterschied zwischen der aus der Beobachtung irdischer Bewegungsvorgänge abgeleiteten Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung und der astronomischen, falls

Fig. 4.



ein solcher Unterschied doch noch bestehen sollte, nicht mehr als etwa 2 vom Hundert ausmachen kann.

Auch die Zahlen der vorhergehenden Tabelle habe ich in einer Zeichnung, Abbildung 4, auftragen lassen, in der die

---

[1]) Möglich wäre zwar auch die Vermutung, dass hierin und in den Zahlen für die Schwingungsdauern eine Andeutung für eine geringe Abweichung der Winkelgeschwindigkeiten der Erde in dem früher ausführlich erörterten Sinne erblickt werden könnte. Wahrscheinlicher ist aber jedenfalls die Erklärung durch Beobachtungsfehler.

Abszissen die Umlaufsgeschwindigkeiten des Kreisels, die Ordinaten die Ablenkungen aus der Nulllage und zwar mit Unterdrückung des Vorzeichens darstellen. Die Werte von ψ beob. sind durch kleine Kreise angegeben, während die Werte von ψ ber. auf der ausgezogenen Linie enthalten sind.

Bei einer letzten Versuchsreihe wurden die Schwungräder abgenommen, so dass nur der Anker des Elektromotors für sich rotierte. • In keiner der beiden Lagen (Nord-Süd und Ost-West) ergab sich dabei eine Ablenkung von messbarer Grösse, obschon wegen der erheblichen Verminderung des von der trifilaren Aufhängung getragenen Gewichts (von 105,7 kg auf 34,7 kg) die Messvorrichtung jetzt viel empfindlicher geworden war. Es war nötig dies festzustellen, um nachzuweisen, dass sich ein merkbarer Einfluss des magnetischen Feldes der Erde auf den Elektromotor bei den Hauptversuchen nicht geltend zu machen vermochte.

Es bleibt mir noch übrig, die Theorie der Präzessionsschwingungen aufzustellen, die die Kreiselachse bei konstanter Umlaufgeschwindigkeit um ihre Gleichgewichtslage herum auszuführen vermag. Dabei sehe ich von der Berücksichtigung einer Reihe unerheblicher Nebenumstände ab und beschränke mich überdies auf die Untersuchung von Schwingungen, die klein genug sind, um sie als unendlich klein betrachten zu können.

Bei diesen Schwingungen bewegt sich, wie es schon die Beobachtung lehrt, die Kreiselachse nahezu in einer horizontalen Ebene. Auch die Änderungsgeschwindigkeit des Dralls ist daher mit demselben Grade der Annäherung horizontal und zwar in jeder Stellung senkrecht zur Kreiselachse gerichtet. Nach dem Flächensatze muss also während der Schwingung von den Aufhängedrähten ausser den durch das Gewicht des Kreisels hervorgerufenen Spannungen auch noch ein Kräftepaar von horizontal gerichtetem Momentenvektor auf den Kreisel übertragen werden, der gleich der besprochenen Änderungsgeschwindigkeit des Dralls ist. Dieses Kräftepaar ist weit grösser als das durch die Torsion der trifilaren Aufhängung

bedingte, das früher mit dem Buchstaben M bezeichnet wurde und dessen Momentenvektor lotrecht gerichtet ist. Es verhält sich nämlich zu M wie die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsschwingungen in einem gegebenen Augenblicke zur betreffenden Winkelgeschwindigkeitskomponente der Erddrehung. Dieses bei den gegebenen Versuchsbedingungen verhältnismässig grosse und mit der Zeit veränderliche Kräftepaar wird durch die Aufhängedrähte dadurch auf den Kreisel übertragen, dass die einzelnen Drähte verschieden stark gespannt sind. Wegen der Veränderlichkeit der Spannungen erfahren die Aufhängedrähte zugleich elastische Längenänderungen und daraus folgt, dass die Kreiselachse während der Schwingungen ausser der bisher allein in Betracht gezogenen Drehung um eine lotrechte Achse zugleich noch Drehungen um eine zu ihr selbst senkrecht stehende horizontale Achse ausführen muss, die freilich von so geringer Grösse sind, dass man sie nur durch besondere Hilfsmittel nachweisen könnte. So klein diese Drehungen aber auch sind, so wichtig sind sie für den zeitlichen Verlauf der Schwingungen.

Bezeichnet man den sehr kleinen Winkel, um den sich die Kreiselachse gegen ihre Gleichgewichtslage um eine zu ihr senkrecht stehende horizontale Achse zur Zeit t gedreht hat, mit ϱ, die Drehung um die lotrechte Achse mit ψ (wobei aber ψ jetzt nicht die Drehung aus der Nulllage, sondern die Drehung aus der Gleichgewichtslage des rotierenden Kreisels bedeutet), so kann man auf Grund der vorhergehenden Erwägungen ohne weiteres die Bewegungsgleichungen anschreiben

$$\Theta w \frac{d\varrho}{dt} = + c\psi \quad \text{und} \quad \Theta w \frac{d\psi}{dt} = - K\varrho.$$

Dabei gibt Θw die absolute Grösse des Dralls, c den schon früher damit bezeichneten Proportionalitätsfaktor an, während K ein neu eingeführter Proportionalitätsfaktor ist, der den Zusammenhang zwischen der Drehung ϱ und dem dadurch in den Aufhängedrähten vermöge ihrer Zugelastizität hervorgerufenen Kräftepaare angibt.

Man kann den Wert von K aus den einzelnen Daten der

trifilaren Aufhängung berechnen. Wenn die unteren Befestigungspunkte der Drähte mit dem Schwerpunkte des Kreisels in einer horizontalen Ebene lägen, hätte man einfach

$$K = \frac{EF}{l} \cdot \frac{s^2}{2},$$

wo E der Elastizitätsmodul des Drahts, F der Querschnitt eines Drahts (gleich 0,0177 cm²), l die Drahtlänge (gleich 658 cm), s die Entfernung je zweier Drähte voneinander (gleich 6 cm) ist. Dazu kommt aber noch das Produkt aus dem Kreiselgewichte und der Höhe der Aufhängepunkte über dem Kreiselschwerpunkte. Die letzte Strecke liess sich mit Rücksicht auf die besondere Befestigungsart der Drähte am Elektromotorgestell nicht mit hinreichender Sicherheit angeben; ausserdem kannte man auch den Wert von E nicht genau genug. Ich zog daher vor, K unmittelbar durch einen besonderen Belastungsversuch am ruhenden Kreisel zu bestimmen. Zu diesem Zwecke wurden seitlich Gewichte aufgesetzt und die durch sie verursachten Drehungen ϱ mit Hilfe einer Spiegelablesung gemessen. Dadurch ergab sich

$$K = 2985 \text{ cmkg}.$$

Für c war schon früher

$$c = 2{,}12 \text{ cmkg}$$

gefunden. — Durch Elimination von ϱ aus den beiden Bewegungsgleichungen erhält man für ψ

$$\Theta^2 w^2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} = -K c \psi$$

und derselben Gleichung muss auch ϱ genügen. Das ist aber die Differential-Gleichung einer einfachen harmonischen Schwingung von der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \frac{\Theta w}{\sqrt{Kc}}.$$

Θ war früher zu 26,7 cmkg sec² ermittelt. Setzt man, um bestimmte Zahlenwerte zu erhalten, $w = 209{,}4 \frac{1}{\text{sec}}$, was 2000 Umläufen in der Minute entspricht, so erhält man

$$T = 442 \text{ sec} = 7' 22''$$

für die Dauer einer „vollen" Schwingung bei 2000 Umläufen oder auch 5' 31'' bei 1500 Umläufen des Kreisels. Die aus den früher angegebenen Versuchszahlen zu entnehmenden Schwingungsdauern stimmen damit, wenn sie auch unter sich etwas abweichen, im Mittel so gut überein, als man es von einer solchen Annäherungsrechnung, die z. B. schon auf die Dämpfung gar keine Rücksicht genommen hat, nur irgend erwarten kann.

Schliesslich möchte ich noch bemerken, dass ich die hier beschriebenen Versuche nicht als eigentliche Präzisionsversuche bezeichnen kann. Sie sind zwar ohne Zweifel erheblich genauer, als alle früher in der gleichen Absicht unternommenen; dagegen stellen sie noch lange nicht das Äusserste dar, was sich nach dem gleichen Versuchsplane mit weiter verbesserten Hilfsmitteln erreichen liesse. Bei Versuchen, die in der Absicht angestellt würden, die höchstmögliche Genauigkeit der Messung zu erreichen, würde man in erster Linie für die Unverrückbarkeit der oberen Aufhängepunkte der Drähte besser sorgen müssen, als es mir möglich war. Um eine genügende Länge dieser Drähte zu erhalten, musste ich sie durch eine Öffnung in der Decke des Versuchsraumes führen und an der mit dem Dachgebälk zusammenhängenden Decke des darüber liegenden Raumes befestigen. Bei windigem Wetter führt das Dachgebälk kleine Bewegungen aus, die zwar nicht die Gleichgewichtslage, aber den zeitlichen Verlauf der Schwingungen beeinflussen. Auch sonst liesse sich natürlich noch manches verbessern.

Ob ein in dieser Weise noch weiter verfeinerter Versuch mit demselben Ergebnisse abschliessen würde, wie jetzt, oder ob sich damit ein Unterschied zwischen der Winkelgeschwindigkeit der Erde gegenüber irdischen Bewegungsvorgängen und der Winkelgeschwindigkeit gegen den Fixsternhimmel nachweisen liesse, muss dahingestellt bleiben. Für ganz unwahrscheinlich vermag ich ein Ergebnis in der zuletzt genannten Richtung nicht zu halten. Gewisse Andeutungen von einer

Abweichung, weniger hinsichtlich der Grösse, als hinsichtlich der Richtung der Winkelgeschwindigkeit scheinen sich ja aus den mitgeteilten Ziffern immerhin herauslesen zu lassen; sie sind aber zu unbestimmt und liegen zu weit innerhalb der möglichen Fehler, als dass sich darauf ein Urteil stützen liesse. Für das Wahrscheinlichste muss man es daher halten, dass ein Versuch mit weiter verbesserten Hilfsmitteln diese Andeutungen als blosse Beobachtungsfehler nachweisen würde.

Nachtrag.

Nach einem Referate in den Beiblättern zu den Ann. der Phys. Bd. 28, S. 295, 1904 ist E. W. Hall (Phys. Rev. S. 179, 1903) auf Grund zahlreicher neuer Versuche zu dem Schlusse gekommen, dass eine geringe Ablenkung fallender Körper nach Süden hin als möglich zugegeben werden müsse. Durch bekannte Ursachen lässt sich eine Ablenkung in dieser Richtung von irgendwie merklichem Betrage nicht erklären; sie wurde daher stets bestritten, obschon sie von älteren Experimentatoren wiederholt gefunden war. Um die Frage endgültig zu entscheiden, hält Hall weitere sorgfältige Versuche für erforderlich. Nimmt man an, dass diese Versuche die südliche Ablenkung bestätigten, so würde damit sofort auch eine Erklärung für die systematischen Abweichungen gefunden sein, die in der vorstehenden Abhandlung zunächst als blosse Beobachtungsfehler angesehen wurden. Denn es ist klar, dass sich jene unbekannte Ursache, die zur südlichen Ablenkung fallender Körper führt, auch im Verhalten des rotierenden Schwungrades geltend machen würde oder mindestens geltend machen könnte. Damit wäre dann auch die Möglichkeit eröffnet, jene unbekannte Ursache mit Hilfe von Kreiselversuchen genauer zu erforschen, als es durch die Beobachtung der Fallbewegung allein geschehen kann. — Ich behalte mir vor, auf diese Frage später noch zurückzukommen.

Das magnetische Ungewitter vom 31. Oktober 1903.

Von **J. B. Messerschmitt.**

(*Eingelaufen 6. Februar.*)

(Mit Tafel I.)

Während der letzten Jahre wichen die Bewegungen der Magnetnadel nur wenig von ihrem normalen Gange ab und wenn Störungen vorkamen, so waren sie meist nur von kurzer Dauer und geringer Intensität. Es war eben die Zeit des Minimums, welches sich ausserdem dieses Mal länger als gewöhnlich hinzog. Schon im Jahre 1900 glaubte man dasselbe erwarten zu dürfen, allein es trat erst im folgenden Jahre ein, so dass das Jahr 1900 so ruhig und gleichmässig verlief, wie es seit der regelmässigen Verfolgung dieses Phänomens noch niemals beobachtet worden ist. Ja noch in der ersten Hälfte des Jahres 1902 kamen nur sehr geringe Unregelmässigkeiten vor und erst in der zweiten Hälfte desselben wurden die Bewegungen merklich lebhafter, so dass nicht mehr zu zweifeln war, dass nunmehr der Wendepunkt eingetreten sei.

Wenn nun schon sonst der Anstieg der Kurve der magnetischen Variationen zum Maximum immer rascher erfolgt als der Abfall zum Minimum, so konnte man erwarten, dass dies noch mehr nach dem langausgedehnten Minimum der Fall sein würde, was sich auch völlig bestätigt hat. Es traten daher nunmehr häufiger stärkere und länger andauernde Störungen auf, die den normalen Gang der Elemente des Erdmagnetismus wesentlich beeinflussten. Immerhin nahmen sie keine aussergewöhnliche Grösse an, sondern blieben in den Grenzen, wie

man sie während der elfjährigen Periode öfter zu beobachten Gelegenheit hat.

Die ersten Tage des Oktobers waren verhältnismässig ruhig; eine ziemlich ansehnliche Störung fand erst am 12. bis 14. statt. Die folgenden Tage wichen wieder nur wenig von ihrem normalen Werte ab und insbesondere waren in den letzten Tagen des Oktobers die Tagesstunden recht ruhig, während bei Nacht sich kleinere Unregelmässigkeiten einstellten. Eine etwas stärkere Bewegung begann erst wieder am 30. Oktober abends 10^h M. E. Z., welche sich aber zunächst in mässigen Grenzen hielt. Am 31. morgens 6^h schien diese Störung schon erloschen zu sein und der normale Gang wieder eingesetzt zu haben. Da plötzlich um $7^h\,0^m$ machten die Magnetnadeln einen starken Ausschlag und gerieten dann in eine solche Unruhe, wie sie in München seit mehr als 40 Jahren nicht mehr beobachtet worden ist. Es dürfte sich daher wohl verlohnen, zu der Reproduktion der an den registrierenden Apparaten des magnetischen Observatoriums in München erhaltenen Kurven eine etwas eingehendere Beschreibung über den Verlauf der Störung und der dabei aufgetretenen anderen Erscheinungen zu geben.

Nach den photographischen Aufzeichnungen kann man bei dieser Störung drei Phasen unterscheiden. In der ersten, die von 7^h morgens bis etwa 2^h nachmittags dauerte, lief die Deklinationsnadel in mässig grossen Amplituden hin und her, indem sie dabei fortwährend kurz andauernde Schwingungen von etwas über 1′ Amplitude ausführte, so dass während dieser ganzen Zeit das Kurvenbild doppelt erscheint. Bei der direkten Beobachtung der Deklinationsnadel mit dem Theodolithen zwischen 10 und 12^h vormittags sah ich die Nadel nicht nur ruckweise hin- und hergehen, sondern es traten öfter Erzitterungen von 1—5 Sekunden Dauer auf, wie wenn man leicht an das Instrument gestossen hätte, so dass das Bild des reflektierten Fadens ganz undeutlich wurde, wodurch offenbar die doppelten Bilder in den Photographien erzeugt wurden.

Es scheint also zu der seitlichen Bewegung noch eine zweite, senkrecht zur magnetischen Axe, getreten zu sein.

Bemerkenswert ist noch, dass beim Anfang der Störung die Deklination erst um ein Geringes, etwa 0,2', abnahm, um dann sofort um 6,3' zuzunehmen. Derselbe Vorgang ist entsprechend bei den beiden anderen Elementen eingetreten.

Bei der Horizontalintensität ist die zitternde Bewegung nicht so deutlich, war aber ebenfalls vorhanden, wie ich mich in den Vormittagsstunden beim direkten Anblick des Lichtpunktes des Horizontal-Variometers überzeugen konnte, der ganz verschwommen erschien. Infolge dieser Unruhe und der raschen Bewegung der Nadel wurde auch die Belichtungszeit so verkürzt, dass nur noch schwache Spuren abgebildet und zeitenweise gar keine Lichteindrücke hinterlassen worden sind, obwohl der Punkt nicht immer ausserhalb der Papierfläche fiel.

Die Kurve der Vertikalintensität blieb während dieser Zeit scharf, ist aber mit vielen kleinen Zacken besetzt.

In der zweiten Phase, die von 2^h bis gegen 8^h abends dauerte, waren die Kurven wieder schärfer, es blieben also die kurzen Schwingungen und Erzitterungen aus, dagegen wurden jetzt die Pendelbewegungen der Nadeln noch stärker und rascher als vorher. Während nämlich bis dahin die Amplituden in Deklination nur im Maximum bis 40' gestiegen waren, erreichten sie am Nachmittag fast den dreifachen Betrag, wurden also von einer Grösse, wie sie seit der Einrichtung des magnetischen Dienstes in München, d. i. seit Anfang der vierziger Jahre des vorigen Jahrhunderts nur einmal von Lamont beobachtet worden sind, nämlich am 2. September 1859. Dabei folgten die grossen Schwingungen rasch hintereinander, so dass innerhalb dieser 6 Stunden die Nadel gegen 20 Oszillationen mit mehr als 20' Ausschlag ausführte, wozu jedesmal nur wenige Minuten Zeit beansprucht wurden. Dazu kommt noch eine grosse Zahl kleinerer Schwingungen. Die grösste westliche Deklination ist um 3^h 22^m M. E. Z. mit $11^\circ 2'.3$ gemessen worden, die Bewegung war dabei so rasch, dass der Umkehrpunkt nur ganz schwach erscheint und daher dieser Wert nicht ganz sicher

ist, während sonst die Deklinationskurve ohne Lücken und Unsicherheiten ist. Diesem Maximum ging eine Wellenbewegung voran, die durch die folgenden Zahlen verdeutlicht wird:

M. E. Zeit	Deklination	Diff.
$2^h\ 49^m$ p. m.	10° 21'.4 W.	
56	9 39.7	− 41'.7
59	53.9	+ 14.2
3 0	50.1	− 3.8
9	10 48.3	+ 58.2
16	30.9	− 17.4
22	11 2.3	+ 31.4
40	10 6.6	− 55.7

Der östlichste Wert der Deklination trat am Nachmittag um $7^h\ 57^m$ mit 9° 20'.1 ein. Er ist zugleich der Endpunkt der grössten beobachteten Schwankung, indem die Deklination von 10° 47'.9 um $7^h\ 49^m$ in gerader Linie auf diesen Wert zurückgegangen ist. Diese Oszillation bildet zugleich den Abschluss der zweiten Periode des Sturmes. Ihr gingen eine Anzahl grosser und gleichmässiger Schwingungen voran, deren Umkehrpunkte waren:

M. E. Zeit	Deklination	Diff.
$5^h\ 49^m$ p. m.	10° 10'.2 W.	
6 15	9 32.6	− 37'.6
34	10 26.8	+ 54.2
40	9 56.4	− 30.4
46	10 19.4	+ 23.0
54	9 52.6	− 26.8
7 4	10 21.6	+ 29.0
17	9 37.4	− 44.2
33	10 6.6	+ 29.2
39	9 46.3	− 20.3
49	10 47.9	+ 61.6
57	9 20.1	− 87.8
8 8	9 38.8	+ 18.7

Bei der Horizontalintensität ist während des grössten Teils dieser Periode infolge der raschen Bewegung die Belichtungszeit zu kurz gewesen, um noch einen Eindruck auf

em photographischen Papier zu hinterlassen, ein Umstand, er auch an anderen Observatorien für das eine oder andere lement aufgetreten ist. Doch sind bei uns wenigstens noch ie wichtigsten Umkehrpunkte, reflektiert vom zweiten Spiegel, er mit dem ersten einen Winkel von 182°5 bildet, deutlich m Ende des Papiers hereingekommen. Die drei tiefsten unkte der Kurve, die den kleinsten Werten der Horizontal-ntensität entsprechen, sind um $6^h\ 13^m$ $H = 0{,}20235$, um $^h\ 13^m$ mit 0,20200 und um $7^h\ 52^m$ mit $H = 0{,}20225$ ab-elesen worden. Mit dem letzten grossen Ausschlag, der gleich-eitig mit dem der Deklination stattfand, schliessen die ausser-ewöhnlich grossen Oszillationen.

In der ersten Periode war die Vertikalintensität nahe von er gleichen Grösse geblieben, dann aber nahm sie äusserst asch zu, so dass dann in der zweiten Periode der Wagebalken er magnetischen Wage gegen 2^h umfiel, nachdem die Ver-ikalintensität um mehr als 200 γ zugenommen hatte.

Im dritten Abschnitt findet ein allmähliches Abklingen er anomalen Bewegung statt, wenn auch noch manche spitze acken in der Kurve auftreten, die sich aber in solchen Grenzen alten, wie sie auch bei anderen Störungen häufig auftreten. Das Ende des ganzen Ungewitters fällt in die Morgenstunden es 1. Novembers zwischen 5^h und 6^h, worauf der normale lang wieder ganz zum Durchbruch gekommen ist. Bemerkens-vert ist immerhin, dass bis in die ersten Abendstunden des . Novembers die Nadeln kleine Schwingungen ausführten, mit Schwingungsweiten von 1′ bis 2′ in D bez. 5 bis 10 γ in H, o dass die Kurve mit lauter kleinen Wellen besetzt erscheint. Dann erst werden die Kurvenbilder glatter, wenn auch bald wieder neue Störungen einsetzen, die sich mehr oder minder ausgesprochen bis nahe zur Mitte des Monats fortsetzen. Erst der 14. November st wieder als der erste völlig ungestörte Tag zu verzeichnen.

Die nachstehende Tabelle soll nun einen Überblick über lie Grösse und den Gang der magnetischen Deklination und ler Horizontalintensität am Tage der Störung, am vorher-gehenden und am nachfolgenden Tage geben.

	Deklination			Horizontal-Intensität (C. G. S.)		
M. E. Z.	30. Okt.	31. Okt.	1. Nov.	30. Okt.	31. Okt.	1. Nov.
1h a. m.	10° 11.'6	10° 12.'9	9° 52.'6	0.20 656	0.20 665	0.20 565
2	10.4	14.2	57.0	653	664	554
3	11.8	17.0	10 0.0	655	671	655
4	11.8	11.5	5.8	651	676	558
5	11.6	15.2	4.4	657	677	575
6	11.8	16.8	18.0	660	665	530
7	10.4	16.7	10.4	660	676	520
8	10.4	11.6	9.7	657	520	520
7	9.9	13.5	11.0	645	633	504
10	10.4	0.2	11.1	646	610	515
11	13.2	26.8	13.7	645	420	527
Mittag	15.1	4.4	16.2	643	590	545
1 p. m.	16.8	24.9	16.0	656	482	562
2	16.3	12.9	13.4	657	—	575
3	15.4	9 50.1	12.8	660	565	578
4	14.9	10 19.2	11.6	656	—	582
5	14.3	9 47.1	12.3	654	—	583
6	14.2	53.9	11.5	646	235	585
7	13.7	10 11.6	11.6	652	215	589
8	13.0	9 21.1	10.9	650	510	596
9	12.3	56.5	9.1	648	395	592
10	8.1	10 7.8	10.5	669	430	588
11	11.9	11.1	10.4	678	477	600
Mitternacht	11.5	9 52.6	11.0	656	495	601
Tagesmittel	10 12.5	10 7.1	10 9.6	0.20 654	0.20 537	0.20 567
Maximum	10 17.6	11 2.3	10 22.5	691	730 [1]	655
Minimum	10 4.0	9 20.1	9 33.6	640	200	500
Differenz	0 13.6	1 42.2	0 48.9	0.00 051	0.00 530 [1]	0.00 155

Am 30. Oktober weicht sowohl der Tageswert in den beiden Koordinaten nur wenig von seinem wahren Wert ab, als auch sind die Variationen nur wenig grösser als normal. Dagegen nimmt die Deklination und insbesondere die Horizontalintensität am 31. Oktober ganz bedeutend ab und bleibt auch im Mittel des Tages weit unter dem Normalwert. Diese Verminderung der Horizontalintensität hält auch noch während des ganzen 1. Novembers an und gleicht sich erst später wieder aus. Im Gegensatz hierzu hat die Vertikalkraft während der Störung zugenommen, so dass also die Totalintensität wenig verändert erscheint.

[1]) Wahrscheinlich zu klein.

Um wie viel stärker als in anderen Zeiten die tägliche Bewegung am 31. Oktober gewesen ist, erkennt man am besten aus einer Vergleichung mit den grössten Tagesamplituden, wie sie in den letzten vier Jahren, von 1899 bis 1902, beobachtet worden sind. Es waren nämlich die vier Maximalwerte in Deklination 39', 29', 28' und 30' und in Horizontalintensität 192, 227, 114 und 98 γ, blieben also um das Zwei- bis Dreifache hinter den dieses Mal beobachteten Amplituden zurück.

Wie schon oben bemerkt, treten magnetische Stürme von solcher Heftigkeit nur selten auf. Nach Durchsicht der älteren Beobachtungsreihen Lamonts sind in den Jahren 1847, 1859, 1872 und 1882 besonders grosse Störungen verzeichnet worden. Freilich ist dabei daran zu erinnern, dass ausser in den Jahren 1840—46 nur jeweilen tagsüber stündlich direkte Ablesungen gemacht worden sind. Bemerkte man dabei eine Störung, so wurde sie gewöhnlich eine Zeitlang verfolgt. In den genannten ersten 6 Jahren dagegen ist Tag und Nacht stündlich beobachtet worden, aber niemals eine derartige grosse Störung aufgetreten. Erst am 24. September und am 23. Oktober 1847 stieg die Tagesamplitude auf 82'. In den 70er und 80er Jahren sind keine grösseren Amplituden als 1^{0} notiert worden. Im Jahre 1892, das ebenfalls ein Maximaljahr der Variation war, ist der magnetische Dienst in München unterbrochen gewesen. Doch ist der Sturm vom 13./14. Februar dieses Jahres nach den Greenwicher Aufzeichnungen nicht so heftig wie dieses Mal gewesen. Ebenso blieben die anderen grossen Stürme hinter dem letzten zurück, mit Ausnahme eines im Jahre 1859 beobachteten. Nach den englischen Registrierbeobachtungen kommt dazu noch derjenige vom 17. November 1882, der aber in München mangels registrierender Instrumente nicht verfolgt worden ist.

Am 29. August 1859 bemerkte Lamont zu den Morgenbeobachtungen um 7^{h}: „Grosse Störung, gestern Abend schönes Nordlicht.“ Er machte dann mehrfach in den Zwischenzeiten Ablesungen, nach welchen aber die Störungsbeträge sich in mässigen Grenzen hielten. Erst am 2. September, als er vor-

mittags 7^h M. O. Z. Ablesungen machen wollte, fand er die Nadeln in einer solchen Unruhe, dass er zunächst keine Ablesungen machen konnte. Die ersten Aufzeichnungen gelangen erst um 8^h 39^m und wurden dann, mit nur kurzen Unterbrechungen, fast minutenweise bis abends 6^h fortgesetzt, zu welcher Zeit aber die Unruhe bereits ziemlich nachgelassen hatte. Am 3. September waren die erdmagnetischen Elemente noch gestört, aber die Bewegungen waren langsamer und stetiger geworden. Die grösste Oszillation hat Lamont um 1^h 36^m beobachtet, wo die Deklination in 2^m um 37′ abnahm, um in der nächsten Minute wieder um 22′ zuzunehmen. Die grösste beobachtete Tagesamplitude betrug 1°40′, also nahe ebensoviel, wie sie am 31. Oktober dieses Jahres gewesen ist. Die beigegebene Kurve, welche nach den Ablesungen gezeichnet ist, gibt ein deutliches Bild über den Verlauf dieser interessanten Störung, die noch durch den damals einzigen vorhandenen, photographisch registrierenden Magnetographen in Kew ergänzt werden. Nach diesen begann die Störung bereits am 1. September abends $11^1/_4{}^h$ Greenwicher Zeit.

In Horizontalintensität hat Lamont nur 200 γ beobachtet, wobei aber zu berücksichtigen ist, dass gerade von diesem Element weniger Ablesungen vorhanden sind als bei der Deklination, was offenbar darauf zurückzuführen ist, dass die Bewegungen zu rasch waren, um fortwährend abgelesen werden zu können; möglicherweise fiel auch das Bild der Skala zeitenweise ausserhalb des Fernrohrs.

Die Gesamtbewegung der Inklination ist an diesem Tage mehr als $^1/_2{}^0$ gewesen.

Zur gleichen Zeit mit dieser grossen magnetischen Störung sind besonders helle und lebhafte Polarlichter beobachtet worden und zwar vom 28. August bis 3. September 1859, sowohl auf der nördlichen als auch auf der südlichen Halbkugel bis in die subtropischen Regionen hinein. Wenn nun auch die Beziehungen zwischen diesen beiden Phänomenen nicht ganz geklärt sind, so steht doch fest, dass gleichzeitig mit ausser-

gewöhnlichen Polarlichterscheinungen auch erdmagnetische Störungen auftreten.

Auch am 31. Oktober 1903 ist dieses der Fall gewesen und liegen trotz des vielfach trüben Wetters, das zu dieser Zeit in Europa herrschte, mehrfach Nordlichtbeobachtungen vor. So hat Plassmann in Münster i. W. ein Nordlicht mit Strahlenbildung bei hellem Mondschein gesehen; das nämliche wird aus Holstein, O'Gyalla in Ungarn, aus Frankreich, Holland, Irland und Schottland berichtet. In Nordamerika, besonders im Staate New-York, trat die Erscheinung glänzend auf und auch aus Australien liegt die Nachricht vor, dass ein prachtvolles Südlicht gesehen worden ist.

Erfahrungsgemäss hängen die grossen magnetischen Ausschläge mit der Strahlenbildung bei den Nordlichtern zusammen; so beobachtete Plassmann um $7^h\ 48{,}8^m$ M. E. Z. in Münster einen besonders hellen Streifen, der mit der letzten grossen Oszillation unseres magnetischen Ungewitters zeitlich zusammenfällt. Nach diesem nahm das Nordlicht, ebenso wie die magnetische Störung rasch ab.

Noch ist auf die Beziehungen mit dem Verlauf der Sonnenfleckenperiode hinzuweisen, wonach die Variationen des Erdmagnetismus den grössten Wert zu der Zeit erreichen, in welcher die Sonnenflecken am häufigsten, den kleinsten Wert, wenn sie am seltensten sind. Wie eingangs erwähnt, hat sich der Eintritt des Minimums in der Periode der Variationsänderungen dieses Mal stark verzögert; das nämliche fand auch bei den Sonnenflecken statt. Dagegen traten in diesem Jahre häufig grosse und ausgedehnte Sonnenfleckengruppen auf und gerade am 31. Oktober passierte eine grosse und lebhafte Fleckengruppe mit weitausgedehntem Fackelbezirk den Zentralmeridian der Sonne. Schon mehrfach ist auf ein solches gleichzeitiges Eintreffen zwischen Meridiandurchgang von Sonnenflecken, Polarlichtern und erdmagnetischen Störungen hingewiesen worden, wovon man sich in den letzten Monaten wieder mehrfach überzeugen konnte. So hatte die ganz ausser-

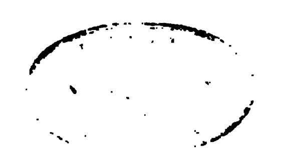
gewöhnlich grosse Sonnenfleckengruppe, welche am 4. Oktober am östlichen Sonnenrand erschienen war und einen Flächenraum von 2400 Millionstel der sichtbaren Sonnenoberfläche bedeckte, bei ihrem Durchgang durch den Zentralmeridian eine magnetische Störung im Gefolge; dieselbe Erscheinung ist bei ihrem zweiten und dritten Durchgang Mitte November und Mitte Dezember beobachtet worden.

Freilich kann man auch öfter selbst grössere Flecken in der Mitte der Sonne beobachten, ohne dass sie von magnetischen Störungen begleitet sind, weshalb man dabei auch noch die Fackel- und Protuberanztätigkeit in Betracht zu ziehen hat. Es scheinen besonders die grossen Ausbrüche, die sich durch Lichtbrücken in den Fleckengruppen bemerklich machen, wobei die C-Linie des Wasserstoffs im Spektrum hell, stark verbreitert und gekrümmt erscheint, bei den magnetischen Störungen eine hervorragende Rolle zu spielen, wie solche auch bei der in Frage kommenden Fleckengruppe am 31. Oktober beobachtet worden sind.

Mit ganz besonderer Heftigkeit sind auch dieses Mal die Erdströme aufgetreten, wodurch der Telegraphenbetrieb auf der ganzen Erde beeinträchtigt worden ist. Von München aus sind namentlich die Kabellinien stärker gestört gewesen, wie die Luftleitungen. Die stärksten Ströme traten in den Nord-Südlinien auf, während sie in ost-westlicher Richtung viel schwächer waren oder gar nicht bemerkt worden sind. Dieselbe Erscheinung ist auch in England, Frankreich, Spanien und anderen Ländern wahrgenommen worden, wie z. B. das Kabel von Paris über Brest nach Cape Codde, nördlich von New-York, das also in der Ost-Westrichtung liegt, während des ganzen Sturmes immer in Dienst bleiben konnte. Die anderen grossen Kabel, die in andere Himmelsrichtungen gehen, wie das von Emden nach Vigo und weiter nach den Kanarischen Inseln, ferner die Kabel von England nach Mittel- und Süd-Amerika u. s. w., waren während der Störungszeit alle mehr oder minder lange Zeit unbrauchbar. In den Vereinigten Staaten sind hinwiederum die langen Landkabel beeinträchtigt

gewesen, ja in New-York traten sogar in den Telephonleitungen starke Erdströme auf.

Der Einfluss der Erdströme auf die Telegraphenleitungen ist zuerst im Jahre 1859, gelegentlich des oben beschriebenen magnetischen Ungewitters, bemerkt worden. Diese waren damals so heftig, dass mehrfach Apparate verbrannten und Telegraphenbedienstete verletzt worden sind. Dank der seither gemachten Fortschritte ist jedoch ausser einer zeitweisen Unterbrechung des Dienstes bei einiger Vorsicht keine weitere Gefahr mehr zu befürchten. Auch kann man den Einfluss dieser aussergewöhnlichen Erdströme meist heben, so durch Verbindung zweier Strecken zu einer Schleife oder durch Einschalten von Kondensatoren u. dgl.





Über die universellen Schwingungen eines Kreisringes.

Von **Siegfried Guggenheimer.**

(Eingelaufen 6. Februar.)

Seit C. Neumann im Jahre 1864 seine „Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe“ [1]) veröffentlichte, ist der Ring Gegenstand mannigfacher mathematischer Untersuchungen geworden. Der grössere Teil dieser Arbeiten beschäftigt sich mit den Attraktions- resp. Potentialproblemen eines Ringes von kreisförmigem oder elliptischem Querschnitt, sei es im ruhenden Zustande oder bei seiner Bewegung in einer inkompressiblen Flüssigkeit. Hierher gehören die Arbeiten von Gödecker,[2]) Hicks,[3]) Lindskog,[4]) Halphen,[5]) Züge,[6]) Hübschmann,[7]) Basset,[8]) Gegenbauer,[9]) Dyson[10]) und Dixon.[11]) Ein kleinerer Teil von Arbeiten beschäftigt sich mit den Schwingungen eines Ringes, welche den akustischen entsprechen. Die erste Arbeit auf diesem Gebiete lieferte Hoppe,[12]) dem Arbeiten von Michell[13]) und Love[14]) folgten.

---

1) Halle 1864. 2) Göttingen 1879. Im Wesentlichen eine Ausführung eines Riemann'schen Planes. (S. Riemanns Werke S. 431.)

3) Phil. Trans. A. 179, S. 609, 1882. 4) Universität Upsala 1885.

5) C. R. 103, S. 363, 1886. 6) J. f. Math. 184, S. 89, 1888. Progr. Gym. Lingen 1889. 7) Prog. Gym. Chemnitz 1889.

8) Americ. J. of Math. 11. S. 172. 9) Wien. Ber. 100, S. 745, 1891.

10) Phil. Trans. A. 184, S. 43 und S. 1014, 1893.

11) Proc. Lond. Math. Soc. 28, S. 439, 1897.

12) Crelle's Journal 73, S. 158, 1871. 13) Messenger of Mathematics, 19, 1889. 14) Proc. of Lond. Math. Society, 24, S. 18, 1893. Siehe auch Love, Treatise on Elasticity, Kap. 13; auch Rayleigh, Sound I. S. 383.

Es soll die Aufgabe dieser Arbeit sein, die Eigenschwingungen eines schwach kompressiblen Kreisringes in einem inkompressiblen Medium zu finden, also die universellen Schwingungen eines Kreisringes, wie sie die Berechnungsweise von A. Korn[1]) ergibt. Diese Untersuchung hat wegen einer vielleicht möglichen späteren Anwendung derselben auf die Theorie des Saturnringes ein besonderes Interesse.

Wir betrachten mit Korn ein System von schwach kompressiblen Teilchen in einer unendlichen inkompressiblen Flüssigkeit. Damit eine Schwingung der Form

$$u = U \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad v = V \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad w = W \sin \frac{t}{T} 2\pi$$

möglich ist, muss, nach den Grundgesetzen der Hydrodynamik, ein Schwingungspotential Φ vorhanden sein, so dass

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

und Φ den Gleichungen genügt

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{im Aussenraum,}$$
$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad \text{im Innenraum.}$$

Bezüglich der Beweise für die Existenztheoreme der universellen Funktion Φ und deren Eigenschaften verweise ich auf die zitierten Abhandlungen von A. Korn.

Der Radius des Polarkreises des zu betrachtenden Ringes sei $= a$, und wir nehmen an, dass die Kompressibilität des Ringes umgekehrt proportional ist dem Quadrate seines Abstandes von der Rotationsachse, da, wie wir später sehen werden, durch diese Annahme die Rechnung wesentlich vereinfacht und für sehr dünne Ringe das Problem in erster

[1]) Korn: Eine Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen. Berlin, Dümmler, 1901. Derselbe: Le probleme mathematique des vibrations universelles. Bull. de la Soc. math. de Charkow. Charkow 1903. Les vibrations universelles de la metière. Ann. de l'école norm. sup. (3). 20. 1903.

Annäherung nicht verändert wird.[1]) Wir haben daher die Aufgabe zu lösen, eine Funktion Φ zu finden, die im Innenraum der Gleichung:

$$\Delta \Phi + \frac{a^2 k^2}{\eta^2} \Phi = 0, \tag{1}$$

im Aussenraume der Gleichung:

$$\Delta \Phi = 0 \tag{2}$$

genügt, und für die an der Grenze gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \Phi_a, \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} &= \frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu}, \end{aligned} \tag{3}$$

wenn ν die Richtung der äusseren Normalen auf die Trennungsfläche vorstellt.

Dazu beschreiten wir zunächst einen Weg, der von C. Neumann angegeben worden ist.[2])

An Stelle der Koordinaten $x\,y\,z$ werden die Parameter dreier orthogonaler Flächensysteme eingeführt, von denen zwei Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Achse sind, während das dritte durch die Meridianebenen dieser Rotationsflächen dargestellt wird.

Die X-Achse sei die Rotationsachse, und die YZ-Ebene sei die Aquatorebene.

Wir führen die nämlichen Bezeichnungen ein, wie Neumann, nur dass wir für den Winkel, den eine beliebige Meridianebene mit der festen XY-Ebene bildet, zur Vermeidung von Verwechslungen mit unserer universellen Funktion Φ das Zeichen ψ setzen.

In jeder Meridianebene sei eine Achse ξ, die mit der Rotations- d. h. X-Achse zusammenfällt, und eine andere

---

[1]) Wenn nämlich a der Radius des Polarkreises ist, wird $\frac{a^2}{\eta^2}$ in 1. Annäherung für das Ringinnere konstant $= 1$ sein.

[2]) C. Neumann: Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ring. Halle 1864.

Achse η, die in der Aquatorebene liegt. Jede Meridianebene sei auf der einen Seite von der Rotationsachse begrenzt. Soll die Ebene alle Stellen des Raumes durchlaufen, so muss ψ von 0^0 bis 360^0 wachsen. ξ erstreckt sich von $-\infty$ bis $+\infty$, η nur von 0 bis $+\infty$, und wir haben

$$x = \xi,$$
$$y = \eta \cos \psi,$$
$$z = \eta \sin \psi.$$

Zwischen ξ, η und zwei andern Variabeln ϑ, ω bestehe die Beziehung:

$$\xi + i\eta = f(\vartheta + i\omega), \tag{4}$$

die auch dargestellt werden kann durch

$$\xi = f(\vartheta, \omega), \quad \eta = \chi(\vartheta, \omega) \tag{5a}$$

oder

$$\vartheta = \mathfrak{F}(\xi, \eta), \quad \omega = X(\xi, \eta). \tag{5b}$$

Aus Gleichung (4) ergibt sich:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \eta}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \omega} = -\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta}, \tag{6a}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \frac{\partial \omega}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = -\frac{\partial \omega}{\partial \xi}, \tag{6b}$$

also auch:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0; \tag{7}$$

die Gleichungen (5^a) und (5^b) stellen also zwei orthogonale Kurvensysteme in den Meridianebenen dar, falls für ϑ, ω beliebige Konstanten gesetzt werden. Die x, y, z lassen sich also darstellen durch

$$\begin{aligned} x &= f(\vartheta, \omega), \\ y &= \chi(\vartheta, \omega)\cos\psi, \\ z &= \chi(\vartheta, \omega)\sin\psi. \end{aligned} \tag{8}$$

Setzt man

$$(9) \qquad \left(\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \omega}\right)^2 = \varrho,$$

so ergibt eine einfache Rechnung:

$$(10) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \varrho\,(d\vartheta^2 + d\omega^2) + \eta^2\, d\psi^2.$$

Ist nun Φ eine Funktion in x, y, z und transformiert man

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

nach Jacobi auf die dreifach orthogonalen Koordinaten ϑ, ω, ψ, so ergibt sich:

$$(11) \qquad \varrho \eta \Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right) + \frac{\varrho}{\eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2},$$

und schliesslich nach einigen einfachen Umformungen für den Aussenraum:

$$(12) \quad \varrho \sqrt{\eta}\, \Delta \varphi = \frac{\partial^2 (\varphi \sqrt{\eta})}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 (\varphi \sqrt{\eta})}{\partial \omega^2} + \frac{\varrho}{\eta^2}\left[\frac{\partial^2 (\varphi \sqrt{\eta})}{\partial \psi^2} + \frac{\varphi \sqrt{\eta}}{4}\right] = 0,$$

und für den Innenraum:

$$(13) \qquad \varrho \sqrt{\eta}\left[\Delta \varphi + \frac{a^2 k^2}{\eta^2}\varphi\right]$$

$$= \frac{\partial^2 (\varphi \sqrt{\eta})}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 (\varphi \sqrt{\eta})}{\partial \omega^2} + \frac{\varrho}{\eta^2}\left[\frac{\partial^2 (\varphi \sqrt{\eta})}{\partial \varphi^2} + \frac{\varphi \sqrt{\eta}\,[1 + 4 a^2 k^2]}{4}\right] = 0.$$

Es handelt sich jetzt darum, diese allgemeinen dreifach orthogonalen Koordinaten derart zu spezialisieren, dass sie besonders zur Lösung des Problems der Ringfläche geeignet sind. Wir wählen mit Neumann die Gleichung (4) folgendermassen:

$$(14) \qquad \eta + i\xi = + a\,\frac{1 + \lambda e^{-i\omega}}{1 - \lambda e^{-i\omega}}$$

$$(\lambda = e^{-\vartheta}),$$

dann haben λ und ω die folgende Bedeutung:

Die Flächen $\lambda =$ Konst. stellen ein System von ineinander geschachtelten Ringflächen dar, nämlich ein System von Ringflächen, deren Meridiankurven aus ineinander geschachtelten Kreisen bestehen. Der Wert von λ sei stets ein echter Bruch.

Fig. 1.

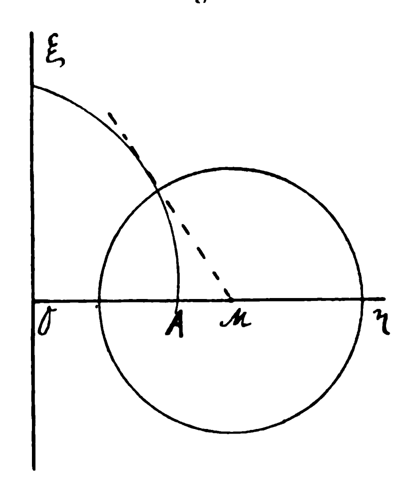
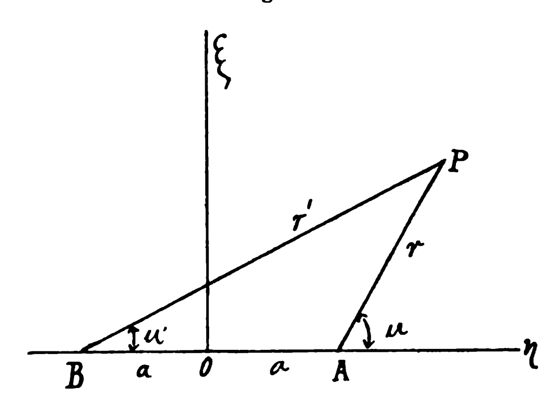


Fig. 2.



($\lambda = \frac{r}{r'}$; siehe Figur 2). λ variiert zwischen den Werten 0 und 1. Die innerste Ringfläche wird dargestellt durch $\lambda = 0$

und stellt den Polarkreis dar; die äusserste durch $\lambda = 1$ und fällt mit der Rotationsachse zusammen. Die Flächen $\lambda =$ Konstans schneiden das System von Bogen resp. Kugelkalotten $\omega =$ Konst. stets orthogonal. ($\omega = u - u'$). Diese Kugelkalotten werden sämtlich vom Polarkreis eingerandet. Die Werte von ω variieren zwischen 0 und 2π. Unter ω sei der Winkel ABP selber oder seine Ergänzung zu 2π verstanden. Für alle Punkte oberhalb AB variiere ω von 0 bis π; für alle Punkte unterhalb AB von π bis 2π.

Die Gleichungen $\psi =$ Konst. stellen das System der Meridianebenen dar. ψ variiert ebenfalls von 0 bis 2π.

Durch Sonderung des Reellen und Imaginären erhält man aus Gleichung (14) ξ und η wie folgt:

$$(15) \qquad \begin{cases} \xi = a \dfrac{2\lambda \sin\omega}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}, \\[2ex] \eta = a \dfrac{1-\lambda^2}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}; \end{cases}$$

x, y, z lassen sich durch diese neuen Koordinaten folgendermassen ausdrücken:

$$(16) \qquad \begin{cases} x = a \dfrac{2\lambda \sin\omega}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}, \\[2ex] y = a \dfrac{(1-\lambda^2)\cos\psi}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}, \\[2ex] z = a \dfrac{(1-\lambda^2)\sin\psi}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}. \end{cases}$$

Für $dx^2 + dy^2 + dz^2$ ergibt sich:

$$(17) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{4a^2\lambda^2(d\vartheta^2 + d\omega^2) + a^2(1-\lambda^2)d\psi^2}{(1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2)^2},$$

und weil

$$\vartheta = \log\frac{1}{\lambda}$$

gesetzt wurde

$$(18) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{(2a\,d\lambda)^2 + (2a\lambda\,d\omega)^2 + (a(1-\lambda^2)d\psi)^2}{(1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2)^2},$$

und schliesslich erhalten wir für den Innenraum des Ringes die Gleichung:

$$\varrho\sqrt{\eta}\left[\varDelta\varphi+\frac{a^2k^2}{\eta^2}\varphi\right] \tag{19}$$

$$=\frac{\partial^2\varphi\sqrt{\eta}}{(\partial\log\lambda)^2}+\frac{\partial^2\varphi\sqrt{\eta}}{\partial\omega^2}+\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2\left[\frac{\partial^2\varphi\sqrt{\eta}}{\partial\psi^2}+\frac{\varphi\sqrt{\eta}(1+4a^2k^2)}{4}\right]=0,$$

und für den Aussenraum:

$$\varrho\sqrt{\eta}\varDelta\varphi=\frac{\partial^2\varphi\sqrt{\eta}}{(\partial\log\lambda)^2}+\frac{\partial^2\varphi\sqrt{\eta}}{\partial\omega^2}+\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2\left(\frac{\partial^2\varphi\sqrt{\eta}}{\partial\psi^2}+\frac{\varphi\sqrt{\eta}}{4}\right)=0, \tag{20}$$

wo

$$\varrho=\left(\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)^2=\frac{4a^2\lambda^2}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^2}. \tag{21}$$

Wir setzen nun:

$$\varPhi\sqrt{\eta}=\sqrt{1-\lambda^2}\sum_p\sum_q(F_p^q\cos p\,\omega\cos q\,\psi), \tag{22}$$

wo die F_p^q nur Funktionen von λ sind. Dass eine derartige Reihenentwicklung möglich ist, resp. dass diese Reihen konvergent sind, geht aus den von Korn loc. cit. bewiesenen Existenztheoremen für die universellen Funktionen[1] $\varPhi$ hervor. Setzen wir den Wert von $\varPhi$ aus (22) in (19) und (20) ein, so ergeben sich für die F_p^q die folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{d^2\sqrt{1-\lambda^2}F}{(d\log\lambda)^2}=p^2F+(4q^2-4a^2k^2-1)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2F \tag{23}$$

im Innenraum,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{d^2\sqrt{1-\lambda^2}F}{(d\log\lambda)^2}=p^2F+(4q^2-1)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2F \tag{24}$$

im Aussenraum.

Der Beweis ergibt sich aus Neumann S. 21, wenn wir statt $\varPhi\sqrt{\eta}=\chi\sqrt{1-\lambda^2}$ setzen, und unsere Bedingung für den

---

[1]) Und zwar, weil bewiesen ist, dass diese Funktionen im ganzen Raume mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind.

Innenraum beachten. Die Lösungen, die brauchbar sind, werden (Neumann loc. cit. S. 32)

für den Innenraum:

$$F_p^q = C_i^{pq} \frac{(1-\lambda^2)^{\sqrt{q^2-a^2k^2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos p\,\Theta\, d\,\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2\sqrt{q^2-a^2k^2}+1}{2}}}, \tag{25}$$

$$= C_i^{pq}\, I_p^q;$$

für den Aussenraum:

$$F_p^q = C_a^{pq} \frac{\lambda^p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\,\Theta\, d\,\Theta}{\left(\sin\frac{2\,\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}, \tag{26}$$

wobei, wenn $I_p^{\prime q}$ resp. $A_p^{\prime q}$ die Ableitungen von I_p^q resp. A_p^q nach λ darstellen, an der Grenze unter Berücksichtigung der Gleichungen (3)

$$\left.\begin{aligned} \Phi_i &= \Phi_a, \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} &= \frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} \end{aligned}\right\} \text{ an der Ringfläche } \lambda = c$$

sein muss.

$$\begin{aligned} C_i^{pq}\, I_p^q(c) &= C_a^{pq}\, A_p^q(c), \\ C_i^{pq}\, I_p^{\prime q}(c) &= C_a^{pq}\, A_p^{\prime q}(c), \end{aligned} \tag{27}$$

dass also, wenn für bestimmte p, q die $C_{i(a)}^{pq}$ überhaupt $\neq 0$ sind, die Gleichung

$$I_p^q(c)\, A_p^{\prime q}(c) - A_p^q(c)\, I_p^{\prime q}(c) = 0 \tag{28}$$

bestehen muss.

Dann sind

$$\Phi_p^q = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} \cdot C_{pq}\, I_p^q(\lambda) \cos p\,\omega \cos q\,\psi \tag{29}$$

im Innenraum und

$$\Phi_p^q = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}}\, C_{pq} \frac{I_p^q(c)}{A_p^q(c)}\, A_p^q(\lambda) \cos p\,\omega \cos q\,\psi \tag{30}$$

im Aussenraum.

Lösungen des Problems. C_p^q ist eine beliebige Konstante.

Es werde nun die Voraussetzung eingeführt, dass c sehr klein sei.

Wir schreiben zunächst:

$$F_p^q = C_i^{pq} \frac{(1-\lambda^2)^{\sqrt{q^2 - a^2 k^2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos p\,\Theta\, d\,\Theta}{(1 - 2\lambda \cos\Theta + \lambda^2)^{\frac{2\sqrt{q^2 - a^2 k^2} + 1}{2}}}$$

$$= C_i^{pq}\, I_p^q$$

und betrachten die Grundschwingung $p = 0, q = 0$. Wir untersuchen nun das bestimmte Integral, indem wir zunächst den Ausdruck unter dem Integralzeichen nach Potenzen von λ entwickeln.

Es ist, wenn m irgend eine Zahl ist:

$$\frac{1}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^m} = (1-\lambda e^{-i\Theta})^{-m} (1-\lambda e^{i\Theta})^{-m},$$

$$(31) \qquad = 1 + 2m\lambda\cos\Theta + (m(m+1)\cos 2\Theta + m^2)\lambda^2 + \cdots, \text{[1]}$$

also, wenn man bereits Grössen vernachlässigt, die gegen $k^2 \lambda^2$ klein sind:

$$(32) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\,\Theta}{(1 - 2\lambda\cos\Theta + \lambda^2)^m} = 2\pi(1 + m^2\lambda^2),$$

wo wir

$$m = \frac{2\sqrt{-a^2 k^2} + 1}{2}$$

zu setzen haben.

Es ist also für den Innenraum bei Vernachlässigung von Grössen, die gegen $k^2 \lambda^2$ klein sind

$$(33) \qquad F_p^q = C_i^{pq} \frac{(1-\lambda^2)^{\sqrt{-a^2 k^2}}}{2\pi}\, 2\pi(1 + m^2\lambda^2).$$

Es ist also bei derselben Vernachlässigung

---

[1]) Die Reihenentwicklung ist jedenfalls möglich, wenn $m\lambda$, d. i $k\lambda$, sehr klein ist, wie sich dies später tatsächlich herausstellt.

$$I_p^q = \left[1 + \left(\frac{2\sqrt{-a^2 k^2} + 1}{2}\right)^2 \lambda^2\right] [1 - \sqrt{-a^2 k^2}\, \lambda^2],$$

oder

$$(34) \quad I_p^q = 1 + \frac{1 - 4 a^2 k^2}{4} \lambda^2.$$

Zur Bestimmung von k bedürfen wir, wie aus der oben entwickelten Determinantengleichung ersichtlich, des Wertes von $I_p'^q$. Dazu ist I_p^q nach λ zu differenzieren. Es wird

$$(35) \qquad I_p'^q = \frac{1 - 4 a^2 k^2}{2} \lambda.$$

Für den Aussenraum erhielten wir:

$$(36) \quad F_p^q = C_p^{qp} \frac{\lambda^p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\,\Theta\, d\,\Theta}{\left(\sin^2 \frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}} = C_a^{pq} A_p^q.$$

Für die Grundschwingung ist $p = 0$, $q = 0$, also

$$(37) \qquad A_p^q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\,\Theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}}}.$$

Eine direkte Auswertung des Integrals für $\lambda = 0$ ist diesmal nicht möglich, da eine solche den unbestimmten Wert $(\infty - \infty)$ liefern würde. Wir betrachten daher den Ausdruck

$$(38) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\,\Theta}{\sin^2 \frac{\Theta}{2} + \lambda^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}} \quad \text{für kleine } \lambda.$$

Wir setzen $\frac{\Theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \varphi$; dann wird

$$\cos \frac{\Theta}{2} = \sin \varphi; \quad \sin^2 \frac{\Theta}{2} = \cos^2 \varphi$$

und

$$d\,\Theta = -2\, d\,\varphi.$$

Das zwischen den Grenzen 0 und 2π genommene Integral verwandelt sich dann in das Integral

$$(39) \qquad 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-\lambda^2)\sin^2\varphi}} = 4K,$$

wo

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},$$

und

$$\varkappa^2 = 1 - \lambda^2$$

ist.

Es folgt daraus sofort für die A_p^q und $A_p^{'q}$

$$(40) \qquad A_p^q = \frac{2}{\pi} K,$$

$$(41) \qquad A_p^{'q} = \frac{2}{\pi} \frac{dK}{d\lambda}.$$

Es folgt weiter aus

$$-\lambda = \varkappa \frac{d\varkappa}{d\lambda},$$

dass

$$\frac{dK}{d\lambda} = \frac{dK}{d\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\lambda},$$

$$\frac{dK}{d\lambda} = -\frac{\lambda}{\varkappa}\frac{dK}{d\varkappa},$$

und somit

$$(41^a) \qquad A_p^{'q} = -\frac{2}{\pi}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{dK}{d\varkappa}.$$

Zur Berechnung von k fanden wir die Determinantengleichung (28):

$$I_p^{'q}(c)\; A_p^q(c) - A_p^{'q}(c)\; I_p^q(c) = 0.$$

Aus

$$\frac{I_p'^q(c)}{I_p^q(c)} = \frac{A_p'^q(c)}{A_p^q(c)}$$

folgt, wenn wir berücksichtigen, dass für die beiden elliptischen Integrale

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}}$$

und

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

die Beziehungen gelten:[1])

$$\varkappa \frac{dE}{d\varkappa} = E - K,$$

und

$$(1 - \varkappa^2) \frac{d(K - E)}{d\varkappa} = E\varkappa;$$

$$\frac{\frac{dK}{d\varkappa}}{K} = \frac{E - K(1 - \varkappa^2)}{\varkappa K(1 - \varkappa^2)},$$

$$\frac{\frac{1 - 4a^2k^2}{2}\lambda}{1 + \frac{1 - 4a^2\varkappa^2}{4}\chi^2} = \frac{-\frac{2}{\pi}\frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}\frac{dK}{d\varkappa}}{\frac{2}{\pi}K},$$

und bei Vernachlässigung von λ^2

$$\frac{1 - 4a^2k^2}{2} = -\frac{\frac{dK}{d\varkappa}}{K}. \tag{42}$$

---

[1]) Siehe z. B. Halphen, Traité des fonctions elliptiques I. S. 353.

Daraus erhalten wir also:

$$k^2 = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} \frac{\frac{dK}{d\varkappa}}{K},$$

und durch Einsetzen des Wertes von $\frac{\frac{dK}{d\varkappa}}{K}$:

$$k^2 = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2}\left[\frac{E}{\varkappa(1-\varkappa^2)K} - \frac{1}{\varkappa}\right],$$

$$(43) \qquad = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2}\left[\frac{E}{\varkappa\lambda^2 K} - \frac{1}{\varkappa}\right].$$

Nun gilt aber:

$$\lim_{\varkappa=1} E = 1.$$

Also wird in erster Annäherung:

$$k^2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2 K}$$ [1]

und für $\lambda = c$:

$$(44) \qquad k^2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{K_c \cdot c^2},$$

wo

$$K_c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-c^2)\sin^2\varphi}}.$$

Sei beispielsweise:

$$c = \frac{1}{50},$$

also

$$c^2 = \frac{1}{2500},$$

und bei Vernachlässigung von c^4 u. s. w.

---

[1] K wird ∞ von der Art $\log \lambda$, wenn λ zu 0 abnimmt.

$$\varkappa = 1 - \frac{1}{5000}$$

$$= 0{,}9998$$

und

$$\arcsin \varkappa = 88^{0}\, 51'\, 10''.$$

Daraus ergibt sich K[1]) = ungefähr 5,33301 und

$$k^2 = \frac{1}{2\,a^2} \cdot \frac{2500}{5{,}33301}$$

$$k = \frac{50}{a} \sqrt{\frac{1}{10{,}66602}}. \tag{45}$$

Für $a = 1$, wird $k^2\, c^2$ sehr nahe $= \frac{1}{10}$.

Es ist nun noch unsere Aufgabe, die gefundenen Werte für die I_p^q und A_p^q in den Ausdruck einzusetzen, der für die Funktion Φ aufgestellt wurde. Wir fanden

$$\Phi \sqrt{\eta} = \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_p \sum_q (F_p^q \cos p\, \omega \cos q\, \psi).$$

Daraus ergibt sich der Wert von Φ_i für die Grundschwingung folgendermassen:

Wir fanden für die F_0^0, d. h. für die I_p^q in Gl. (34)

$$F_0^0 = C_0\, I_0^0 = C_0 \left(1 + \frac{1 - 4\, a^2\, k^2}{4}\, \lambda^2\right).$$

Nun ist aber

$$\Phi_i = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\sqrt{\eta}}\, F_0^0 = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\sqrt{\eta}}\, C_0 \left[1 + \frac{1 - 4\, a^2\, k^2}{4}\, \lambda^2\right]. \tag{46}$$

Um nun über die Bewegung des Ringes an seiner Oberfläche, d. h. über seine Eigenschwingung Aufschluss zu erhalten, haben wir für $\lambda = c$ $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$ und $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \sigma}$ zu bilden, wenn wir unter ν die Richtung der äusseren Normalen verstehen, und unter σ

[1]) Siehe z. B. Fricke, Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen, S. 279.

die zu ν in den einzelnen Meridianebenen senkrechte Richtung verstehen.

Es ist

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \nu}.$$

Für $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda}$ ergibt sich:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda} = -2 \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} C_0 a^2 k^2 \lambda = -2 C_0 a^{\frac{3}{2}} k^2 c,$$

bei Vernachlässigung von Grössen die klein sind gegen $C_0 k^2 c$.

Für $\frac{\partial \lambda}{\partial \nu}$ ergibt sich (siehe Neumann l. c. S. 14)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = \frac{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}{2a},$$

somit

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{2a} = -C_0 a^{\frac{1}{2}} k^2 c. \tag{47}$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma}.$$

Für $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}$ ergibt sich nach (46):

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \omega} = C_0 \left[\frac{1}{\sqrt{\eta}} \frac{(-\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} - \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{\eta^3}} 2\lambda \sin \omega \right],$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = \frac{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}{2a\lambda}. \quad \text{(Neumann l. c. S. 14.)}$$

Somit

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \sigma} = \frac{C_0}{2} \left(\frac{1 - \sin \omega}{\sqrt{a^3}} \right). \tag{48}$$

Da $k c$ ausserordentlich gross ist gegen 1 $\left(\text{von der Ordnung } \frac{1}{K_c \cdot c}\right)$, so zeigt sich, dass das Wesentliche der Schwingung eine Pulsation ist.

Führen wir für die willkürliche Konstante C_0 eine andere willkürliche Konstante a ein durch die Substitution:

$$\pi\, a\, C_0 = K_c\, a = \frac{a}{2\, a^2\, k^2\, c^2}, \tag{49}$$

so wird

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = -\frac{a}{2\, \pi\, c\, a^2}, \quad \int\limits_{\text{über die Ringfl.}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\, d\, \omega = -4\, \pi\, a. \tag{50}$$

Betrachten wir nun irgend einen Punkt P, der von irgend einem Punkte des Ringes oder vom Mittelpunkte des Ringes durch die grosse Entfernung R getrennt ist.

Die Potentialfunktion der Fläche in Bezug auf diesen Punkt wird nun dargestellt durch

$$\Phi = -\frac{1}{4\, \pi\, R} \int\limits_{\omega} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\, d\, \omega,$$ [1])

wenn $d\, \omega$ ein Oberflächenelement der Oberfläche bedeutet, über die das Integral zu nehmen ist.

Es wird

$$\Phi = -\frac{1}{4\, \pi\, R} \int \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\, d\, \omega = \frac{a}{R},$$

d. h. einem in der grossen Entfernung R vom Ringe befindlichen Punkt P gegenüber verhält sich der Ring wie eine pulsierende Kugel.

[1]) In der Formel

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \frac{d\, \omega}{r} + \frac{1}{4\, \pi} \int\limits_{\omega} \Phi \frac{\cos r\, \nu}{r^2}\, d\, \omega$$

kann das zweite Glied für grosse r gegen das erste vernachlässigt werden.

Über Chinondiimid.

Von **Richard Willstätter** und **Eugen Mayer.**

(*Eingelaufen 6. Februar.*)

Die Muttersubstanz grosser Farbstoffklassen, namentlich der Indamine, Azine, Thiazine und Oxazine, ist das Chinondiimid, dessen Eigenschaften und Reaktionen Interesse auch insoferne verdienen, als die chinoide Theorie noch andere Farbstofftypen wie die der Triphenylmethanreihe auf die Atomgruppierung der Chinonimide zurückführt.

Obwohl es an Versuchen zur Darstellung des Chinondiimids nicht gefehlt hat, wie sie z. B. durch die Abhandlungen von E. v. Bandrowski[1]) bekannt geworden sind, ist die Verbindung bisher hypothetisch geblieben, während einige Abkömmlinge derselben leicht zugänglich sind, einmal die Chinonanile, dann das bei der Einwirkung von Chlorkalk auf die saure Lösung von p-Phenylendiamin entstehende Chinondichlordiimid.

Dieses Imidchlorid sollte sich durch Reduktion in das Imid überführen lassen; doch hat A. Krause[2]) schon im Jahre 1879 gezeigt, dass man bei diesem Prozess stets nur zum p-Phenylendiamin gelangt, und auch zahlreiche eigene Versuche mit fast allen bekannten Reduktionsmitteln sahen wir daran scheitern,

---

[1]) E. v. Bandrowski, Monatshefte für Chemie 10, 123 und Berichte der Deutschen chemischen Gesellschaft 27, 480.

[2]) A. Krause, Berichte der Deutschen chemischen Gesellschaft 12, 47.

dass das Chinonimid ebenso leicht zum Diamin reduziert als es andererseits in Chinon und Ammoniak gespalten wird.

Endlich ist uns die beabsichtigte Reduktion des Dichlordiimids durch Behandlung desselben in ätherischer Lösung mit der berechneten Menge (4 Mol.) Chlorwasserstoff gelungen; während Chlor teils frei auftritt teils vom Äther verzehrt wird, fällt dabei das Dichlorhydrat des Chinondiimids als schwach gelbliches, mikrokrystallinisches Pulver aus. P. Ehrlich und G. Cohn[1]) scheinen dasselbe schon in Händen gehabt zu haben, doch sprachen sie ihr Reaktionsprodukt als ein Trichlorphenylendiamin an.

Die eigentümliche Wirkung des Salzsäuregases erklärt sich, wenn man annimmt, dass das Imidchlorid zunächst Chlorwasserstoff am Stickstoff addiert und dass weiterhin das Paar negativer Atome vom Stickstoff, der es nicht fest zu binden vermag, wegfällt, wie es die folgenden Formeln veranschaulichen:

```
  Cl                 Cl Cl H                             H H Cl
  |                   \ | /                               \ | /
  N                     N                   NH              N
  ‖                     ‖                   ‖
 / \    + 2 HCl        / \                 / \   + 2 HCl   / \
 | |   -------->       | |   --> 2 Cl2 +   | |  -------->  | |
 \ /                   \ /                 \ /             \ /
  ‖                     ‖                   ‖
  N                     N                   NH              N
  |                   / | \                               / | \
  Cl                 Cl Cl H                             H H Cl
```

Das salzsaure Salz liefert weiterhin das Chinondiimid selbst, wenn man es unter vollkommenem Ausschluss von Feuchtigkeit in alkoholfreiem Äther suspendiert und mit Ammoniakgas behandelt. So leicht es war, ätherische Lösungen des Imids zu bereiten (schon vor mehr als einem Jahre waren die Versuche, an denen Herr Dr. Rudolf Lessing sich damals beteiligte, so weit gediehen), so erhebliche Schwierigkeiten bot die Isolierung

[1]) P. Ehrlich und G. Cohn, Berichte der Deutschen chemischen Gesellschaft 26, 1756.

des reinen, krystallisierten Diimids. Sind nämlich der Substanz Verunreinigungen beigemengt, so verpuffen die Krystalle nach der Trennung von der ätherischen Mutterlauge augenblicklich und namentlich an Sommertagen tritt diese Umwandlung mit explosionsartiger Heftigkeit ein. Eine metallisch glänzende schwarze Masse hinterbleibt bei dieser Veränderung, die im wesentlichen ein Polymerisationsvorgang ist.

Das zur Reinigung wiederholt aus Äther oder Benzol umkrystallisierte Chinondiimid bildet hellgelbe Nadeln und längliche Täfelchen; seine Zusammensetzung wurde durch die Analyse, die angenommene Molekulargrösse durch die Bestimmung der Siedepunktserhöhung seiner Lösungen in Äther sowie in Aceton bestätigt. Die reine Substanz ist von leidlicher Beständigkeit; sie verpufft niemals (ausser beim Betupfen mit konzentrierter Schwefelsäure), sondern färbt sich beim Aufbewahren rasch ockerähnlich, dann dunkelbraun und verwandelt sich langsam in unlösliche, höher molekulare Produkte. Sehr merkwürdig ist das Verhalten des Chinondiimids gegen Wasser (und ähnlich gegen Alkohole), es löst sich darin leicht mit hellgelber Farbe auf, die Lösung wird bald dunkel und scheidet quantitativ ein Polymerisationsprodukt aus, das die grösste Ähnlichkeit zeigt mit dem von Bandrowski durch Oxydation von p-Phenylendiamin erhaltenen Tetraaminodiphenyl-p-azophenylen von der Formel:

$$NH_2\text{–}C_6H_3(NH_2)\text{–}N=C_6H_4=N\text{–}C_6H_3(NH_2)\text{–}NH_2$$

Bei der Reduktion mit Zinnchlorür liefert das Chinondiimid quantitativ p-Phenylendiamin, durch verdünnte Schwefelsäure wird es in der Wärme rasch in Chinon und Ammoniak zerlegt, Alkalibisulfite addiert es je nach den Bedingungen, unter Bildung von p-Phenylendiaminsulfosäure oder von p-Amino-

phenolsulfosäure. Die — übrigens fast farblosen — Lösungen des Diimids in verdünnten Mineralsäuren sind in der Kälte einige Zeit beständig; mit aromatischen Aminen und mit Phenolen geben die Imidsalze augenblicklich intensiv gefärbte Indamin- und Indophenollösungen.

Zur Zeit sind wir damit beschäftigt, die zur Gewinnung des Chinondiimids angewandte Methode auch zur Darstellung des Chinonmonoimids anzuwenden.

Über
die Nicht-Fortsetzbarkeit gewisser Potenzreihen.

Von **Georg Faber.**

(Eingelaufen 6. Februar.)

Es sei n_ν $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ eine Folge wachsender natürlicher Zahlen und es werde gesetzt:

(1) $$F(x) = \sum_0^\infty{}^\nu\, a_{n_\nu} x^{n_\nu},$$

wo:

(2) $$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[n_\nu]{|a_{n_\nu}|} = 1,$$

sodass also die Potenzreihe $F(x)$ den Konvergenzradius 1 besitzt. Nachdem man zunächst erkannt hatte, dass für gewisse spezielle Fälle (wie $n_\nu = \nu^2$, $n_\nu = 2^\nu$, $n_\nu = \nu!$) die Reihe $F(x)$ über den Einheitskreis nicht fortsetzbar ist, zeigten zuerst die Herren Hadamard und Borel, dass diese Erscheinung allemal eintritt, wenn:

(3) $$\lim_{\nu=\infty} \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_\nu} > \lambda > 0,$$ [1]

bezw. wenn

(4) $$\lim_{\nu=\infty} \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{\sqrt{n_\nu}} > \lambda > 0$$ [2]

ist, und schliesslich gelang es Herrn Fabry das gleiche nachzuweisen, wenn nur

[1] Hadamard, Journ. de Math. (4) 8 (1892).

[2] Borel, Comptes rendus de l'Acad. des Sc. vom 5. Okt. 1896.

(5) $$\lim_{\nu=\infty} n_{\nu+1} - n_\nu = \infty,$$ [1]

ja selbst unter gewissen noch allgemeineren Voraussetzungen.

Der Fabry'sche Beweis bietet durch die verwickelten Rechnungen, deren er bedarf, dem Verständnis nicht unerhebliche Schwierigkeiten. Es dürfte daher nicht unwillkommen sein, wenn ich im folgenden für die Fabry'schen Sätze einen neuen, verhältnismässig einfachen Beweis liefere, der sich lediglich auf ohnehin bekannte Hilfssätze stützt und keine umständliche Rechnung verlangt.

§ 1.

Setzt man, wie zunächst geschehen möge, statt der Beziehung (5) die engere aber (3) und (4) als einfachste Fälle umfassende

(6) $$\lim \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_\nu^\sigma} > \lambda > 0 \quad (\sigma > 0)$$

voraus, so lässt sich der Beweis besonders einfach auf die sogleich anzuführenden Hilfssätze stützen. Der Beweis der noch allgemeineren Fabry'schen Sätze folgt im § 3, während im § 2 ein einfacher Beweis der Hilfssätze II und III eingeschoben wird.

Als I. Hilfssatz erwähne ich den folgenden, der in dieser Form von Herrn Fabry, in weniger prägnanter schon von Herrn Hadamard angegeben ist, und verweise wegen des Beweises auf die in der Fussnote[2]) angeführten Stellen:

I. Hilfssatz: Der Punkt $e^{\beta i}$ ist ein singulärer oder regulärer der Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$, wo $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1$, je nachdem $\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|\varphi_n(e^{\beta i})|}$ gleich 1 oder kleiner als 1 ausfällt; dabei ist

(7) $$\varphi_n(e^{\beta i}) = a_n + \sum_0^{\lambda n}{}^\nu (C_\nu a_{n+\nu} e^{\nu\beta i} + C_{-\nu} a_{n-\nu} e^{-\nu\beta i})$$

[1]) Fabry, Ann. éc. norm. (3) 13 (1896); acta math. 22 (1898).

[2]) Hadamard und Fabry a. a. O. (s. Fussn. 1 p. 63 und 64); ein anderer Beweis findet sich in meiner Dissertation p. 19.

ein gewisses die Koeffizienten a_ν mit Indices zwischen $n(1-\lambda)$ und $n(1+\lambda)$ enthaltendes Polynom und λ eine beliebige von n unabhängige Zahl zwischen Null und 1.

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich sofort der Einheitskreis als natürliche Grenze unter der Annahme (3) (da sich für jedes β die φ_{n_ν} auf die a_{n_ν} reduzieren); und hierauf lässt sich, wie jetzt gezeigt werden soll, die weitere Voraussetzung (6) zurückführen.

Es werde, wie erlaubt ist, angenommen, dass die Grenzbedingung (6) schon von $\nu = 0$ ab gilt, also

$$\begin{aligned} n_1 - n_0 &> \lambda n_0^\sigma \\ n_2 - n_1 &> \lambda n_1^\sigma \\ &\cdots\cdots \\ n_{\nu+1} - n_\nu &> \lambda n_\nu^\sigma, \end{aligned} \tag{8}$$

woraus durch Addition folgt:

$$n_{\nu+1} > \lambda(n_0^\sigma + n_1^\sigma + \cdots + n_\nu^\sigma), \tag{9}$$

oder, da wegen der vorhandenen Lücken $n_\nu > \nu$ vorausgesetzt werden darf:

$$\begin{aligned} n_{\nu+1} &> \lambda(1^\sigma + 2^\sigma + \cdots + \nu^\sigma) \\ &> \lambda \int_0^\nu x^\sigma\, dx = \frac{\lambda}{\sigma+1}\nu^{\sigma+1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Wird nun ϱ zwischen 0 und 1 so gewählt, dass $\varrho(\sigma+1)$ um eine bestimmte Zahl δ grösser als 1 ausfällt, so folgt aus (10):

$$n_{\nu+1}^\varrho > \left(\frac{\lambda}{\sigma+1}\right)^\varrho \nu^{1+\delta}; \tag{11}$$

darnach ist die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{n_\nu^\varrho}$ konvergent.

Die ganze Funktion $G(x)$, welche die n_ν oder einen Teil derselben zu Nullstellen hat, ist demnach höchstens von der Ordnung ϱ und es besteht daher für ein beliebiges positives ε und für $r > r'$ die Ungleichung:

(12) $$| G(r e^{i\varphi}) | < e^{\varepsilon r^{\varrho}},$$

und umsomehr, da $\varrho < 1$,

(12ª) $$| G(r e^{i\varphi}) | < e^{\varepsilon r}.$$ [1]

Andererseits gilt für alle reellen $r > r''$, die von jeder Nullstelle der Funktion $G(x)$ um mindestens die Einheitsstrecke entfernt sind, und für jedes noch so kleine ε die Ungleichung:

(13) $$| G(r) | > e^{-r^{\varrho+\varepsilon}}.$$ [2]

Da $\varrho < 1$ ist, darf auch $\varrho + \varepsilon < 1$ gedacht werden.

Als Nullstellen von $G(x)$ mögen sämtliche n_ν gewählt werden mit Ausnahme einer Folge $m_1, m_2 \ldots$, die der Bedingung

(14) $$\frac{m_{\nu+1} - m_\nu}{m_\nu} > \lambda$$

genügt.

Nach (12) und (13) gelten, sobald m_ν eine gewisse Grenze übersteigt, die Ungleichungen:

$$e^{\varepsilon m_\nu^{\varrho}} > | G(m_\nu) | > e^{-m_\nu^{\varrho+\varepsilon}},$$

also, indem man überall die m_ν^{te} Wurzel nimmt:

$$e^{\frac{\varepsilon}{m_\nu^{1-\varrho}}} > \sqrt[m_\nu]{| G(m_\nu) |} > e^{-\frac{1}{m_\nu^{1-\varrho-\varepsilon}}},$$

und da hier die Exponenten von e mit wachsendem m_ν der Null zustreben:

(15) $$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[m_\nu]{| G(m_\nu) |} = 1.$$

---

[1] Poincaré, Bull. de la soc. math. de France 11 (1883). — Borel, Leçons sur les fonctions entières (Paris 1900), p. 56. — Lindelöf, acta soc. fenn., Bd. 31 (1902), p. 4. — Pringsheim, Sitzungsber. der Münch. Akad., Bd. 33 (1903), p. 111, Math. Ann. 58 (1904), p. 299 ff.

[2] Hadamard, Journ. de Math. (4) 9 (1893). — Borel, a. a. O., p. 79. — Lindelöf, a. a. O., p. 6. — Für die oben benutzte spezielle Funktion $G(x)$ lässt sich der Beweis bedeutend vereinfachen (vgl. § 3).

Nun bestehen folgende Hilfssätze:

Hilfssatz II.[1]) Genügt die ganze Funktion $G(x)$ für ein beliebiges positives ε und für $r > r'$ der Ungleichung:

$$(12^a) \qquad |G(r e^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r},$$

so hat die Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu G(\nu) x^\nu$ (d. h. die Reihe und ihre analytische Fortsetzung) keine andere singuläre Stelle als $x = 1$.

Als $G(x)$ denke man sich speziell die vorhin so bezeichnete Funktion.

Hilfssatz III.[2]) Sind α die singulären Stellen der Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ und β diejenigen der Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu$, so befinden sich die Singularitäten der Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu$ unter den Stellen $\alpha \cdot \beta$.

Wendet man diesen Satz auf die Reihen $\sum_0^\infty{}^\nu a_{n_\nu} x^{n_\nu}$ (1) und $\sum_0^\infty{}^\nu G(\nu) x^\nu$ an, so ergibt sich unter Beachtung des Hilfssatzes II, dass jede singuläre Stelle der Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu G(n_\nu) \cdot a_{n_\nu} x^{n_\nu}$, für die nach der Definition von $G(x)$ auch

$$(16) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu G(m_\nu) a_{m_\nu} x^{m_\nu}$$

geschrieben werden darf, auch eine solche der Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu a_{n_\nu} x^{n_\nu}$ ist; da infolge von (2) und (15)

$$(17) \qquad \lim \sqrt[m_\nu]{G(m_\nu) \, |a_{m_\nu}|} = 1$$

ist, hat die Reihe (16) als Konvergenzkreis den Einheitskreis; und dieser ist nach der Bestimmung der m_ν (14) und nach Hilfssatz I eine singuläre Linie für (16) und damit auch für (1).

---

[1]) Leau, Journ. de Math. (5) 5 (1899). — Faber, Math. Ann. 57 (1903), p. 374.

[2]) Hadamard, acta math. 22 (1898).

§ 2.

Die Hilfssätze II und III lassen sich, soweit sie hier angewandt wurden, in die folgende Aussage zusammenfassen:

Verhält sich die Funktion

$$F(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu \tag{18}$$

in dem den Nullpunkt enthaltenden von der rektifizierbaren Kurve C begrenzten Gebiete S, sowie auf C selber regulär, so ist in S auch die Funktion

$$F_1(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} G(\nu)\, a_\nu x^\nu \tag{19}$$

regulären Verhaltens, wenn $G(x)$ eine ganze Funktion bedeutet, die der Bedingung

$$\lim_{r=\infty} G(r\, e^{i\varphi})\, e^{-\varepsilon r} = 0 \tag{20}$$

für jedes positive ε genügt.

Dieser Satz lässt sich verhältnismässig einfach direkt beweisen: Es genügt zu zeigen, dass $F_1(x)$ in einem Gebiete S' regulär ist, das nur diejenigen Punkte von S nicht enthält, die von C einen Abstand $< \eta$ (< 1) haben. Für jedes x in S' ist

$$F^{(\varkappa)}_{(x)} = \frac{\varkappa!}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)\, dz}{(z-x)^{\varkappa+1}}, \tag{21}$$

also wenn $|F(z)| < G$ auf C und L die Länge dieser Kurve ist:

$$|F^{(\varkappa)}_{(x)}| < \frac{\varkappa!}{2\pi} \frac{G \cdot L}{\eta^{\varkappa+1}}. \tag{22}$$

Bedeutet ferner $\vartheta(F(x))$ die Operation $x\dfrac{dF}{dx}$, $\vartheta^\nu(F(x))$ die ν malige successive Anwendung derselben und $\vartheta^0(F(x))$ soviel wie $F(x)$, so ergibt sich speziell

$$\vartheta^\varkappa(x^\nu) = \nu^\varkappa x^\nu, \qquad \text{also}$$

$$\vartheta^\varkappa\left(\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu\right) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu \nu^\varkappa x^\nu, \tag{23}$$

und allgemein, wie man leicht durch vollständige Induktion nachweist: [1])

$$\vartheta^{\varkappa}(F(x)) = \sum_{1}^{\varkappa}{}^{\nu}\, b_{\nu}^{(\varkappa)} x^{\nu} \frac{d^{\nu} F(x)}{d x^{\nu}}, \tag{24}$$

wo

$$b_{\nu}^{(\varkappa)} < \frac{2^{\varkappa} \cdot (\varkappa - 1)!}{\nu!}, \tag{25}$$

also wenn das Gebiet S ganz innerhalb des um den Nullpunkt mit dem Radius $R\,(> 1)$ beschriebenen Kreises liegt:

$$|\,\vartheta^{\varkappa}(F(x))\,| < 2^{\varkappa} \cdot (\varkappa - 1)! \sum_{1}^{\varkappa}{}^{\nu} \frac{R^{\nu} \cdot |\,F_{(x)}^{(\nu)}\,|}{\nu!} \tag{26}$$

und mit Benutzung von (22):

$$\begin{aligned} |\,\vartheta^{\varkappa}(F(x))\,| &< \frac{G\,L}{2\pi \cdot \eta} \cdot 2^{\varkappa}(\varkappa - 1)! \sum_{1}^{\varkappa}{}^{\nu} \left(\frac{R}{\eta}\right)^{\nu} \\ &< \frac{G \cdot L}{2\pi \cdot \eta} \cdot \left(\frac{2R}{\eta}\right)^{\varkappa} \cdot \varkappa!\ . \end{aligned} \tag{27}$$

Lautet nun die Potenzreihenentwickelung der oben ((19) und (20)) erwähnten Funktion $G(x)$:

$$G(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\varkappa}\, c_{\varkappa}\, x^{\varkappa}, \tag{28}$$

so folgt aus (20):

$$\lim_{\varkappa = \infty} \sqrt[\varkappa]{|\,c_{\varkappa}\,| \cdot \varkappa!} = 0. \text{ [2])} \tag{29}$$

Bildet man daher die Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}^{\varkappa}\, c_{\varkappa}\, \vartheta^{\varkappa}(F(x))$, so ist dieselbe wegen (27) und (29) für alle x in S' gleichmässig konvergent, stellt daher nach dem Weierstrass'schen Doppelreihensatze eine in S' reguläre analytische Funktion dar; die

---

[1]) S. Faber, Math. Ann. 57 (1903), p. 375.

[2]) Poincaré, Bull. de la soc. math. de France 11 (1883). — Lindelöf, a. a. O., p. 34. — Pringsheim, Sitzungsber. d. Münch. Akad. Bd. 32 (1902), p. 188; Math. Ann. 58 (1904), p. 266.

letztere ist aber keine andere als $F_1(x)$ (19); denn der Koeffizient von x^ν in der Potenzreihe für $\sum_0^\infty{}^{\varkappa}\, c_\varkappa\, \vartheta^\varkappa(F(x))$ ist (vgl. (23)):

$$a_\nu \sum_0^\infty{}^{\varkappa}\, c_\varkappa\, \nu^\varkappa = a_\nu\, G(\nu). \tag{30}$$

§ 3.

Es werde jetzt nach Herrn Fabry eine Reihe

$$F(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu \tag{31}$$

angenommen und vorausgesetzt, dass es unendlich viele Indices $m_1, m_2 \ldots$ und zugehörige Intervalle:

$$m_i(1-\lambda) \text{ bis } m_i(1+\lambda) \quad - i = 1, 2 \ldots - \tag{32}$$

gibt von folgenden Eigenschaften: Es ist

$$\lim_{i=\infty} \sqrt[m_i]{|a_{m_i}|} = 1 \tag{33}$$

und

$$\lim_{i=\infty} \frac{s_i}{m_i} = 0, \tag{34}$$

wenn s_i die Anzahl der im i^{ten} der Intervalle (32) ausser a_{m_i} noch vorhandenen nicht verschwindenden Koeffizienten bedeutet. Unter diesen Voraussetzungen, die unter anderem bei den eingangs erwähnten Reihen $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, a_{n_\nu}\, x^{n_\nu}$, wo $\lim_{\nu=\infty} n_{\nu+1} - n_\nu = \infty$ ist, zutreffen, wird sich der Einheitskreis als natürliche Grenze ergeben.

Es kann ferner vorausgesetzt werden, dass die m_i so ausgewählt seien, dass die Ungleichungen bestehen:

$$m_{i+1} > 2\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\, m_i \tag{35}$$

und

$$\prod_0^\infty{}^{\nu} \left(1 - \frac{m_i^2(1+\lambda)^2}{(m_{i+1}(1-\lambda)+\nu)^2}\right) > (1-\varepsilon_i)^{m_i}, \tag{36}$$

wo $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots$ eine gegebene der Null zustrebende Zahlenfolge ist.

Wegen (34) gilt ferner, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben ist, für ein bestimmtes n und jedes $r \geqq 0$:

(37) $$s_{n+r} < \frac{\varepsilon}{4} m_{n+r},$$

woraus durch Addition für $r = l,\ l - 1,\ \ldots 2, 1, 0$ folgt:

(38) $$s_n + s_{n+1} + \cdots + s_{n+l} < \frac{\varepsilon}{4}(m_{n+l} + m_{n+l-1} + \cdots + m_{n+1} + m_n)$$

$$< \frac{\varepsilon}{4}\left(m_{n+l} + \frac{m_{n+l}}{2} + \cdots \frac{m_{n+l}}{2^{l-1}} + \frac{m_{n+l}}{2^l}\right)$$

(nach (35))

$$< \frac{\varepsilon}{2} m_{n+l}.$$

Wählt man noch l so gross, dass

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} < \frac{\varepsilon}{2} m_{n+l},$$

so ergibt sich für $\varkappa \geqq n + l$:

(39) $$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_\varkappa}{m_\varkappa} < \varepsilon.$$

Es wird nun wieder eine ganze Funktion $G(x)$ gebildet, welche die Indices der in den Intervallen (31) nicht verschwindenden Koeffizienten, die $m_1\, m_2 \ldots$ selber ausgenommen, sowie die negativen Werte jener Indices zu Nullstellen hat. Die Beziehung (39) sagt dann aus, dass, wenn $r_1\, r_2 \ldots$ die nach der Grösse ihres absoluten Betrags geordneten Nullstellen von $G(x)$ sind,

(40) $$\lim \frac{\nu}{r_\nu} = 0 \quad \text{oder} \quad \lim \frac{r_\nu}{\nu} = \infty \text{ ist.}$$

Die direkte Vergleichung der Funktion

(41) $$G(x) = \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x^2}{r_\nu^2}\right)$$

mit

(42) $$\sin i\,\varepsilon\,x = i \cdot \varepsilon \cdot x \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{x^2\,\varepsilon^2}{\nu^2\,\pi^2}\right)$$

ergibt deshalb

(43) $$\lim_{r=\infty} G(r e^{i\varphi}) e^{-\varepsilon r} = 0$$ [1])

für jedes positive ε.

Andrerseits ist zu zeigen, dass

(44) $$\lim_{i=\infty} \sqrt[m_i]{|G(m_i)|} = 1 \quad \text{ist.}$$

Da durch (43) ein $\lim\limits_{i=\infty} \sqrt[m_i]{|G(m_i)|} > 1$ schon ausgeschlossen ist, so genügt es zu zeigen, dass $\underline{\lim} \sqrt[m_i]{|G(m_i)|}$ nicht kleiner als 1 ist. Um diesen Nachweis zu führen, denke man sich das Produkt (41) für $G(m_i)$ in $P_1 \cdot P_2$ zerlegt, wo P_1 die Nullstellen mit einem absoluten Betrage $< m_i(1+\lambda)$, P_2 die übrigen enthält. Da $|P_2|$ grösser ist als das Produkt auf der linken Seite von (36), so kann $\lim\limits_{i=\infty} \sqrt[m_i]{|P_2|}$ nicht <1 sein; und es erübrigt nur, das gleiche von P_1 zu zeigen; es ist aber

(45) $$|P_1| = \prod_{1}^{s_1+s_2+\cdots+s_i}{}^{\nu} \frac{(m_i + r_\nu)\,|m_i - r_\nu|}{r_\nu \cdot r_\nu}.$$

Im Zähler von (45) steht das Produkt der Entfernungen der $2(s_1 + s_2 + \cdots s_i)$ dem absoluten Betrage nach unter $m_i(1+\lambda)$ liegenden Nullstellen vom Punkte m_i, im Nenner das gleiche für den Nullpunkt gebildete Produkt. Solange r_ν nicht im Intervalle $m_i(1-\lambda)$ bis $m_i(1+\lambda)$ liegt, ist nach (35) $m_i > 2r_\nu$, also der von r_ν herrührende Faktor des Zählers in (45) grösser als derjenige des Nenners. Es könnte also $\lim\limits_{i=\infty} |P_1|^{\frac{1}{m_i}}$ höchstens noch durch den Einfluss der s_i im Intervalle $m_i(1-\lambda)$ bis $m_i(1+\lambda)$ — $i = 1, 2 \ldots$ — gelegenen

[1]) Die ganze Funktion $G(x)$ ist hier im allgemeinen nicht — wie im § 1 — von einer Ordnung $\varrho < 1$, sondern von der Ordnung 1, gehört aber dem Minimaltypus an nach der Bezeichnungsweise des Herrn Pringsheim; vgl. Sitzungsber. d. Münch. Akad., Bd. 33 (1903), p. 111 und p. 129.

Nullstellen unter 1 herabgedrückt werden. Unter diesen s_i Nullstellen mögen s_i' grösser, s_i'' kleiner als m_i sein, sodass

$$s_i = s_i' + s_i''. \tag{46}$$

Da aber die Differenz zweier aufeinanderfolgender Nullstellen eine ganze Zahl und daher mindestens $= 1$ ist, so geben diese Nullstellen im Zähler von P_1 zu einem Produkte Anlass, das mindestens $= 1 \cdot 2 \ldots s_i' \cdot 1 \cdot 2 \ldots s_i''$; andrerseits ist jede dieser s_i Nullstellen $< m_i (1 + \lambda)$, ihr Produkt im Nenner von P_1 also $< m_i^{s_i}(1+\lambda)^{s_i}$, sodass sich ergibt

$$|P_1| > C \frac{s_i'!\, s_i''!}{m_i^{s_i}(1+\lambda)^{s_i}}, \tag{47}$$

wo nach dem vorher Bemerkten $C > 1$, und da allgemein $h! > \left(\frac{h}{e}\right)^h$:

$$|P_1|^{\frac{1}{m_i}} > \frac{C^{\frac{1}{m_i}}}{e^{\frac{s_i}{m_i}}(1+\lambda)^{\frac{s_i}{m_i}}} \left(\frac{s_i'}{m_i}\right)^{\frac{s_i'}{m_i}} \left(\frac{s_i''}{m_i}\right)^{\frac{s_i''}{m_i}}. \tag{48}$$

Mit unendlich wachsendem i konvergieren aber

$$\frac{s_i}{m_i}, \quad \frac{s_i'}{m_i}, \quad \frac{s_i''}{m_i}$$

nach Null und die drei Faktoren auf der rechten Seite von (48) einzeln nach 1 (die beiden letzten wie x^x für $x = 0$); damit ist aber die Beziehung (44): $\lim\limits_{i=\infty} \sqrt[m_i]{|G(m_i)|} = 1$ bewiesen.

Die Reihe $\sum\limits_0^\infty{}^{\nu} G(\nu)\, a_\nu x^\nu$ hat nun in den Intervallen $\nu = m_i(1-\lambda)$ bis $\nu = m_i(1+\lambda)$ jedesmal nur einen nicht verschwindenden Koeffizienten: $a_{m_i} G(m_i)$; auf diesen reduziert sich für jedes β das Polynom $\varphi_{m_i}(e^{\beta i})$ (s. (7)) und es ist

$$\lim_{i=\infty} \sqrt[m_i]{|\varphi_{m_i}(e^{\beta i})|} = \sqrt[m_i]{|a_{m_i}|} \cdot \sqrt[m_i]{|G(m_i)|} = 1$$

(nach (33) und (44)); d. h. (s. Hilfssatz I) die Reihe

$$\sum_0^\infty {}^{\nu}\, G(\nu)\, a_\nu\, x^\nu$$

und die mit ihr in den Singularitäten übereinstimmende (31) hat den Einheitskreis zur natürlichen Grenze.

Zum Schlusse möge ein noch allgemeineres Theorem des Herrn Fabry Platz finden:

Bedeutet γ_n einen beliebigen mit n veränderlichen Bogen und s_n die Anzahl Zeichenwechsel der Realteile

$$\Re\,(a_{m_n+\nu}\, e^{(\nu\beta+\gamma_n)i}),$$

so lange ν zwischen $-\lambda\, m_n$ und $+\lambda\, m_n$ variiert, und ist

$$\lim_{n=\infty} (\Re\,(a_{m_n} \cdot e^{\gamma_n i}))^{\frac{1}{m_n}} = 1 \tag{49}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{m_n} = 0, \tag{50}$$

so ist der Punkt $e^{\beta i}$ ein singulärer der Reihe $\sum_0^\infty {}^{\nu} a_\nu x^\nu (\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1)$.

Man wird hier zwischen zwei Indices, die zu Koeffizienten mit verschieden bezeichnetem $\Re\,(a_{m_n+\nu}\, e^{(\nu\beta+\gamma_n)i})$ gehören eine Nullstelle von $G(x)$ legen und so erreichen, dass für die Funktion $\sum_0^\infty {}^{\nu}\, G(\nu)\, a_\nu\, x^\nu$ die Realteile der einzelnen Summanden in $e^{\gamma_n}\, i\, \varphi_{m_n}(e^{\beta i})$ gleichbezeichnet werden, sodass

$\Re\,(e^{\gamma_n}\, i\, \varphi_{m_n}(e^{\beta i})) > \Re\,(a_{m_n}\, e^{\gamma_n} i)$, also $\lim \sqrt[m_n]{|\varphi_{m_n}(e^{\beta i})|} = 1$ wird.

Wenn ein $\lim \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = e^{\beta i}$ existiert, so befindet man sich in den Voraussetzungen dieses Theorems und der Punkt $e^{\beta i}$ ist also ein singulärer.

Sitzung vom 5. März 1904.

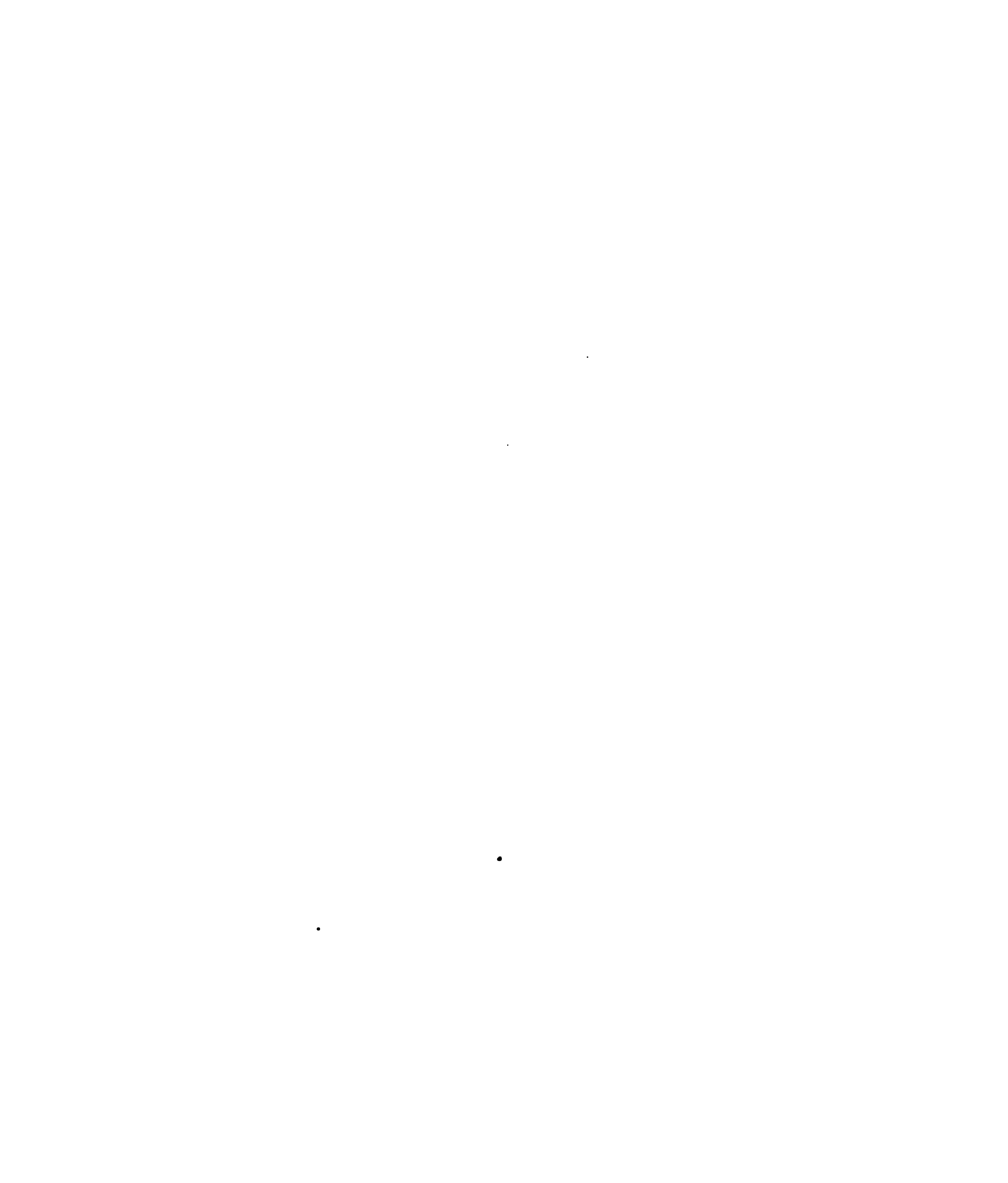
1. Herr H. v. Seeliger legt das erste Heft der „Veröffentlichungen des erdmagnetischen Observatoriums" vor. Dasselbe wird in den Denkschriften der Akademie veröffentlicht.

2. Herr Ferdinand Lindemann spricht „Über das d'Alembert'sche Prinzip."

Dieses meist axiomatisch an die Spitze der Dynamik gestellte Prinzip wird als rein analytische Folge der Newton'schen Prinzipien gewonnen, indem die Reaktionskräfte eines Systems von Bedingungen so definiert und demnach analytisch ausgedrückt werden, dass diese Kräfte, wenn sie allein zur Wirkung kommen, die einmal vorhandene Ruhe nicht stören können. Die Ausdehnung dieser Betrachtung auf diejenigen Fälle, wo auch die Geschwindigkeits-Komponenten in den Bedingungen vorkommen, ist von einer entsprechenden Definition des Gleichgewichtes bewegter Systeme abhängig.

3. Herr Sebastian Finsterwalder hält einen Vortrag über „Eine neue Art die Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden."

Die früher angegebenen Methoden der Ballonphotogrammetrie lassen eine wesentliche Vereinfachung zu, falls jede Aufnahme genau gegen die Lotrichtung orientiert ist. Man kann dann ohne weitere Messung an den Standpunkten die auf den Bildern dargestellten Gegenstände samt den zugehörigen Aufnahmepunkten bis auf den Massstab auf rein zeichnerischem Wege ableiten, wobei die mechanische Lösung folgender Aufgabe der ebenen Geometrie benützt wird: „Zwei Vierecke um einen gemeinsamen Eckpunkt so zu drehen, dass die drei Verbindungslinien der übrigen Ecken durch einen Punkt hindurchgehen."



Über das d'Alembert'sche Prinzip.

Von F. Lindemann.

(Eingelaufen 5. März.)

In der analytischen Mechanik kommen zwei verschiedene Ausgangspunkte zur Geltung: erstens geht man von dem Newton'schen Prinzipe der Gleichheit von actio und reactio aus und setzt die Komponenten der wirkenden Kräfte gleich den Komponenten der Beschleunigungen multipliziert in die betreffenden Massen, um so zu den Lagrange'schen Differentialgleichungen zu gelangen; zweitens stellt man das d'Alembert'sche Prinzip an die Spitze, nach welchem die virtuelle Arbeit der „verlorenen" Kräfte in jedem Momente gleich Null sein muss.

Beide Ansätze erweisen sich bei einer freien Bewegung als absolut identisch; bei einer „bedingten" Bewegung ist diese Identität aber bisher nur an einzelnen einfachen Fällen nachgewiesen, z. B. wenn es sich um die Bewegung eines einzelnen Punktes auf einer vorgeschriebenen (eventuell mit der Zeit veränderlichen) Fläche oder Kurve handelt. Bei komplizierteren Bedingungen stellt man entweder das d'Alembert'sche Prinzip axiomatisch als durch die Erfahrung erprobt an die Spitze, oder man geht ebenso axiomatisch von der Lagrange'schen Methode der Multiplikatoren aus und stellt dem entsprechend die den Bedingungen „äquivalenten Kräfte" nach Analogie mit jenen einfachsten Fällen analytisch dar.

Will man beide Ausgangspunkte miteinander vereinigen, so handelt es sich darum, den analytischen Ausdruck für diese

äquivalenten Kräfte oder Reaktionskräfte als notwendig zu erweisen. Es erhebt sich also die Frage, durch welche Eigenschaften werden diese äquivalenten Kräfte definiert? Wählt man die Definition so, dass durch dieselben, wenn sie allein zur Wirkung kommen, die Ruhelage aller Punkte nicht gestört wird, dass also alle von ihnen erzeugten Beschleunigungen sich stets gegenseitig zerstören, so lässt sich, wie im Folgenden gezeigt werden soll, in der Tat eine Ableitung des d'Alembert'schen Prinzipes aus den Newton'schen Grundsätzen rein analytisch gewinnen, und zwar für die verschiedenen Fälle, wo entweder nur die Koordinaten der bewegten Punkte, oder auch die Zeit, oder auch die Komponenten der Geschwindigkeiten in den Bedingungen vorkommen.

Hat man einmal das d'Alembert'sche Prinzip gewonnen, so ist durch die Arbeiten von Hölder und Voss[1]) der Weg vollkommen klar gelegt, wie man von dort zum Hamilton-schen Prinzipe oder zum Prinzipe der kleinsten Wirkung fortschreiten kann. Hierauf braucht daher nicht weiter eingegangen zu werden, ebensowenig auf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, da die Statik als Grenzfall der Dynamik zu behandeln ist.

I. Die Bedingungsgleichungen enthalten nur die Koordinaten der bewegten Punkte.

Es seien n Punkte mit den Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$ und den Koordinaten $x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n$ gegeben, auf die in üblicher Weise die Kräfte mit den Komponenten X_i, Y_i, Z_i

---

[1]) Vgl. Hölder: Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis, Göttinger Nachrichten 1896; Voss: Über die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Annalen Bd. 25, 1884; Über die Prinzipe von Hamilton und Maupertuis, Göttinger Nachrichten 1900; Bemerkungen über die Prinzipe der Mechanik, Sitzungsberichte d. math.-phys. Klasse d. K. Bayer. Akad. d. W. Bd. 31, 1901; vgl. auch Routh, Dynamics of a rigid body, vol. 2, 1892, § 445 (S. 329 der deutschen Ausgabe von Schepp).

wirken, so dass für ein „freies" System die Differentialgleichungen der Dynamik in der Form

$$(1) \qquad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots n$$

erscheinen. Es mögen nun die Bedingungsgleichungen

$$(2) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots\ldots \quad f_m = 0$$

hinzugefügt werden, wo jede der Funktionen f_i von den Koordinaten der n Punkte (nicht aber von ihren Geschwindigkeiten oder von der Zeit) abhängen soll. Zu den Kräften X_i, Y_i, Z_i treten dann auf den rechten Seiten der Gleichungen (1) die mit Ξ_i, H_i, Z_i zu bezeichnenden Komponenten der sogenannten „Reaktionskräfte" hinzu, welche das System der Bedingungsgleichungen (2) „ersetzen"; wir erhalten demnach

$$(4) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \Xi_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + H_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + Z_i;$$

und auf Grund dieser Gleichungen kann das System jetzt wieder als ein freies behandelt werden.

Um die unbekannten Grössen Ξ_i, H_i, Z_i zu bestimmen, ist notwendig diese Reaktionskräfte so zu d e f i n i e r e n, dass man aus der Definition den analytischen Ansatz gewinnt; das geschehe durch folgende Festsetzung:

Wir sagen „ein System von Kräften mit den Komponenten Ξ_i, H_i, Z_i ersetzt ein gegebenes System von Bedingungen" oder „die Kräfte Ξ_i, H_i, Z_i sind diesen Bedingungen äquivalent" oder „die Kräfte Ξ_i, H_i, Z_i bilden das diesen Bedingungen entsprechende System von Reaktionskräften", wenn diese Kräfte, sobald sie für sich allein wirken, keine Bewegung hervorrufen, d. h. wenn die Differentialgleichungen

$$(5) \qquad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Xi_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = H_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i$$

in Folge der Gleichungen (2) nur eine solche Lösung

gestatten, bei der die Geschwindigkeiten aller Punkte dauernd gleich Null sind, sobald dieselben zur Anfangszeit gleich Null angenommen werden, und wenn auch jede Bewegung dieser Art, die mit den Gleichungen (2) verträglich ist, als eine Lösung der Differentialgleichungen (5) betrachtet werden kann.

Diese Festsetzungen entsprechen offenbar dem, was man sich unbewusst unter den Reaktionskräften eines Systems von Bedingungen vorzustellen pflegt. Es ist zu zeigen, dass sich die Komponenten Ξ_i, H_i, Z_i immer diesen Forderungen gemäss bestimmen lassen; diese Bestimmung ist auszuführen.

Bezeichnen wir mit v_i die Geschwindigkeit des Punktes x_i, y_i, z_i zur Zeit t und mit v_{i0} diejenige zur Anfangszeit t_0, so folgt aus (5) in bekannter Weise

$$(6)\qquad \tfrac{1}{2}\sum_i m_i\,(v_i^2 - v_{i0}^2) = \int_{t_0}^{t} [\sum_i (\Xi_i x_i' + H_i y_i' + Z_i z_i')\,dt,$$

wenn x_i', y_i', z_i' die Komponenten von v_i bedeuten. Nun sollen alle $v_{i0} = 0$ sein; und es sollen dann auch alle v_i in Folge von (2) verschwinden; folglich ist die rechte Seite für jede Zeit t gleich Null zu setzen; insbesondere auch für $t + dt$; es muss demnach die Bedingung

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} (\Xi_i\,dx_i + H_i\,dy_i + Z_i\,dz_i) = 0$$

erfüllt sein, und zwar in Folge der Gleichungen (2). Letztere ergeben

$$(8)\qquad \sum_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\,dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i}\,dy_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i}\,dz_i\right) = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots m.$$

Die Gleichung (7) muss also eine identische Folge der Gleichungen (8) sein; und daraus folgt nach der Theorie der linearen Gleichungen, dass sich Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ bestimmen lassen, mittelst deren sich die Komponenten Ξ_i, H_i, Z_i in der folgenden Form darstellen:

$$(9)\qquad \Xi_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \quad H_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i}, \quad Z_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i}.$$

Dadurch haben wir die bekannten und allgemein angenommenen Lagrange'schen Ausdrücke erhalten.[1])

Wenn also die verlangte Ruhe eintreten soll, so müssen die Komponenten Ξ_i, H_i, Z_i in der Form (9) angesetzt werden können. Umgekehrt haben unter diesen Annahmen die Gleichungen (5) stets die Ruhe des Systems zur Folge, wenn zur Zeit $t = t_0$ das System sich in Ruhe befand; denn in Folge von (9) und (8) verschwindet die Summe unter dem Integralzeichen der rechten Seite von (6), und es ergibt sich

$$\sum_i m_i v_i^2 = 0,$$

also $v_i = 0$, w. z. b. w.

II. Die Bedingungsgleichungen enthalten neben den Koordinaten die Zeit explicite.

Da sich die Bedingungen mit der Zeit ändern, kann hier nicht von Ruhe gesprochen werden; höchstens könnten unter besonderen Umständen einzelne Punkte des Systems dauernd in Ruhe bleiben. Hier wird man die Reaktionskräfte so definieren, dass ein möglichst hoher Grad von Ruhe erreicht wird. Enthält jede der m Bedingungsgleichungen die Zeit explicite, so kann man $n - m$ Punkte festhalten und nur den übrigen entsprechende Bewegungen erteilen. Wie letztere stattfinden, soll dabei willkürlich bleiben.

Wir definieren hier das System von Reaktionskräften durch folgende Festsetzungen:

---

[1]) Da diese Kräfte im Gleichgewichte sind, sobald die Bedingungen $f_k = 0$ erfüllt sind, könnte man versucht sein zu schliessen, dass in Folge jener Bedingungen die Gleichungen

$$\Xi_i = 0, \quad H_i = 0, \quad Z_i = 0$$

erfüllt sein müssten. Dieser Schluss ist deshalb nicht berechtigt, weil unsere Forderung des Gleichgewichtes voraussetzt, dass die Anfangsgeschwindigkeiten sämtlich verschwinden. Man kann daher nur aus den Integralgleichungen der Gleichungen (5), nicht aus letzteren selbst Schlüsse ziehen.

Handelt es sich um die Bewegung von n Punkten, und enthalten die m Bedingungsgleichungen die Zeit explicite, so verstehen wir unter den Reaktionskräften der Bedingungen ein System von Kräften mit folgenden Eigenschaften: Bleiben irgend $n - m$ der n Punkte in Ruhe, so bewegen sich die übrigen m Punkte in Folge der Wirkung jener Reaktionskräfte mit denjenigen Geschwindigkeiten, die sich aus den m Bedingungsgleichungen ergeben, falls noch die Richtungen der Geschwindigkeiten gegeben werden; setzen wir umgekehrt die Komponenten der Reaktionskräfte in die Gleichungen (5) ein und nehmen an, dass sich irgend m der n Punkte den Bedingungen gemäss auf vorgeschriebenen Bahnen bewegen, so sollen die übrigen $n - m$ Punkte in Ruhe bleiben, falls ihnen keine Anfangsgeschwindigkeiten erteilt werden.

Bleiben die Punkte mit den Indices $m+1, m+2, \ldots . n$ in Ruhe, so sind die Gleichungen (8) durch die folgenden zu ersetzen:

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} z_i' \right) + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0.$$

Bezeichnet man ferner mit α_i, β_i, γ_i die Richtungswinkel der Geschwindigkeit v_i des Punktes x_i, y_i, z_i gegen die Koordinatenaxen, so ist

$$x_i' = v_i \cos \alpha_i, \quad y_i' = v_i \cos \beta_i, \quad z_i' = v_i \cos \gamma_i,$$

wobei diese Richtungswinkel willkürlich bleiben; die Gleichungen (10) werden dann

$$(11) \quad \sum_{i=1}^{m} v_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \cos \alpha_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \cos \beta_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \cos \gamma_i \right) + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$$

$$\text{für } k = 1, 2, 3, \ldots m.$$

Aus diesen m Gleichungen kann man (da die Funktionen f_k von einander unabhängig sein sollen) die m Geschwindigkeiten v_i berechnen, und findet sie in der Form

$$v_i = \mu_{i1}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mu_{i2}\frac{\partial f_2}{\partial t} + \cdots + \mu_{im}\frac{\partial f_m}{\partial t} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots m, \tag{12}$$

wo die μ_{ik} von den gegebenen Funktionen f_k und den willkürlich gegebenen Richtungen α_i, β_i, γ_i abhängen.

Setzen wir jetzt wieder die Gleichungen (5) an, bilden die Gleichung der lebendigen Kraft nach (6) und differenzieren die letztere, so wird:

$$\sum_{i=1}^{m} m_i v_i \frac{d v_i}{d t} = \sum_i (\Xi_i x_i' + H_i y_i' + Z_i z_i'). \tag{13}$$

Für unser System von „Reaktionskräften" soll nun diese Gleichung eine **identische** Folge der Gleichungen (2), also auch der Geichungen (10) sein. Es müssen deshalb Gleichungen der folgenden Form bestehen ($i = 1, 2, 3, \ldots m$):

$$\begin{aligned} \Xi_i &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots\cdot + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i}, \\ H_i &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \cdots\cdot + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial y_i}, \\ Z_i &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \cdots\cdot + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial z_i}, \\ \sum_{i=1}^{m} m_i v_i \frac{d v_i}{d t} &= -\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} - \cdots\cdot - \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial t}. \end{aligned} \tag{14}$$

Andererseits folgt aus (12)

$$\sum_{i=1}^{m} m_i v_i \frac{d v_i}{d t} = \sum_{i=1}^{m} \left(\mu_{i1}\frac{d v_1}{d t} + \mu_{i2}\frac{d v_2}{d t} + \cdots + \mu_{im}\frac{d v_m}{d t}\right)\frac{\partial f_i}{\partial t};$$

nach der letzten Gleichung (14) ist demnach

$$\lambda_k = -\left(\mu_{k1}\frac{d v_1}{d t} + \mu_{k2}\frac{d v_2}{d t} + \cdots\cdot + \mu_{km}\frac{d v_m}{d t}\right). \tag{15}$$

Die Koeffizienten μ_{ki} sind vollkommen bestimmt, wenn die Richtungen α_i, β_i, γ_i in (11) gegeben sind, ebenso sind dann die Werte $\frac{d v_i}{d t}$ vollkommen bestimmt. Denkt man sich also

diese Richtungen in beliebiger Weise von den Koordinaten x_i, y_i, z_i und von der Zeit t abhängig, so bleiben auch die Faktoren μ_{ki} in (12), und folglich auch die m „Multiplikatoren" in (14) und (15) vollkommen unbestimmt.

Man könnte die Frage aufwerfen, weshalb wir bei Definition der „Reaktionskräfte" durch Bewegungen, die dem Zustande der Ruhe möglichst nahe kommen, nicht über diese Richtungen α_i, β_i, γ_i noch speziellere beschränkende Festsetzungen machten. Sollen aber die allgemeinen Gleichungen (4), welche anzuwenden sind, wenn zu den Reaktionskräften Ξ_i, H_i, Z_i noch äussere Kräfte X_i, Y_i, Z_i hinzutreten, überhaupt eine Bewegung als möglich ergeben, so müssen bekanntlich m noch unbestimmte Funktionen in die Grössen Ξ_i, H_i, Z_i eingehen; man darf daher die bei Definition der Reaktionskräfte zugelassenen Bewegungen nicht so weit spezialisieren, dass weniger als m unbestimmte Funktionen in den Gleichungen (14) auftreten.

Die Gleichungen (14) lassen die Grössen

$$\Xi_{m+1},\ H_{m+1},\ Z_{m+1},\ \ldots\ldots \Xi_n,\ H_n,\ Z_n$$

noch ganz unbestimmt. Da wir aber statt der Punkte mit den Indices $1, 2, \ldots m$ ebenso gut irgend welche andere Punkte auszeichnen können, so bestimmen sich schliesslich alle Ξ_i, H_i, Z_i in analoger Weise, und wir haben allgemein $(i = 1, 2, \ldots . n)$

$$(16)\quad \begin{gathered} \Xi_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \quad H_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i}, \quad Z_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i}, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i v_i \frac{d v_i}{d t} = - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial t}. \end{gathered}$$

Nehmen wir umgekehrt an, dass sich (wie es unsere Definition der Reaktionskräfte erfordert) m Punkte in vorgeschriebener Weise gemäss den Bedingungen bewegen, so können wir ihre Geschwindigkeiten aus den Gleichungen (11) in der Form (12) berechnen, wenn es sich z. B. um die Punkte mit den Indices $1, 2, \ldots m$ handelt. Wir haben dann in (16) die willkürlichen Funktionen λ_k gemäss (15) durch die willkürlichen

Funktionen μ_{ki} auszudrücken, so dass sich die letzte Gleichung (16) in die beiden Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{m} m_i v_i \frac{d v_i}{d t} = -\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial t}, \quad \sum_{i=m+1}^{n} m_i v_i \frac{d v_i}{d t} = 0$$

zerlegt; durch Integration der letzten Gleichung findet man

$$\sum_{i=m+1}^{n} m_i (v_i^2 - v_{i0}^2) = 0\,,$$

also in der Tat alle $v_i = 0$ für $i = m + 1, \ldots n$, sobald die Anfangsgeschwindigkeiten verschwinden, w. z. b. w.

Die erste Reihe der Gleichungen (16) ergibt sich auch, wenn man von der Vorstellung ausgeht, dass in jedem Zeitmomente das System der Reaktionskräfte sich so verhalten muss, als wenn die Bedingungen von der Zeit unabhängig wären. Da aber ein Zeitmoment immer nur durch eine unendlich kleine Zeit dt, nicht durch die Annahme $dt = 0$, zu charakterisieren ist, so ist diese Vorstellung weniger befriedigend.

III. Die Bedingungen enthalten neben den Koordinaten der bewegten Punkte auch deren Differentialquotienten nach der Zeit.

Enthalten die Bedingungsgleichungen (2) auch die Komponenten x_i', y_i', z_i' der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte in der Form, dass die linken Seiten als lineare homogene Funktionen dieser Komponenten erscheinen, d. h. sind sie von der Form

$$(17) \quad \sum_{i=0}^{n} (\varphi_{ki} x_i' + \psi_{ki} y_i' + \chi_{ki} z_i') = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \ldots m,$$

so bleibt der Ansatz derselbe, wie im ersten Falle, wo nur die Koordinaten der bewegten Punkte in den Gleichungen vorkamen. Wir definieren das System der Reaktionskräfte als ein solches, unter dessen Wirkung keine Bewegung zu Stande kommt, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten aller Punkte gleich Null angenommen werden.

Sollen jetzt die Differentialgleichungen (5) eine solche Lösung zulassen, so muss wieder die Gleichung (7) eine Folge der Gleichungen (17) sein, so dass wir

$$(18) \qquad \Xi_i = \sum_k \lambda_k \varphi_{ki}, \quad H_i = \sum_k \lambda_k \psi_{ki}, \quad Z_i = \sum_k \lambda_k \chi_{ki}$$

zu setzen haben,[1] wobei es gleichgiltig ist, ob die linken Seiten der Gleichungen (17) vollständige Differentiale sind oder nicht.

Geht man umgekehrt von den Gleichungen (18) aus, so ergibt sich in obiger Weise wieder

$$\sum m_i v_i^2 = 0,$$

also $v_i = 0$, wie es sein sollte.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Funktionen $\varphi_{ki}, \psi_{ki}, \chi_{ki}$ nur von den Koordinaten der bewegten Punkte abhängen. Kommen in ihnen auch noch die Geschwindigkeiten vor, so sind diese Funktionen durch einen Ansatz von der Form (7) nicht völlig bestimmt; die früheren Schlüsse führen daher nicht zum Ziele.

In diesem allgemeineren Falle definieren wir die Reaktionskräfte ebenso wie vorhin, vorausgesetzt, dass die Ruhe mit den Bedingungen des Systems verträglich ist. Wir bilden aus (2) durch Differentiation nach t die Gleichungen

[1] Diese Gleichungen sind also von derselben Form, als wenn die linken Seiten der Gleichungen (17) aus den Bedingungen $f_k = 0$ (die nur die Koordinaten enthalten) durch Differentiation nach t entstehen. Der Unterschied zwischen holonomen und nichtholonomen Bedingungen, wie ihn Hertz gemacht hat, kommt also bei Aufstellung der Lagrangeschen Gleichungen in ihrer ersten Form nicht in Betracht. Anders ist es, wenn man einige der Variabeln durch die Bedingungen eliminieren, also die Lagrange'schen Gleichungen „zweiter Form" aufstellen will; dabei ist Vorsicht geboten; vgl. Voss, Math. Annalen, Bd. 25, 1885 und die unten erwähnte Schrift von Appell. — Für einen bewegten Punkt und eine Bedingung der Form (17) sind übrigens nach Voss die Gleichungen (18) ebenso geometrisch abzuleiten, wie die entsprechenden bei Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen Fläche.

$$(19)\quad \sum_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} z_i' + \frac{\partial f_k}{\partial x_i'} x_i'' + \frac{\partial f_k}{\partial y_i'} y_i'' + \frac{\partial f_k}{\partial z_i'} z_i'' \right) = 0$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots . m$.

Diese Bedingungen sollen jetzt die Gleichung

$$(20)\quad \sum_i (\Xi_i x_i' + H_i y_i' + Z_i z_i') = 0$$

zur Folge haben. Dementsprechend setzen wir

$$(21)\quad \begin{aligned} \Xi_i &= \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial x_i'} \frac{x_i''}{x_i'} \right), \\ H_i &= \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_i} + \frac{\partial f_k}{\partial y_i'} \frac{y_i''}{y_i'} \right), \\ Z_i &= \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_i} + \frac{\partial f_k}{\partial z_i'} \frac{z_i''}{z_i'} \right). \end{aligned}$$

Dieser Ansatz ist zwar durch die Gleichungen (19), (20) allein noch nicht vollständig gerechtfertigt; er wird es aber, wenn man bedenkt, dass auch die aus (20) durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen

$$\sum \left(\frac{d\,\Xi_i}{d\,t} x_i' + \frac{d H_i}{d\,t} y_i' + \frac{d\,Z_i}{d\,t} z_i' + \Xi_i x_i'' + H_i y_i'' + Z_i z_i'' \right) = 0$$

eine identische Folge der aus (19) durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen

$$\sum_i \sum_l \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_l} \xi_i' \xi_l' + \frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i' \partial \xi_l} \xi_i'' \xi_l' + \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \xi_i'' + \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i'} \xi_i''' \right) = 0$$

sein muss. Hier laufen die Indices i, l von 1 bis $3\,n$; und es ist

$$\begin{aligned} \xi_i &= x_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots n, \\ \xi_i &= y_i \quad \text{„} \quad i = n + 1,\ n + 2, \ldots 2\,n, \\ \xi_i &= z_i \quad \text{„} \quad i = 2\,n + 1,\ 2\,n + 2, \ldots 3\,n. \end{aligned}$$

Da wir verlangen, dass durch Einwirkung der Reaktionskräfte keine Bewegung entsteht, so könnten wir überall $\xi_i'' = 0$ setzen. A b e r e s s o l l e n a u c h u m g e k e h r t a u s d e m A n s a t z e (21) w i e d e r d i e G l e i c h u n g e n $v_i = 0$ d u r c h I n t e g r a t i o n f o l g e n, und deshalb müssen wir die Glieder mit

x_i'', y_i'', z_i'' beibehalten. In der Tat wird dann in bekannter Weise aus (5) die Gleichung

$$\sum_i m_i v_i \frac{d v_i}{d t} = \sum_i \lambda_k \frac{d f_k}{d t} = 0$$

gewonnen, also

$$\sum m_i (v_i^2 - v_{i0}^2) = 0,$$

oder wenn alle Anfangsgeschwindigkeiten gleich Null genommen werden

$$v_i = 0, \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots n,$$

wie es sein sollte.

Etwas anders muss man verfahren, wenn die Bedingungsgleichungen so beschaffen sind, dass die Geschwindigkeiten der n Punkte nicht gleichzeitig gleich Null sein können, so dass man auch die Anfangsgeschwindigkeiten nicht gleich Null annehmen darf. Das tritt z. B. ein, wenn durch die Bedingungsgleichungen direkt die Konstanz der Geschwindigkeiten einzelner Punkte verlangt wird. Hier ist eine neue Definition des Gleichgewichtes[1]) und demnach auch der Reaktionskräfte notwendig; wir wählen sie analog dem Falle, wo die Zeit explicite in den Bedingungen vorkam. Die Reaktionskräfte sollen hier durch folgende Eigenschaften definiert werden: bleiben irgend $n - m$ (wobei zunächst $n - m > 0$ sei) der n Punkte in Ruhe, so bewegen sich unter alleiniger Wirkung der Reaktionskräfte die übrigen m Punkte mit konstanten Geschwindigkeiten in denjenigen Richtungen, die sich aus den Bedingungsgleichungen ergeben; setzt man umgekehrt die Komponenten der Reaktionskräfte in die Gleichungen (5) ein und nimmt an, dass sich irgend m der n Punkte mit konstanten Geschwindigkeiten auf Bahnen, die den Bedingungen entsprechen, bewegen, so bleiben die übrigen $n - m$ Punkte in Ruhe.

---

[1]) Auch Boltzmann gibt für bewegte Systeme ausdrücklich eine neue Definition des Gleichgewichtes: Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik, Teil 1, p. 233, Leipzig 1897; diese Definition stimmt im Resultate für den von ihm behandelten besonderen Fall mit der unsrigen überein, ist aber von den äusseren Kräften abhängig.

Bleiben wieder die Punkte mit den Indices $m+1, m+2, \ldots n$ in Ruhe, so ergibt sich in der früheren Weise:

$$\sum_{i=1}^{m} m_i v_i \frac{d v_i}{d t} = \sum_{i=1}^{m} (\Xi_i x_i' + H_i y_i' + Z_i z_i');$$

es ist also (für $i = 1, 2, 3, \ldots m$), wenn alle $\frac{d v_i}{d t}$ verschwinden,

$$\text{(22)} \qquad \begin{aligned} \Xi_i &= \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial x_i'} \frac{x_i''}{x_i'} \right), \\ H_i &= \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_i} + \frac{\partial f_k}{\partial y_i'} \frac{y_i''}{y_i'} \right), \\ Z_i &= \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_i} + \frac{\partial f_k}{\partial z_i'} \frac{z_i''}{z_i'} \right), \end{aligned}$$

wo die Glieder in x_i'', y_i'', z_i'' aus analogen Gründen, wie oben, hinzugefügt werden mussten. Hiermit ist die Form der Komponenten Ξ_i, H_i, Z_i bestimmt; und da dieselbe Überlegung für irgend $n - m$ feste Punkte Geltung hat, so nehmen wir diese Form für alle Indices ($i = 1, \ldots . n$) in Anspruch.

Setzen wir umgekehrt die gefundenen Werte Ξ_i, H_i, Z_i in die Differentialgleichungen (5) ein, so ergibt sich wieder

$$\sum_{i=1}^{n} m_i v_i \frac{d v_i}{d t} = 0,$$

und durch Integration

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (v_i^2 - v_{i0}^2) = 0.$$

Setzen wir fest, dass $v_i = v_{i0}$ sei für $i = 1, 2, \ldots m$ (wodurch die m Funktionen λ noch nicht spezialisiert sind, da die Bahnen der m Punkte noch willkürlich bleiben), so folgt

$$\sum_{i=m+1}^{n} m_i v_i^2 = 0,$$

wenn die Anfangsgeschwindigkeiten der übrigen $n - m$ Punkte gleich Null waren, also wieder $v_i = 0$ für $i = m+1, m+2, \ldots n$; w. z. b. w.

Ist insbesondere $n - m = 0$, so kann man die Umkehrung unserer Forderung offenbar (wie aus den aufgestellten Gleichungen hervorgeht) dahin aussprechen, dass der letzte in Ruhe bleibt oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, wenn die übrigen $n - 1$ Punkte sich auf Bahnen, die den Bedingungen genügen, mit konstanten Geschwindigkeiten bewegen.

Ferner kann es eintreten, dass man einigen (etwa μ) der übrigen m Punkte eine verschwindende Anfangsgeschwindigkeit erteilen kann, ohne mit den Bedingungsgleichungen in Widerspruch zu kommen; dann genügt es jene umgekehrte Forderung dahin auszusprechen, dass $n - m + \mu$ Punkte in Ruhe bleiben, (unter alleiniger Wirkung der Reaktionskräfte), wenn die übrigen $m - \mu$ Punkte sich auf entsprechenden Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

In allen diesen Fällen bleibt dann, wenn keine anderen als die Reaktionskräfte wirken, die lebendige Kraft des Systemes stets unveränderlich; diese Forderung umfasst alle Fälle und könnte an die Spitze gestellt werden,[1]) wenn man von energetischen Prinzipien ausgeht. Will man aber auf die Newtonschen Grundbegriffe zurückgehen, so müssen die einzelnen Fälle gesondert durch passende, und unser Kausalitätsbedürfnis befriedigende Definitionen erledigt werden.

IV. Einige Beispiele.

1. Es handle sich um die Bewegung eines einzelnen Punktes, auf den allein die Schwerkraft wirkt; und es sei die Bedingung gegeben, dass die Geschwindigkeit konstant ($= a$) sein soll. Diese Bedingung ist also

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - a^2 = 0. \tag{23}$$

---

[1]) Sie würde dann mit Boltzmann's Definition des Gleichgewichtes von bewegten Systemen im Wesentlichen übereinstimmen.

Nach (22) haben wir

$$\Xi = 2\lambda x'', \quad H = 2\lambda y'', \quad Z = 2\lambda z''.$$

Die Differentialgleichungen (4) für die Bewegung des Punktes lauten daher

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2\lambda x'', \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = 2\lambda y'', \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -G + 2\lambda z'',$$

wo G das Gewicht des Punktes bezeichnet, oder wenn

$$2\lambda = m \cdot \mu$$

gesetzt wird:

$$(24) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \mu x'', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mu y'', \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g + \mu z'',$$

und hieraus (da μ wegen der dritten Gleichung nicht gleich 1 sein kann):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

und aus (23) durch Differentiieren:

$$z'(\mu z'' - g) = 0,$$

also $z' = 0$, folglich auch $z'' = 0$, und aus der dritten Gleichung $\mu = \infty$, aber $\mu z'' = -g$. Aus $z' = 0$ ergibt sich $z = \text{Const.}$ Der Punkt kann sich also nur in einer horizontalen Ebene bewegen (wie vorauszusehen war).

Man könnte denken, der Bedingung (23) durch Leitung des Punktes zu genügen, indem man ihn mit einem anderen willkürlich bewegten Punkte verbindet; dann aber würde es sich nicht um einen einzelnen Punkt, sondern um zwei bewegte Punkte handeln.

2. Es werde jetzt der gestellten Bedingung die Form

$$(25) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 + a^2 \cdot z = 0$$

gegeben, dann erhalten wir

$$(26) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \mu x'', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mu y'', \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g + \mu\left(\frac{a^2}{2} + z''\right),$$

also $\mu = 1$, oder wie oben:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = 0, \quad z' \left[- g + \mu \frac{a^2}{2} \right] = 0.$$

Nehmen wir $z' = 0$, so folgt, da x' und y' konstant sein müssen, aus (25): $z =$ Konst., und aus der letzten Gleichung (26)

$$\mu a^2 = 2 g. \tag{26a}$$

Sind also α, β, γ die Komponenten der Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, so bewegt sich der Punkt in einer Horizontalebene, die durch die Gleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + a^2 z = 0$$

bestimmt wird. Geht man von der Bedingung $\mu = 1$ aus, so folgt aus der letzten Gleichung (26): $a^2 = 2 g$, was mit (26a) in Übereinstimmung ist; der Fall ist als Grenzfall des allgemeinen zu erledigen.

3. Ist die Bedingungsgleichung in der Form

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + a^2 x = 0 \tag{27}$$

gegeben, so erhalten wir

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \mu \left(\frac{a^2}{2} + x'' \right), \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = \mu y'', \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = - g + \mu z'', \tag{28}$$

also $z'' = 0$, denn μ kann nicht gleich 1 sein; ferner aus (27) durch Differenzieren und Eliminieren von x'' und z'':

$$\tfrac{1}{2} a^2 x' = g z', \tag{29}$$

(dieselbe Gleichung findet man aus dem Satze von der lebendigen Kraft), und durch nochmaliges Differenzieren

$$\mu \frac{a^4}{4} = - g^2;$$

folglich ist μ konstant, und die Gleichungen (28) sind sofort integrierbar:

$$
(30) \qquad \begin{aligned} x &= -\frac{g^2 a^2}{a^4 + 4 g^2} t^2 + \alpha t + \alpha', \quad y = \beta t + \beta', \\ z &= -\tfrac{1}{2} \frac{g a^4}{a^4 + 4 g^2} t^2 + \gamma t + \gamma'. \end{aligned}
$$

Aus (29) folgt dann $\alpha a^2 = 2 \gamma g$, und aus (27), wenn zur Abkürzung

$$
b = \frac{a^2 g}{a^4 + 4 g^2}
$$

gesetzt wird:

$$
(\alpha - 2 g b t)^2 + (\gamma - a^2 b t)^2 + \beta^2 + a^2 (-g b t^2 + \alpha t + \alpha') = 0.
$$

Folglich besteht die Relation (denn die Faktoren von t und t^2 verschwinden identisch):

$$
\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + a^2 \alpha' = 0.
$$

Der Punkt bewegt sich in der Ebene

$$
a^2 x - 2 g z = a^2 \alpha' - 2 g \gamma',
$$

welche zur Y-Axe parallel ist, und beschreibt in dieser eine Parabel. Verlangt man umgekehrt, dass der Punkt sich in dieser Ebene bewege, so erhält man aus den elementaren Formeln:

$$
\frac{d^2 x}{d t^2} = \lambda a^2, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = -g - 2 \lambda g,
$$

was mit den Gleichungen (28) in Übereinstimmung ist.

4. Es werde ferner ein Punkt betrachtet, der sich unter Wirkung der Schwerkraft auf einer Kugel mit konstanter Geschwindigkeit bewegen soll. Hier haben wir die beiden Bedingungsgleichungen

$$
(31) \qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= a^2. \end{aligned}
$$

Die Gleichungen der Bewegung sind daher

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2\lambda x + 2\mu x'', \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = 2\lambda y + 2\mu y'',$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -G + 2\lambda z + 2\mu z'',$$

oder:

$$(32) \quad x'' = \lambda_1 x + \mu_1 x'', \ y'' = \lambda_1 y + \mu_1 y'', \ z'' = -g + \lambda_1 z + \mu_1 z''.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit x', y', z' und addiert, so ergibt sich in Folge von (32)

$$z' = 0, \quad \text{also auch} \quad z'' = 0 \quad \text{und} \quad z = z_0, \quad \text{folglich:}$$

$$-g + \lambda_1 z_0 = 0,$$

ferner durch Differenzieren der beiden Gleichungen (31) unter Benutzung von (32):

$$x'x + y'y = 0 \qquad \lambda_1(x'x + y'y) = 0,$$

folglich auch

$$x''x + y''y + x'^2 + y'^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (1-\mu_1)(a^2 - z'^2) + \lambda_1(x^2 + y^2) = 0,$$

also auch

$$(1-\mu_1)a^2 + \lambda_1(r^2 - z_0^2) = 0,$$
$$(1-\mu_1)a^2 z_0 = -g(r^2 - z_0^2).$$

Die Grössen μ_1 und λ_1 sind demnach konstant; und wir finden x und y als Integrale der Gleichung

$$\eta'' = \frac{\lambda_1}{1-\mu_1}\eta,$$

nämlich

$$\eta = A \sin \alpha t + B \operatorname{cosin} \alpha t,$$

wo

$$\alpha^2 = -\frac{\lambda_1}{1-\mu_1} = \frac{g a^2}{r^2 - z_0^2}.$$

Der Punkt bewegt sich in bekannter Weise in einem horizontalen Kreise, auf dem er ganz herumschwingt.

5. Schliesslich betrachten wir einen Punkt, der sich unter Wirkung der Schwerkraft so bewegt, dass zwischen seinen

Geschwindigkeitskomponenten eine lineare, nicht homogene Gleichung

$$(33) \qquad a x' + b y' + c z' = e$$

besteht. Die Differentialgleichungen lauten

$$(34) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = a \lambda \frac{x''}{x'}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = b \lambda \frac{y''}{y'}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g + c \lambda \frac{z''}{z'}.$$

Die auch hier anwendbare Gleichung der lebendigen Kraft gibt, wenn h eine Konstante bedeutet

$$(35) \qquad \tfrac{1}{2} v^2 = -g z + h.$$

Ferner ist entweder $x' = a\lambda$ oder $x'' = 0$, ebenso $y' = b\lambda$ oder $y'' = 0$. Nehmen wir $x' = a\lambda$, $y' = b\lambda$, so folgt aus (33) und (35)

$$\lambda (a^2 + b^2) + c z' = e,$$
$$\tfrac{1}{2} (a^2 + b^2) \lambda^2 + \tfrac{1}{2} z'^2 = -g z + h,$$

und hieraus durch Elimination von z'

$$(36) \quad (a^2 + b^2) \lambda^2 c^2 + [e - \lambda (a^2 + b^2)]^2 = -2 g c^2 z + 2 c^2 h.$$

Durch diese quadratische Gleichung wird λ als Funktion von z bestimmt; es sei $\lambda = \varphi(z)$, so folgt aus der dritten Gleichung (34)

$$z'' z' = -g z' + c \cdot \varphi(z) \cdot z''.$$

Durch Integration ergibt sich z als Funktion von t und dann findet man x und y aus den Gleichungen $x' = a\lambda$, $y' = b\lambda$.

Gehen wir von den Lösungen $x'' = 0$, $y'' = 0$ der ersten beiden Gleichungen (34) aus, so folgt aus (33) auch $z'' = 0$, und die letzte Gleichung (34) gibt $z' = 0$; es wird also

$$(37) \qquad x = \beta t + \gamma, \quad y = \beta_1 t + \gamma_1, \quad z = \gamma_2$$

mit der Bedingung

$$a \beta + b \beta_1 = e.$$

Endlich könnten wir auch $x' = a\lambda$, $y'' = 0$ wählen; dann folgt aus (33) und (34), wenn $y = \beta t + \beta'$ gesetzt wird:

$$(37^a) \qquad \begin{aligned} & a^2 \lambda + b \beta + c z' = e, \\ & a^2 (z'' z' + g z') + b c \beta + c^2 z' = e c, \end{aligned}$$

also durch Integration

$$a^2\frac{z'^2}{2}+z(a^2 g+c^2)=c(e-b\beta)t+C,$$

wo C eine Konstante bezeichnet. Die Gleichung ist von der Form

$$z'^2+Az=Bt+C;$$

setzt man also

$$Az+Bt=B\tau,$$

so wird

$$\left(\frac{\frac{dz}{d\tau}}{1-\frac{A}{B}\frac{dz}{d\tau}}\right)^2+B\tau=C,$$

$$z=\int\frac{B\sqrt{C-B\tau}}{B+A\sqrt{C-B\tau}}\,d\tau+C',$$

wenn C' eine neue Konstante ist. Hieraus ergibt sich $z=\Phi(t)$, und dann aus (37) $\lambda=\Psi(t)$, womit dann auch

$$x=\int a\,\Psi(t)\,dt+C''$$

bestimmt ist.

Wenn in (33) die rechte Seite, d. h. die Konstante e, verschwindet, so kann man das Problem auch nach den Formeln (18) behandeln. Man findet

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\mu a,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\mu b,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=-gz+\mu c.$$

Durch Differenzieren von (33) erhält man

$$\mu(a^2+b^2+c^2)=gzc,$$

also

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}gz, \tag{38}$$

$$z=A\sin\alpha t+B\operatorname{cosin}\alpha t,\quad \alpha^2=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}g$$

$$\mu=\frac{gc}{a^2+b^2+c^2}(A\sin\alpha t+B\operatorname{cosin}\alpha t),$$

wo A und B Integrationskonstante sind. Es wird dann

$$x = \frac{g\,c\,a}{a^2 + b^2 + c^2}\left(-\frac{A}{a^2}\sin a\,t - \frac{B}{a^2}\cosin a\,t\right) + C\,t + C',$$

$$y = \frac{g\,c\,b}{a^2 + b^2 + c^2}\left(-\frac{A}{a^2}\sin a\,t - \frac{B}{a^2}\cosin a\,t\right) + C_1\,t + C_1'.$$

Setzt man diese Werte in die Bedingung

$$a\,x' + b\,y' + c\,z' = 0$$

in, so wird dieselbe nicht identisch befriedigt. Die allgemeine Lösung der Gleichung (38) ist daher nicht brauchbar; man muss vielmehr $z = 0$ nehmen; dann ist auch $\mu = 0$, und es wird:

$$x = \alpha\,t + \alpha', \quad y = \beta\,t + \beta'$$

mit der Bedingung

$$\alpha\,a + \beta\,b = 0.$$

Diese Lösung ist mit der in (37) gefundenen wesentlich identisch. In der Tat muss der Fall $e = 0$ im allgemeinen Falle enthalten sein. Man erkennt dies an den Differentialgleichungen nicht ohne weiteres, weil die Identität nur dann eintritt, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten gleich Null angenommen werden.[1])

V. Das d'Alembert'sche Prinzip.

Multiplizieren wir die Gleichungen (1) bezw. mit δx_i, δy_i, δz_i und bilden die Summe, so entsteht die eine Gleichung

$$(39)\quad \Sigma\left[\left(m_i\frac{d^2 x_i}{d t^2} - X_i\right)\delta x_i + \left(m_i\frac{d^2 y_i}{d t^2} - Y_i\right)\delta y_i + \left(m_i\frac{d^2 z_i}{d t^2} - Z_i\right)\delta z_i\right] = 0,$$

welche das System der Gleichungen (1) vollkommen ersetzt, wenn die Grössen δx_i, δy_i, δz_i willkürlich bleiben. Diese „symbolische Zusammenfassung" der Gleichungen (1) bietet keine besonderen Vorteile, so lange das System der Punkte m keinen beschränkenden Bedingungen unterworfen ist.

---

[1]) Vgl. oben die Anmerkung auf Seite 81.

„Die wahre Bedeutung dieser Darstellung liegt vielmehr darin, dass sie auch noch dann beizubehalten ist, wenn das System nicht mehr ein freies ist, sondern wenn Bedingungsgleichungen hinzutreten, welche die Verbindungen der Punkte ausdrücken. Aber alsdann sind die Variationen (d. h. die Grössen δx_i, δy_i, δz_i) nicht mehr als ganz willkürlich und von einander unabhängig zu betrachten, sondern als virtuelle Variationen, d. h. als solche, welche mit den Bedingungen vereinbar sind. ..... Die im Obigen enthaltene Ausdehnung unserer symbolischen Gleichung auf ein durch Bedingungen beschränktes System ist, wie sich von selbst versteht, nicht bewiesen, sondern nur historisch ausgesprochen. ..... Diese Ausdehnung zu beweisen, ist keineswegs unsere Absicht, wir wollen sie vielmehr als ein Prinzip ansehen, welches zu beweisen nicht nötig ist. Dies ist die Ansicht vieler Mathematiker, namentlich auch von Gauss.[1])"

Auf diesem Standpunkte scheint man im wesentlichen auch heute noch zu stehen.[2]) Gleichwertig damit ist es, wenn man die „Reaktionskräfte", wie es z. B. Kirchhoff tut, in der durch obige Gleichungen (9) gegebenen Form ansetzt, denn da die Grössen δx_i, δy_i, δz_i den Gleichungen

$$(40) \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots m$$

genügen sollen, fallen die Komponenten dieser Reaktionskräfte auf der linken Seite von (39) heraus.

Durch vorstehende Überlegungen dagegen sind wir mit Notwendigkeit auf den Ansatz (9) geführt worden, indem wir

---

[1]) Wahrscheinlich nach mündlicher Äusserung von Gauss gegen Jacobi, wie Clebsch zu dieser oben angeführten Stelle aus Jacobi's Vorlesungen über Dynamik (p. 14 f.) bemerkt.

[2]) So postuliert z. B. Volkmann die Ausdehnung des d'Alembert'schen Prinzips auf bedingte Bewegungen über die unmittelbar evidenten einfachen Fälle hinaus: Einführung in das Studium der theoretischen Physik, Leipzig 1900, p. 335 ff.; vgl. auch die Darstellung bei Voss: Die Prinzipien der rationellen Mechanik, Enzyklopädie der math. Wissenschaften, 1901; nach ihm ist auch die Definition des Gleichgewichtes durch eine axiomatische Annahme zu erweitern (p. 65).

zuvor als Reaktionskräfte ein solches System von Kräften **definierten**, bei dem infolge der Bedingungsgleichungen die Punkte in Ruhe bleiben, und zwar das allgemeinste System dieser Art; und diese Definition ist nicht willkürlich, sondern entspricht genau den Vorstellungen, die wir mit dem Begriffe von Reaktionskräften zu verbinden pflegen.

Für den Fall, dass die Bedingungsgleichungen nur die Koordinaten der bewegten Punkte enthalten, ist hiernach das in Gleichung (39) ausgesprochene d'Alembert'sche Prinzip als eine Folge obiger Definition der Reaktionskräfte dargestellt; die an die Bedingungen (40) gebundenen Grössen δx_i, δy_i, δz_i können dabei als Komponenten virtueller Verwicklungen des Systems gedeutet werden.

Kommt die Zeit in den Funktionen f_k explicite vor, so ändern sich die Formeln für die Komponenten der Reaktionskräfte, wenn man letztere durch eine Definition bestimmt, die sich als natürliche Erweiterung der im einfachsten Falle benutzten ergibt. Auch in diesem Falle gilt daher wieder das **d'Alembert'sche Prinzip in der Form (39), wenn die** δx_i, δy_i, δz_i **wieder an die Bedingungen (40) gebunden sind.** Eine virtuelle Verrückung ist also jetzt nicht eine solche, die sich mit den Bedingungen in Übereinstimmung befindet, denn dann hätten die Gleichungen (40) durch die folgenden ersetzt werden müssen:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i}\delta z_i\right) + \frac{\partial f_k}{\partial t}\delta t = 0.$$

Eine virtuelle Verrückung entsteht also aus einer möglichen, wenn man $\delta t = 0$ wählt, was analytisch stets erlaubt ist, mechanisch aber keine direkte Bedeutung hat, da eine unendlich kleine Bewegung nur unter gleichzeitiger unendlich kleiner Änderung der Zeit möglich wird.

Kommen auch die Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit in den Bedingungen vor, so genügt wieder die obige erste Definition der Reaktionskräfte (als die allgemeinsten, bei denen infolge

der Bedingungen die Ruhe erhalten bleibt) um die Komponenten dieser Kräfte zu berechnen. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Erstens: die Bedingungen sind linear und homogen in den Differentialquotienten; dann gelten die Formeln (18); das d'Alembert'sche Prinzip bleibt also gültig, wenn nur die virtuellen Verrückungen den Bedingungen genügen, d. h. wenn die zu (17) analogen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_{ki}\,\delta x_i + \psi_{ki}\,\delta y_i + \chi_{ki}\,\delta z_i) = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots m$$

erfüllt sind. Dieser Fall kommt insbesondere bei der rollenden Bewegung eines Körpers in Betracht; bei einer solchen bleibt also in der Tat das d'Alembert'sche Prinzip anwendbar, und ist somit das von C. Neumann angewandte Verfahren zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen durch unsere Definition der Reaktionskräfte gerechtfertigt.[1])

Zweitens: die Bedingungen sind in beliebiger Weise von den Komponenten der Geschwindigkeiten abhängig. In diesem Falle kommen die Formeln (21) zur Anwendung; das d'Alembert'sche Prinzip bleibt also auch hier bestehen, wenn nur jetzt unter den $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ solche Variationen verstanden werden, die den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\frac{\partial f_k}{\partial x_i'}\frac{x_i''}{x_i'}\right)\delta x_i+\left(\frac{\partial f_k}{\partial y_i}+\frac{\partial f_k}{\partial y_i'}\frac{y_i''}{y_i'}\right)\delta y_i+\left(\frac{\partial f_k}{\partial z_i}+\frac{\partial f_k}{\partial z_i'}\frac{z_i''}{z_i'}\right)\delta z_i\right]=0$$
$$\text{für } k = 1, 2, \ldots m$$

genügen. Der Vorteil, den das Prinzip bietet, geht allerdings hier, wo die Variationen selbst noch von den Beschleunigungen

---

[1]) Über die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontalebene unter dem Einfluss der Schwere, Berichte der k. sächsischen Gesellschaft d. Wiss., Oktober 1885, und Math. Annalen, Bd. 27, sowie Hölder a. a. O. Für das Rollen zweier beliebigen Flächen aufeinander, vgl. Appell: Les mouvements de roulement en dynamique, (in der Sammlung „Scientia") 1899, wo man auch weitere Litteraturangaben findet.

x_i'', y_i'', z_i'' abhängen, ganz verloren. Solche Bedingungsgleichungen allgemeinster Form scheinen in der Mechanik überhaupt keine Anwendung zu finden.

Kommt neben den Geschwindigkeiten auch die Zeit in den Bedingungen explicite vor, so lassen sich leicht entsprechende Überlegungen anwenden, wie sie oben unter II. durchgeführt wurden. Ebenso übersieht man sofort, wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn von den Bedingungsgleichungen einige von der ersten, andere von der zweiten, wieder andere von der dritten Form vorausgesetzt werden. Auch die für die Mechanik zunächst bedeutungslosen Fälle, wo dritte und höhere Differentialquotienten in den Bedingungen vorkommen, gestatten eine analoge Behandlung.

Setzt man die Ausdrücke (21) bezw. (22) in die Gleichungen (4) ein, so ergeben sich Gleichungen von der gewöhnlichen Form

$$\mu_i \frac{d^2 x_i}{d t^2} = X_i + \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \quad \ldots .$$

wenn man

$$\mu_i = m_i - \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i'} \frac{1}{x_i'}$$

setzt. Die Punkte bewegen sich demnach so, als wenn ihre scheinbare Masse μ_i von der wirklichen Masse m_i und von ihrem Orte und ihren Geschwindigkeiten abhinge. Wenn man also in der neueren Theorie der Elektronen dazu geführt wurde, die Masse als veränderlich zu denken, so kann dies dadurch veranlasst sein, dass die Bewegung unter Bedingungen erfolgt, deren analytische Formulierung die Benutzung der Geschwindigkeitskomponenten erfordert.



Eine neue Art die Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden.

Von **S. Finsterwalder.**

(Eingelaufen 14. April.)

Unter flüchtigen photogrammetrischen Aufnahmen sollen im Folgenden solche verstanden werden, bei welchen die Standpunkte des photographischen Apparates nicht durch eigene Messungen höheren Genauigkeitsgrades festgelegt werden. In diesem Sinne sind insbesondere die photogrammetrischen Aufnahmen vom Luftballon aus als flüchtige zu bezeichnen und die Methoden, welche ich früher für Ballonaufnahmen[1]) angegeben habe, lassen eine sinngemässe Anwendung auf alle andern flüchtigen Aufnahmen zu. Bei Ballonaufnahmen ist man zumeist auf die Kenntnis der inneren Orientierung (Bildweite und Hauptpunkt) des verwendeten Apparates angewiesen, da sich die äussere Orientierung desselben gegen die Vertikale oder den Meridian nur durch umständliche und wenig genaue Mittel gewinnen lässt. Bei Aufnahmen jedoch, welche auf festem Boden ausgeführt werden, begnügt man sich nicht mit der Kenntnis der inneren Orientierung des photogrammetrischen Apparates, sondern man nimmt die leicht genau auszuführende Orientierung gegen die Lotrichtung dazu und verschmäht unter Umständen auch die weniger sichere Orientierung gegen

[1]) Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abhdlgn. der K. Bayer. Akad. der Wiss., II. Kl., XXII. Bd., 2. Abt., 1903, S. 223, sowie: Bemerkungen zur Analogie zwischen Aufgaben der Ausgleichsrechnung und solchen der Statik. Diese Berichte Bd. 33, 1903, S. 683.

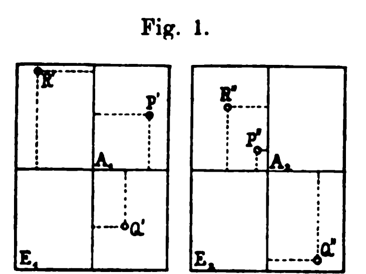
die Nordsüdrichtung mittels der Magnetnadel nicht. Dadurch vereinfachen sich die Konstruktionen wesentlich und ausserdem lässt sich die Genauigkeit steigern. Legt man auf letzteren Umstand weniger Gewicht, so kann man die Konstruktionen rein graphisch ausführen und erzielt damit Raschheit und Übersichtlichkeit. Während bei alleiniger Kenntnis der inneren Orientierung der Aufnahmen die Rekonstruktion des Objektes nur auf dem Wege des Tastens gelingt, wobei vier oder doch mindestens drei Grössen zu verändern sind, lässt sich bei Hinzuziehung der Orientierung gegen die Lotrichtung dieselbe Aufgabe auf eine einzige Gleichung 6. Grades zurückführen, die man durch eine sehr anschauliche geometrische Konstruktion ersetzen kann. Wird auch noch die magnetische Orientierung benützt, so fallen alle Verwickelungen fort und die Lösung läuft auf das Ziehen gerader Linien hinaus.

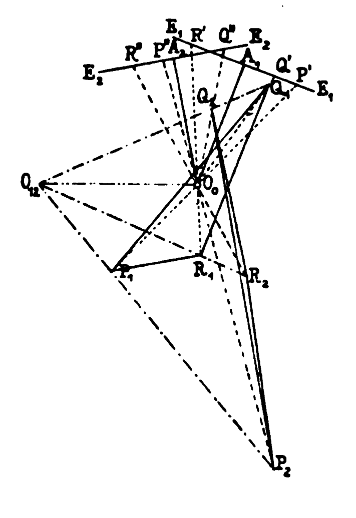
I.

Wir betrachten zwei Aufnahmen mit den Standpunkten O_1 und O_2. Die Strahlen, welche von ihnen aus nach einem Raumpunkt P hinlaufen, denken wir uns parallel verschoben, bis sie durch einen festen Punkt O gehen. Durch diesen Punkt legen wir auch eine Parallele zur Standlinie $O_1 O_2$. Diese drei Parallelen müssen in ein und derselben Ebene liegen. Wir schneiden nun die Figur derselben durch eine Horizontalebene (Bezugsebene) in der Entfernung „Eins" von O und bezeichnen den Schnittpunkt der Parallelen zu $O_1 P$ mit P_1, jenen der Parallelen zu $O_2 P$ mit P_2 und den der Parallelen zur Standlinie $O_1 O_2$ mit O_{12}. Es liegen dann die drei Punkte P_1, P_2, O_{12} in einer Geraden. Ist die volle äussere Orientierung der Aufnahmen gegeben, so kann man in einfachster Weise die Punkte P_1 und P_2 zeichnen und erhält in ihrer Verbindungslinie einen geometrischen Ort für den Punkt O_{12}. Die Strahlen von O_1 und O_2 nach einem zweiten Raumpunkt Q liefern zwei weitere Punkte Q_1 und Q_2 in der Bezugsebene, deren Verbindungslinie ebenfalls durch den Punkt O_{12} geht. Hat man so O_{12} als Schnitt von $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ gefunden, so bestimmt die Ver-

bindungslinie $O_{12}\,O$ Richtung und Neigung der Basis $O_1\,O_2$. Ist O_0 der Fusspunkt des Lotes von O auf die Bezugsebene, so wird $O_{12}\,O_0$ die Richtung und der Winkel $O\,O_{12}\,O_0$ die Neigung der Basis ergeben. Die Länge der Basis ist der Natur der Sache nach unbestimmt und kann vorläufig beliebig angenommen werden. Ihre Grösse bestimmt den Massstab der Rekonstruktion des Objektes.

Fig. 1.

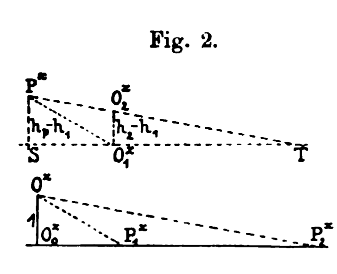




Das Verfahren bei der Wiederherstellung des Objektes aus zwei Bildern, welche nach Lotrichtung und Meridian orientiert sind, lässt sich hiernach folgendermassen schildern, wobei der Einfachheit halber lotrechte Bildebenen vorausgesetzt werden (vergl. Fig. 1). Die Koordinaten der Bildpunkte von $P\,Q\,R\ldots$, bezogen auf ein durch den Hauptpunkt (A_1 bezw. A_2) gehendes, aus Hauptvertikale und Horizont bestehendes Koordinatenkreuz werden mit $x_p'\,y_p'$, $x_q'\,y_q'$, $x_r'\,y_r', \ldots$ in der Bildebene E_1 und $x_p''\,y_p''$, $x_q''\,y_q''$, $x_r''\,y_r'', \ldots$ in der Bildebene E_2 bezeichnet. Zuerst zieht man von einem Punkte O_0 die Richtungen der optischen Achsen $O_1\,A_1$, bezw. $O_2\,A_2$ nach den Ablesungen der Magnetnadel, trägt auf ihnen die Bildweite $O_0\,A_1$ bezw. $O_0\,A_2$ ab und errichtet in den Endpunkten Senkrechte, welche den Grundrissen der Bildebenen E_1 und E_2 entsprechen. Auf diese Senkrechten überträgt man die X-Koordinaten von den Fusspunkten (A_1, bezw. A_2) aus und verbindet die Endpunkte $P'\,Q'\,R'\ldots$ bezw. $P''\,Q''\,R''\ldots$ mit O_0. Auf den so erhaltenen Strahlen

findet man die Punkte $P_1 Q_1 R_1 \ldots$ bezw. $P_2 Q_2 R_2 \ldots$, indem man die Strecken: $O_0 P_1 = O_0 P' : y'_p$, $O_0 P_2 = O_0 P'' : y''_p$ u. s. w. berechnet und von O_0 aus abträgt, bei positiven Vorzeichen in der rückwärtigen Verlängerung von $O_0 P'$ bezw. $O_0 P''$, bei negativem in umgekehrter Richtung. Die Verbindungslinien $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$, $R_1 R_2, \ldots$ schneiden sich dann sämtlich im Punkte O_{12}, der mit O_0 verbunden die Richtung der Basis gibt, während die Neigung derselben aus der Formel $\operatorname{ctg} \varphi = O_{12} O_0$ hervorgeht.

Fig. 2.



Wird nun das Strahlenbüschel $O_0 (P_2 Q_2 R_2 \ldots)$ in der Richtung $O_{12} O_0$ der Basis um eine Strecke b gleich der Länge derselben in der Horizontalprojektion verschoben und werden seine Strahlen mit jenen von $O_0 (P_1 Q_1 R_1 \ldots)$ zum Schnitt gebracht, so erhält man die Grundrisse $P_0 Q_0 R_0 \ldots$ der Objektpunkte. Die Höhen kann man entweder in der üblichen Weise doppelt berechnen oder auch vor Ausführung der Konstruktion des Grundrisses aus den Elementen der Figur 1 direkt ermitteln. Zu diesem Zweck betrachten wir in Fig. 2 den Aufriss auf eine zu $O_0 O_{12}$ senkrechte Ebene. Die Punkte des Aufrisses seien durch den Exponenten x gekennzeichnet. Die Höhen der Punkte O_1, O_2, P über einem beliebigen Horizont mögen h_1, h_2, h_p heissen. Durch O_1^x wird eine Horizontale $S T$ gezogen. Aus der Ähnlichkeit der Figuren: $P^x S T O_1^x$ und $O^x O_0^x P_2^x P_1^x$ folgt die Proportion:

$$S P^x : O_1^x O_2^x = (h_p - h_1) : (h_2 - h_1) = S T : O_1^x T = O_0^x P_2^x : P_1^x P_2^x.$$

Aus der Grundrissfigur 1 im Zusammenhang mit der Aufrissfigur 2 folgt

$$O_0^x P_2^x : P_1^x P_2^x = O_{12} P_2 : P_1 P_2,$$

somit:

$$h_p - h_1 = \frac{h_2 - h_1}{P_1 P_2} O_{12} P_2 = \frac{b}{O_0 O_{12}} \frac{O_{12} P_2}{P_1 P_2},$$

wenn man an Stelle des Höhenunterschiedes $h_2 - h_1$ der Basis-

endpunkte deren Horizontalentfernung b einführt. Wenn der Höhenunterschied $h_2 - h_1$ gleich Null wird, nähert sich das Verhältnis $O_{12} P_2 : O_{12} O_0$ der Einheit, da der Punkt O_{12} ins Unendliche rückt und die Formel für den Höhenunterschied $h_p - h_1$ wird:

$$h_p - h_1 = \frac{b}{P_1 P_2}.$$

Für Punkte in gleicher Höhe ist das Verhältnis $O_{12} P_2 : P_1 P_2$, oder, wenn der Höhenunterschied $h_2 - h_1$ der Basisendpunkte Null ist, die Entfernung $P_1 P_2$ konstant.

II.

Wenn die Orientierung beider Aufnahmen gegen den Meridian nicht bekannt ist, wohl aber jene gegen die Vertikale, so kann man die beiden Figuren der Punkte $O_0 P_1 Q_1 R_1$ und $O_0 P_2 Q_2 R_2$ (Fig. 1) für sich zeichnen, sie dann derart aufeinanderlegen, dass die Punkte O_0 sich decken und den Winkel beider Figuren gegeneinander solange ändern, bis die Verbindungslinien $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$, $R_1 R_2$ durch einen Punkt O_{12} hindurchgehen. Das lässt sich mit Hilfe von Pauspapier mechanisch sehr leicht ausführen. Wenn wir aber den Winkel ψ berechnen wollen, um den die zweite Figur gegen die erste zu drehen ist, damit die drei Verbindungslinien durch einen Punkt gehen, so stossen wir auf eine Gleichung 6. Grades. Es seien nämlich die rechtwinkligen und Polarkoordinaten der Punkte $P_1 Q_1 R_1 P_2 Q_2 R_2$ auf O_0 als Anfangspunkt bezogen folgende:

$$P_1 : x_1 y_1 r_1 \varphi_1; \quad Q_1 : x_2 y_2 r_2 \varphi_2; \quad R_1 : x_3 y_3 r_3 \varphi_3;$$
$$P_2 : x_1' y_1' r_1' \varphi_1'; \quad Q_2 : x_2' y_2' r_2' \varphi_2'; \quad R_2 : x_3' y_3' r_3' \varphi_3'.$$

Wird nun die zweite Figur um den Winkel ψ gegen die erste gedreht, so ändern sich die Polarwinkel der zweiten Figur um diesen Betrag und die Koordinaten der gedrehten Punkte P_2', Q_2' R_2' werden folgende:

$$P_2' \quad x_1'' = r_1' \cos(\varphi_1' + \psi) \quad y_1'' = r_1' \sin(\varphi_1' + \psi)$$
$$Q_2' \quad x_2'' = r_2' \cos(\varphi_2' + \psi) \quad y_2'' = r_2' \sin(\varphi_2' + \psi)$$
$$R_2' \quad x_3'' = r_3' \cos(\varphi_3' + \psi) \quad y_3'' = r_3' \sin(\varphi_3' + \psi).$$

Die Verbindungslinie $P_1 P_2'$ hat zur Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ r_1' \cos(\varphi_1' + \psi) & r_1' \sin(\varphi_1' + \psi) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Oder ausgerechnet:

$$x(y_1 - y_1' \cos\psi - x_1' \sin\psi) + y(-x_1 + x_1' \cos\psi - y_1' \sin\psi)$$
$$+ (x_1 y_1' - y_1 x_1') \cos\psi + (x_1 x_1' + y_1 y_1') \sin\psi = 0.$$

Führt man

$$\sin\psi = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos\psi = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

wo

$$u = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$$

ist, ein, so ergibt sich die Gleichung:

$$x(y_1 - y_1' + 2x_1 u + (y_1 + y_1')u^2) + y(x_1' - x_1 - 2y_1' u - (x_1 + x_1')u^2)$$
$$+ (x_1 y_1' - y_1 x_1')(1 - u^2) + 2(x_1 x_1' + y_1 y_1')u = 0.$$

Analoge Gleichungen gelten für die Verbindungslinien $Q_1 Q_2'$ und $R_1 R_2'$. Die Bedingung dafür, dass sich die drei Verbindungslinien in einem Punkte schneiden, erhält man durch Nullsetzen der dreireihigen Determinante der Koeffizienten der drei Gleichungen, welche in u vom 6. Grade wird, da jene Koeffizienten quadratisch in u sind. Durch Nullsetzen der Diskriminante dieser Gleichung würde man die Bedingung dafür erhalten, dass die auf den gegebenen Bildern gewählten Punkte keine praktisch brauchbare Lösung der Aufgabe zulassen; leider ist dieser Weg wegen der Verwickelung der Formeln nicht gangbar.

Hingegen ist leicht einzusehen, dass die Lösung der Aufgabe dann versagt, wenn die 3 Punkte $P\,Q\,R$ mit den Standpunkten O_1 und O_2 in einer Ebene, mag sie nun horizontal oder geneigt sein, liegen. Man kann dann nämlich die beiden Bündel, die aus den Loten in den Standpunkten und den Strahlen, die von letzteren nach den Objektpunkten laufen, gebildet sind, noch auf mannigfache Weise so gegeneinander bewegen, dass

entsprechende Strahlen sich schneiden, ohne dass die Lote aufhören senkrecht zu stehen. Aus dem gleichen Grunde wird die Lösung ganz unsicher, wenn die Lotebenen durch die Strahlen des einen Bündels senkrecht auf den Ebenen stehen, die durch die entsprechenden Strahlen des andern Bündels und die Basis gebildet werden. In diesen Fällen ist noch eine unendlich kleine Bewegung, nämlich eine Drehung um das Lot des ersten Bündels möglich. Aus diesen Gründen wird man sich in der Regel nicht mit dem Zusammenpassen d r e i e r Strahlen begnügen, sondern eine grössere Zahl hereinziehen, aus welchen dann der Punkt O_{12} auf dem Wege der Ausgleichung hervorgeht.

III.

Das in den vorhergehenden Abschnitten auseinandergesetzte Verfahren erfährt eine beachtenswerte Erweiterung, wenn, wie es in der Praxis in der Regel der Fall sein wird, zur Bestimmung des Objektes nicht nur zwei, sondern mehrere Photographien zu Gebote stehen. Man wird dann zu allen vorkommenden Geraden und Ebenen Parallele durch einen festen Punkt O legen und ihre Richtung, bezw. Stellung durch den Schnitt mit einer horizontalen Bezugsebene in der Entfernung „Eins" von O bestimmen.[1]) Sobald von zwei Standpunkten O_i und O_k einige zusammengehörige Strahlen, welchen in der Bezugsebene die Punkte: $P_i\,Q_i\,R_i\ldots$, $P_k\,Q_k\,R_k\ldots$ entsprechen, gefunden sind, ist der Punkt O_{ik} (je nach den Verhältnissen mittels der Methode des ersten oder zweiten Abschnittes) zu ermitteln. Zwischen den Punkten der Bezugsebene bestehen nun mannigfache Beziehungen. Da, z. B., die beiden Dreiecke $P_i\,Q_i\,R_i$ und $P_k\,Q_k\,R_k$ in bezug auf den Punkt O_{ik} perspektivisch liegen, schneiden sich $P_i P_k$, $Q_i Q_k$, $R_i R_k$ in den Punkten einer Geraden die mit O zusammen die Stellung der Ebene PQR

---

[1]) Die hier verwendete Art Richtungen und Stellungen im Raum auf e i n e r Bezugsebene festzulegen, wird in der Krystallographie angewendet und führt dort den Namen „gnomonische Projektion oder Neumann'sche Polarprojektion."

bestimmt. Drei Punkte O_{ik}, deren Indices durch zyklische Vertauschung auseinander hervorgehen, liegen ebenfalls auf einer Geraden, die mit O zusammen die Stellung der Ebene der drei Standpunkte bestimmt. Hat man, um ein Beispiel zu geben, vier Standpunkte O_1, O_2, O_3, O_4, so gibt es sechs Punkte O_{ik}, die viermal zu je dreien auf einer Geraden liegen, wie olgt: $O_{12}\,O_{23}\,O_{13}$, $O_{23}\,O_{34}\,O_{24}$, $O_{34}\,O_{14}\,O_{13}$, $O_{12}\,O_{24}\,O_{14}$. Die vier Punkte $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$, welche den Strahlen von den Standpunkten nach einem Raumpunkt P entsprechen, bilden die Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen sechs Seiten durch die gleichnamigen Punkte O_{ik} hindurchgehen. Da sich der Höhenunterschied $h_p - h_1$ des Punktes P gegenüber O_1 gleich gross ergeben muss, von welcher Basis man auch ausgeht, erhält man die Beziehung:

$$h_p - h_1 = (h_2 - h_1)\frac{O_{12}P_2}{P_1P_2} = (h_3 - h_1)\frac{O_{13}P_3}{P_1P_3} = (h_4 - h_1)\frac{O_{14}P_4}{P_1P_4}.$$

Die Figur in der Bezugsebene ist ein vollständiges Schema aller Horizontal- und Vertikalwinkel, die in der aus dem Objekt und den Standpunkten gebildeten Raumfigur vorkommen. Will man etwa Azimut und Neigung der Verbindungslinie PQ zweier Objektpunkte wissen, so ziehe man die Verbindungslinien $P_1\,Q_1$, $P_2\,Q_2$, $P_3\,Q_3$, $P_4\,Q_4$. Diese müssen sich in einem Punkte schneiden, der mit O_0 verbunden das Azimut der Linie PQ liefert, während seine Entfernung von O_0 der Kotangente des Neigungswinkels gleich ist.

Die erwähnten Beziehungen gewähren eine überreiche Zahl von Kontrollen, welche zur Ausgleichung der aus den Punkten O_{ik} gebildeten Figur benützt werden können. Durch diese Figur ist das trigonometrische Netz der Standpunkte mit allen Winkeln bis auf den Massstab festgelegt. Sind die Beziehungen erfüllt, so bestehen auch keine Netzwidersprüche mehr. Die grossen Vorteile des Verfahrens werden nur durch den Umstand beeinträchtigt, dass dasselbe versagt, wenn das Objekt eben ist und die Standpunkte sich in der gleichen Ebene mit dem Objekt befinden, oder wenn das, wie in vielen Fällen der Praxis, auch

nur annähernd der Fall ist. Eine Rekonstruktion des Objektes aus zwei Aufnahmen ist dann ausgeschlossen. Aus drei oder mehreren Aufnahmen ist sie dagegen möglich, jedoch nicht auf dem hier eingeschlagenen Wege. Für den Fall dreier Aufnahmen, welche gegen den Meridian orientiert sind, ist die Rekonstruktion des Objektes bereits von Lambert[1]) geleistet worden und seine Lösung spielt als das Problem der sechs Punkte (wovon drei die Standpunkte und die drei übrigen Objektpunkte sind) in der Nautik eine gewisse, allerdings bescheidene Rolle. Für drei nicht orientierte Aufnahmen wird man auf ein bisher noch nicht behandeltes Problem der acht Punkte (drei Standpunkte und fünf Objektpunkte) geführt, während vier Aufnahmen auf ein anderes, von Lambert mittels einer Gleichung zweiten Grades sehr umständlich gelöstes Problem der acht Punkte (mit vier Standpunkten und vier Objektpunkten) führt.[2]) Alle diese Probleme können für besondere Aufgaben der Photogrammetrie von Bedeutung werden. Das eigentliche Anwendungsgebiet der Photogrammetrie setzt jedoch grössere Höhenunterschiede zwischen Standpunkten und Objektpunkten voraus und hiefür sind die im Vorstehenden entwickelten Methoden geeignet.

---

[1]) Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und ihrer Anwendung. Berlin 1765—72, 3. Band, S. 186.

[2]) Siehe auch Grunert: Über eine merkwürdige Relation zwischen den rechtwinkligen Koordinaten von vier Punkten in einer Ebene und den drei Winkeln, welche die vier von diesem Punkte nach einem fünften Punkt in derselben Ebene gezogenen geraden Linien mit einander einschliessen und über zwei wichtige geodätische Aufgaben. Archiv für Mathematik und Physik, 1. Band, S. 89.



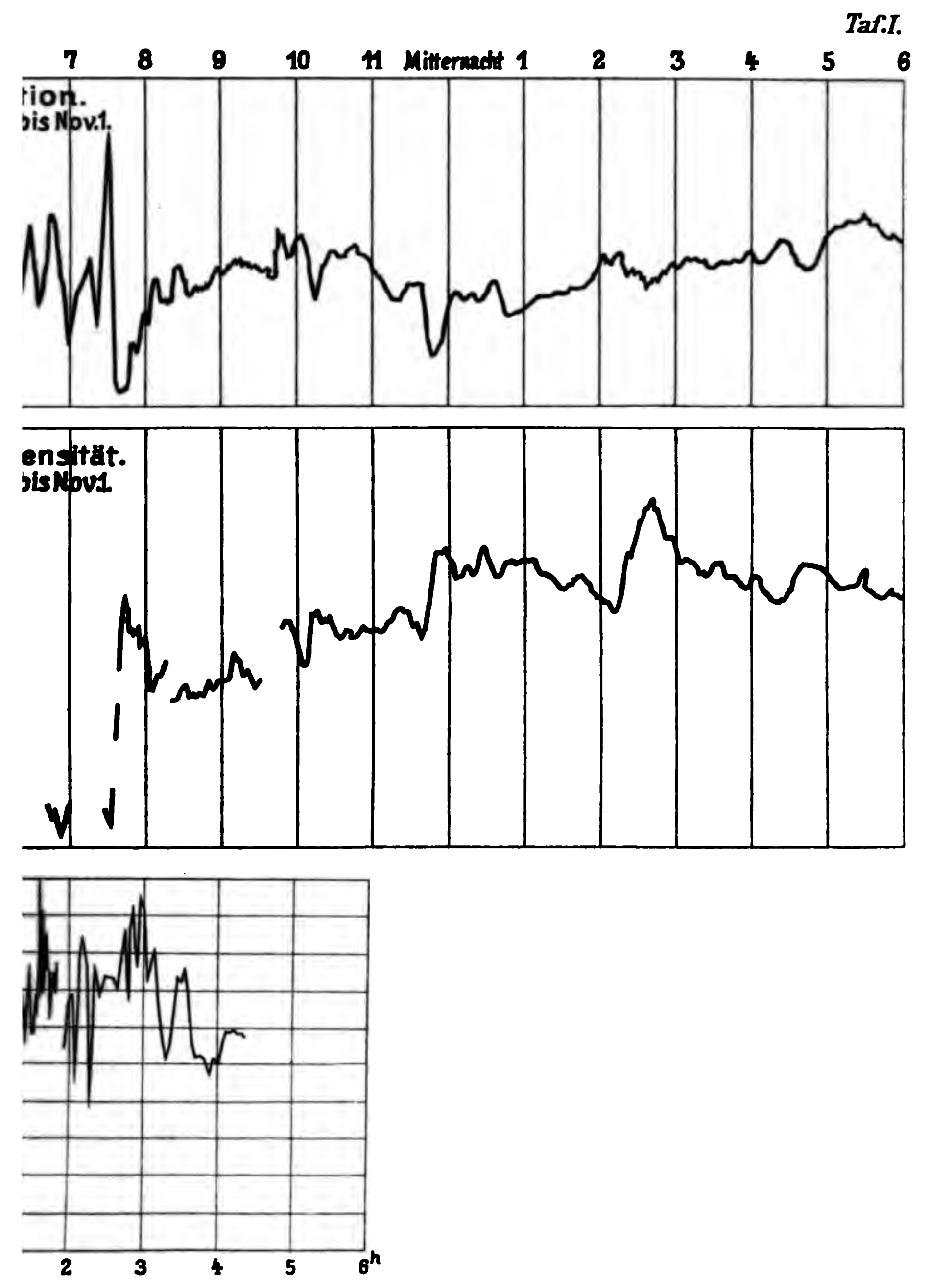
bestimmt. Drei Punkte O_{ik}, deren Indices durch zyklische Vertauschung auseinander hervorgehen, liegen ebenfalls auf einer Geraden, die mit O zusammen die Stellung der Ebene der drei Standpunkte bestimmt. Hat man, um ein Beispiel zu geben, vier Standpunkte O_1, O_2, O_3, O_4, so gibt es sechs Punkte O_{ik}, die viermal zu je dreien auf einer Geraden liegen, wie olgt: $O_{12}\,O_{23}\,O_{13}$, $O_{23}\,O_{34}\,O_{24}$, $O_{34}\,O_{14}\,O_{13}$, $O_{12}\,O_{24}\,O_{14}$. Die vier Punkte $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$, welche den Strahlen von den Standpunkten nach einem Raumpunkt P entsprechen, bilden die Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen sechs Seiten durch die gleichnamigen Punkte O_{ik} hindurchgehen. Da sich der Höhenunterschied $h_p - h_1$ des Punktes P gegenüber O_1 gleich gross ergeben muss, von welcher Basis man auch ausgeht, erhält man die Beziehung:

$$h_p - h_1 = (h_2 - h_1)\frac{O_{12}P_2}{P_1P_2} = (h_3 - h_1)\frac{O_{13}P_3}{P_1P_3} = (h_4 - h_1)\frac{O_{14}P_4}{P_1P_4}.$$

Die Figur in der Bezugsebene ist ein vollständiges Schema aller Horizontal- und Vertikalwinkel, die in der aus dem Objekt und den Standpunkten gebildeten Raumfigur vorkommen. Will man etwa Azimut und Neigung der Verbindungslinie PQ zweier Objektpunkte wissen, so ziehe man die Verbindungslinien $P_1\,Q_1$, $P_2\,Q_2$, $P_3\,Q_3$, $P_4\,Q_4$. Diese müssen sich in einem Punkte schneiden, der mit O_0 verbunden das Azimut der Linie PQ liefert, während seine Entfernung von O_0 der Kotangente des Neigungswinkels gleich ist.

Die erwähnten Beziehungen gewähren eine überreiche Zahl von Kontrollen, welche zur Ausgleichung der aus den Punkten O_{ik} gebildeten Figur benützt werden können. Durch diese Figur ist das trigonometrische Netz der Standpunkte mit allen Winkeln bis auf den Massstab festgelegt. Sind die Beziehungen erfüllt, so bestehen auch keine Netzwidersprüche mehr. Die grossen Vorteile des Verfahrens werden nur durch den Umstand beeinträchtigt, dass dasselbe versagt, wenn das Objekt eben ist und die Standpunkte sich in der gleichen Ebene mit dem Objekt befinden, oder wenn das, wie in vielen Fällen der Praxis, auch

Taf. I.



Lith. Hub. Köhler, Mch n



Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 7. Mai 1904.

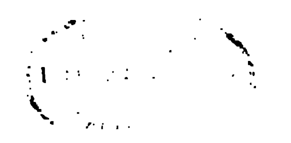
1. Herr SIEGMUND GÜNTHER macht eine Mitteilung: „Das Pothenot'sche Problem auf der Kugelfläche."

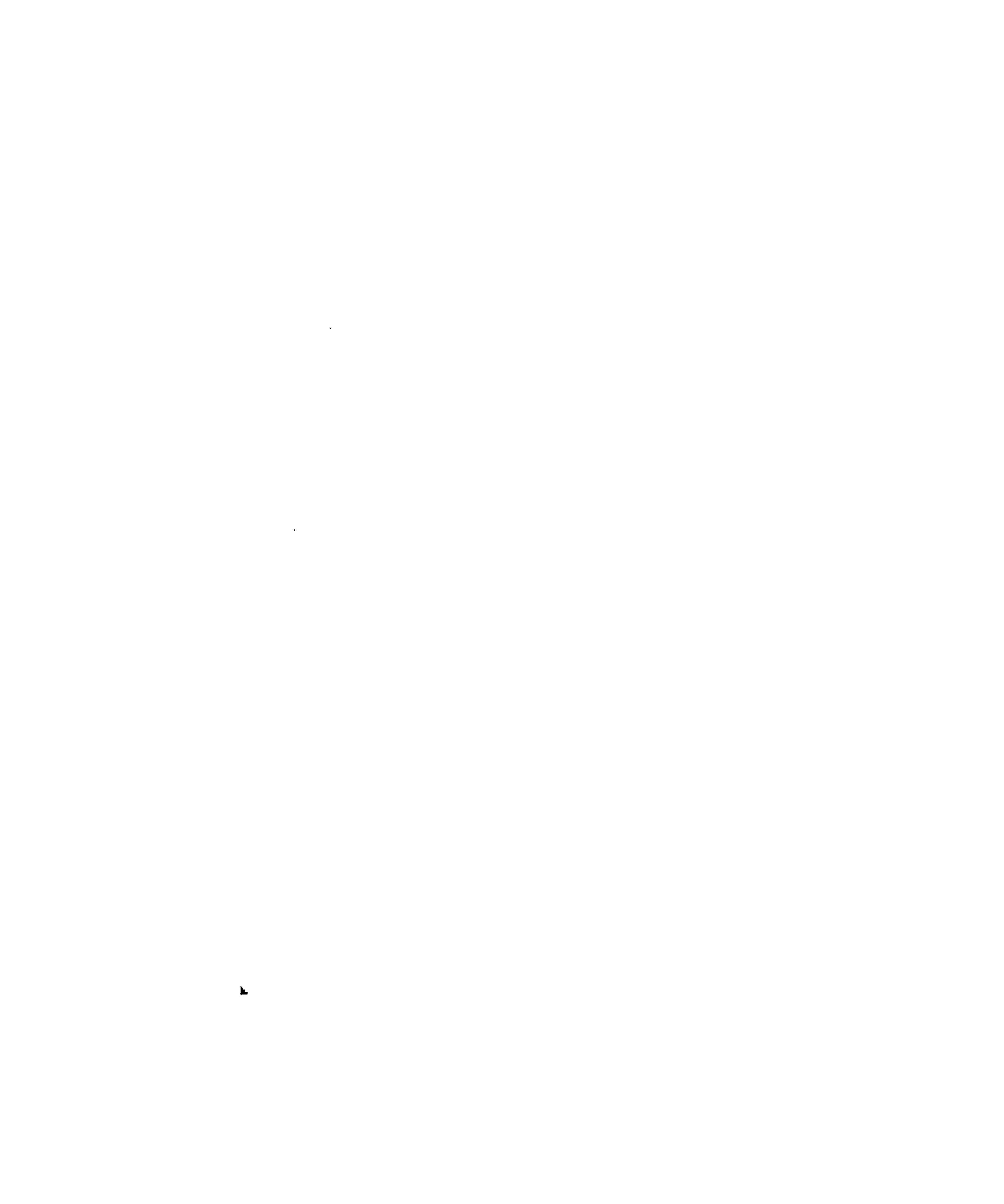
Die Aufgabe, das Pothenot'sche Problem — Rückwärtseinschneiden in der Geodäsie — auf die Kugelfläche zu übertragen, kommt sowohl in der Photogrammetrie, wie auch in der Lehre von der geographischen Ortsbestimmung vor. Eine explizite Lösung derselben ist noch nicht gegeben worden. Es wird die Gleichung achten Grades aufgestellt, welche die gesuchte Grösse liefert; da nur gerade Potenzen der letzteren auftreten, so hat es bei der Auflösung einer biquadratischen Gleichung sein Bewenden.

2. Herr FERD. LINDEMANN legt eine Abhandlung des Herrn CARL SIGISMUND HILBERT: „Über das Prinzip der kleinsten Wirkung" vor.

3. Herr AUREL VOSS legt eine Arbeit: „Beiträge zur Theorie der unendlich kleinen Deformationen einer Fläche" vor.

Diese Untersuchungen betreffen im Anschluss an die vom Verfasser bereits 1895 auf der Naturforscherversammlung in





Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 7. Mai 1904.

1. Herr Siegmund Günther macht eine Mitteilung: „Das Pothenot'sche Problem auf der Kugelfläche."

Die Aufgabe, das Pothenot'sche Problem — Rückwärtseinschneiden in der Geodäsie — auf die Kugelfläche zu übertragen, kommt sowohl in der Photogrammetrie, wie auch in der Lehre von der geographischen Ortsbestimmung vor. Eine explizite Lösung derselben ist noch nicht gegeben worden. Es wird die Gleichung achten Grades aufgestellt, welche die gesuchte Grösse liefert; da nur gerade Potenzen der letzteren auftreten, so hat es bei der Auflösung einer biquadratischen Gleichung sein Bewenden.

2. Herr Ferd. Lindemann legt eine Abhandlung des Herrn Carl Sigismund Hilbert: „Über das Prinzip der kleinsten Wirkung" vor.

3. Herr Aurel Voss legt eine Arbeit: „Beiträge zur Theorie der unendlich kleinen Deformationen einer Fläche" vor.

Diese Untersuchungen betreffen im Anschluss an die vom Verfasser bereits 1895 auf der Naturforscherversammlung in



Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 7. Mai 1904.

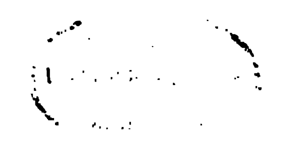
1. Herr Siegmund Günther macht eine Mitteilung: „Das Pothenot'sche Problem auf der Kugelfläche."

Die Aufgabe, das Pothenot'sche Problem — Rückwärtseinschneiden in der Geodäsie — auf die Kugelfläche zu übertragen, kommt sowohl in der Photogrammetrie, wie auch in der Lehre von der geographischen Ortsbestimmung vor. Eine explizite Lösung derselben ist noch nicht gegeben worden. Es wird die Gleichung achten Grades aufgestellt, welche die gesuchte Grösse liefert; da nur gerade Potenzen der letzteren auftreten, so hat es bei der Auflösung einer biquadratischen Gleichung sein Bewenden.

2. Herr Ferd. Lindemann legt eine Abhandlung des Herrn Carl Sigismund Hilbert: „Über das Prinzip der kleinsten Wirkung" vor.

3. Herr Aurel Voss legt eine Arbeit: „Beiträge zur Theorie der unendlich kleinen Deformationen einer Fläche" vor.

Diese Untersuchungen betreffen im Anschluss an die vom Verfasser bereits 1895 auf der Naturforscherversammlung in



Lübeck angedeuteten Resultate die allgemeinste Deformation dieser Art und ihrer Beziehungen zu den endlichen und unendlich kleinen Biegungen der Flächen.

4. Herr Wilhelm Muthmann teilte, unter Vorzeigung von Präparaten, die Resultate einer Untersuchung mit, die er in Gemeinschaft mit seinem Schüler Fraunberger „Über die Passivität der Metalle“ ausgeführt hat. Dieselben werden anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

Ausser dem Eisen und dem Chrom zeigen besonders die seltenen Metalle Vanadin und Niob die Eigenschaft der Passivierbarkeit, das heisst die Fähigkeit, einen Zustand anzunehmen, in der die betreffenden Metalle von Säuren, Luftfeuchtigkeit und ähnlichen Agentien nicht angegriffen werden. Als Ursache für diesen merkwürdigen Zustand, in dem die genannten Metalle edler als Silber, fast so unangreifbar wie Gold und Platin sind, erkannte der Vortragende eine dünne Oberflächenschicht, welche aus einer Lösung von Sauerstoff im Metall besteht und die sich bei vielen Metallen schon beim Liegen an der Luft ausbildet. Als Mass für den Grad der Passivität diente die elektromotorische Kraft, welche eine Kombination der betreffenden Elemente mit der Normal-Quecksilberelektrode zeigt.

Das Pothenot'sche Problem auf der Kugelfläche.

Von S. Günther.

(Eingelaufen 7. Mai.)

Jede Aufgabe der ebenen Polygonometrie gestattet eine doppelte räumliche Erweiterung. An die Stelle der ebenen Figur von n Seiten kann eine solche von $(n-1)$ Seiten treten, während der n^{te} Eckpunkt in den Raum verlegt wird, so dass man es also mit einer $(n-1)$ seitigen Pyramide zu tun bekommt; andererseits kann man das ebene Polygon durch ein sphärisches ersetzen. Dies trifft also natürlich auch zu für die fälschlich als Pothenot'sches Problem[1]) bezeichnete Viereckskonstruktion. Dass es von Interesse ist, beide Ausdehnungen auf die dritte Dimension auch für dieses Problem durchzuführen, hat Finsterwalder dargetan, und zwar handelt es sich in beiden Fällen um photogrammetrische Anwendungen. Kennt man die drei Winkel, welche die von einem ausserhalb der Ebene des Dreieckes ABC gelegenen Punkte D nach den Eckpunkten gezogenen Visierstrahlen wechselseitig einschliessen,

[1]) Dasselbe wurde ziemlich gleichzeitig, und zwar in vollster gegenseitiger Unabhängigkeit, zu Anfang des XVII. Jahrhunderts von dem Holländer W. Snellius und von dem Württemberger Schickhart zeichnerisch gelöst. Beide hätten also ein Anrecht darauf, als Namengeber geehrt zu werden, wogegen Pothenot auf die gleiche Konstruktion erst 1692, anlässlich der Kartierung des Flusses Eure, geführt wurde. Vgl. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, 2. Band, Stuttgart 1888, S. 251; v. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, 2. Band, ebenda 1890, S. 177; Günther, Handbuch der mathematischen Geographie, ebenda 1890, S. 560.

so kann die Lage des Punktes D rechnerisch oder konstruktiv ermittelt werden.[1]) Und wenn es sich um die Bestimmung der sogenannten Kernpunkte handelt, so leistet das sphärische Problem subsidiäre Dienste.[2]) Dasselbe ist aber auch dazu berufen, eine gewisse Rolle bei der geographischen Ortsbestimmung zu spielen, und demgemäss gewinnt es für die wissenschaftliche Geographie eine zweifache Bedeutung. Dieser Umstand wird es rechtfertigen, dass ihm in einer besonderen Ausführung näher getreten werden soll.

In der Sphärik kommt schon frühzeitig vor jenes Kugelviereck, welches durch Pol, Zenit und zwei Sternörter bestimmt ist. Die Griechen allerdings hatten keine Veranlassung, sich mit ihm zu beschäftigen, wohl aber wurden die Araber durch die von ihnen mit grösstem Eifer behandelten gnomonischen Fragen darauf geführt.[3]) Späterhin nötigte zur analytischen Untersuchung desselben sphärischen Viereckes das von den Nautikern viel erörterte Douwes'sche Problem,[4])

---

[1]) Finsterwalder, Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen, Abhandl. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch., II. Klasse, 22. Band, 2. Abteilung, S. 231.

[2]) Finsterwalder-Scheufele, Das Rückwärtseinschneiden im Raume, Sitzungsber. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch., II. Klasse, 33. Band, S. 591 ff.

[3]) Die betreffenden Vorschriften finden sich in dem von Ibn Junis um das Jahr 1000 n. Chr. bearbeiteten „Hakemitischen" Tafeln (Caussin, Le livre de la grande table Hakémite, An XII = 1804). Ableitung und Beweis fehlen, und der von R. Wolf ausgegangene, an sich durch Eleganz ausgezeichnete Rekonstruktionsversuch (Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur, 3. Halbband, Zürich 1892, S. 78) trifft wohl kaum das Richtige. Es lassen sich nämlich die Formeln des Ibn Junis nach v. Braunmühl (Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie, Abhandl. d. Kaiserl. Leop.-Karol. Akademie, 71. Band, S. 24 ff.) ziemlich einfach durch die Orthogonalprojektion der Kugel gewinnen, also durch ein Verfahren, welches bereits im Altertum vielseitige Anwendung gefunden hatte und den arabischen Mathematikern näher als irgend ein anderes liegen musste.

[4]) Douwes, Verhandeling, om buiten den middag op zee de waare middagsbreedte te vinden, Haarlem 1755.

welches die geographische Breite aus zwei Höhen des nämlichen Sternes und der Zwischenzeit zwischen beiden Beobachtungen zu berechnen verlangt, allein auch da genügt eine quadratische Gleichung.[1]) Das Pothenot'sche Problem dagegen gestattet keine so einfache Auflösung.

Dasselbe ist bis jetzt erst ein paarmal in der Literatur aufgetreten. Als der erste hat es anscheinend Grunert[2]) vorgenommen, der aber auf praktische Verwendung gar keine Rücksicht nahm. Nächstdem suchte es Rümker[3]) für die Polhöhenbestimmung nutzbar zu machen, und Erwähnung wird seiner auch von Weyer[4]) getan. Rümkers Methode stimmt mit derjenigen Grunerts vollkommen überein. Übrigens ist seine Art der Einkleidung eine umständlichere, als es an und für sich geboten erscheint. Er setzt nämlich voraus, dass von drei ihrer Lage nach bekannten Fixsternen gleichzeitig die Azimutaldifferenzen gemessen worden seien, und berechnet sodann deren Zenitdistanzen. Alsdann aber muss erst noch ein

---

[1]) Die Benennung ist auch diesmal nicht die geschichtlich korrekte, denn Maupertius (Astronomie nautique, Paris 1751, S. 41 ff.) hatte schon vorher eine freilich umständliche Lösung der Douwes' Namen tragenden Aufgabe erbracht. Vgl. auch Mendoza, Recherches sur les solutions des principaux problèmes de l'astronomie nautique, London 1797.

[2]) Grunert, Das Pothenot'sche Problem auf der Kugel, Archiv d. Math. u. Phys., 7. Teil, S. 104 ff.

[3]) Rümker, Handbuch der Schiffahrtskunde, Hamburg 1850, S. 162 ff.

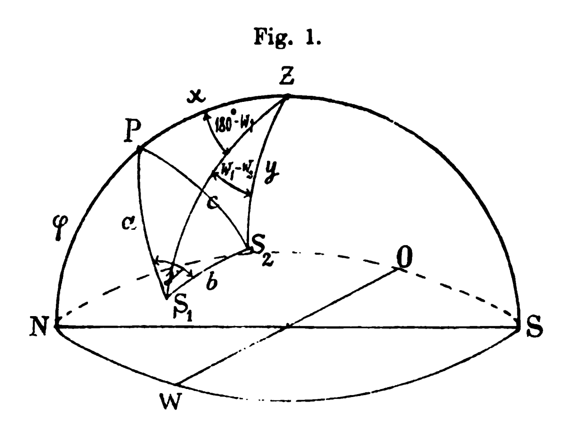
[4]) Weyer, Zeit- und Ortsbestimmung, Allgemeine Enzyklopädie der Physik (von G. Karsten), 1. Band, Leipzig 1869, S. 738; Vorlesungen über nautische Astronomie, Kiel 1871, S. 99). Wenn man die Angaben dieses Autors über verwandte ältere Arbeiten nachliest, so muss man eigentlich auf den Gedanken kommen, jenes Problem der Kugelgeometrie besitze tatsächlich eine ältere Vorgeschichte. Aus dem XVIII. Jahrhundert werden D. Bernoulli, Hermann, L. Euler, Krafft, F. C. Maier und Pézenas, aus dem XX. werden J. J. v. Littrow, Brünnow, Boehm in dieser Hinsicht namhaft gemacht. Sieht man aber genauer zu, so überzeugt man sich, dass alle die Aufgaben, mit denen sich die Genannten befassen, weit einfacherer Natur sind. Bei keiner dieser Arten der Breitenbestimmung ist die Schlussgleichung eine höhere als eine quadratische; ja bei richtiger Behandlung reicht man sogar, wie u. a. D. Bernoulli (Comm. Acad. Imp. Petrop., 4. Band, 1735) zeigt, mit einer linearen Gleichung aus.

weiteres Dreieck Zenit-Pol-Stern in Angriff genommen werden. Einfacher jedoch und natürlicher wird die Problemstellung die folgende sein:

Im nämlichen Zeitpunkte sind von zwei Sternen, deren Aequatorkoordinaten man kennt, die Azimutalwinkel gemessen worden. Alsdann ist das Pothenot'sche Problem der Sphärik anzuwenden auf das Viereck, welches jene beiden Sterne mit Pol und Zenit bestimmen.

In Fig. 1 bezeichne S den Südpunkt, W den Westpunkt, N den Nordpunkt, O den Ostpunkt des Horizontes, P den

Fig. 1.



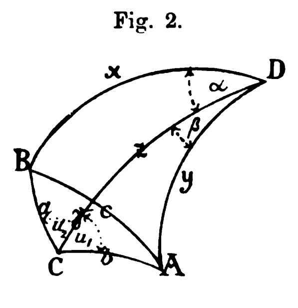
Pol, Z den Scheitelpunkt. S_1 und S_2 sollen die beiden erwähnten Sterne sein, und dann kennt man die Poldistanzen PS_1 und PS_2, sowie die Rektaszensionsdifferenz $\sphericalangle S_1 P S_2$. Das Dreieck $P S_1 S_2$ ist vollständig bekannt, somit auch die Seite $S_1 S_2$. Durch unmittelbare Beachtung hat man gefunden die Azimute $w_1 = \sphericalangle S Z S_1$ und $w_2 = \sphericalangle S Z S_2$; demnach ist auch $\sphericalangle S_1 Z P = 180^0 - w_1$ und $\sphericalangle S_2 Z S_1 = w_1 - w_2$ ermittelt. Im Viereck $P Z S_2 S_1$ kennt man die Seiten $P S_1$ und $S_1 S_2$, die eine Diagonale $P S_2$ und die beiden Winkel $(180^0 - w_1)$ und $(w_1 - w_2)$, welche die andere Diagonale mit den beiden unbekannten Seiten $Z S_2$ und $P Z$ einschliesst. Diese letztere ist das Komplement der Polhöhe φ.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man in der Praxis von diesem Verfahren häufiger Gebrauch machen werde, ist keine grosse, obwohl Rümker (a. a. O) ein Beispiel durchrechnet. Einmal ist hinderlich, dass zwei Beobachter vorausgesetzt werden, und weiterhin fallen, wie sich zeigen wird, die Schlussformeln viel zu kompliziert aus, um eine leichte Handhabung zu ermöglichen. Abgesehen davon wäre der Vorteil erreicht, den Refraktionsfehler gänzlich ausschalten zu können, falls nicht die doch nur sehr selten bemerkbare Lateralrefraktion sich geltend machen sollte.[1]) Die hier gegebene Art der Behandlung will lediglich als eine solche angesehen werden, die ein geometrisches Interesse darbietet. Grunert und Rümker bedienen sich eines Kunstgriffes, der zunächst zu übersichtlicheren Formeln zu führen scheint, in unserem Falle hingegen, wenn die Berechnung der Seite PZ direkt angestrebt wird, keinen Vorteil gewährt. Unsere Absicht ist es, eine Gleichung aufzustellen, in welcher φ als einzige Unbekannte vorkommt. Dazu bedarf es zwar einiger nicht ganz einfachen Eliminationen, aber unter dem mathematischen Gesichtspunkte lässt sich das Ziel in durchaus befriedigender Weise erreichen.

Um ganz unabhängig von jeder astronomisch-geographischen oder geodätischen Voraussetzung vorzugehen, legen wir das beliebig gewählte sphärische Viereck $ACBD$ (Fig. 2) zu grunde. In ihm kennen wir Seite $BC = a$, Seite $AC = b$, Diagonale $AB = c$, mithin auch $\sphericalangle ACB = \gamma$ gleich

$$\arccos[(\cos c - \cos a \cos b) : \sin a \sin b].$$

Fig. 2.



Wenn ferner noch die Diagonale CD gezogen wird, so sind $\sphericalangle BDC = \alpha$ und $\sphericalangle CDA = \beta$ gegeben. Gesucht wird Seite $BD = x$.

Die Gleichungen, auf welche man sich geführt sieht, wenn man den nächstliegenden Weg zur Berechnung der gesuchten Werte beschreitet, gestalten sich bei beiden Raumausdehnungen

des Pothenot'schen Problemes gleich unhandlich. Setzen wir noch $AD = y$, $CD = z$, so liefert der Kosinussatz ohneweiters drei Bestimmungsgleichungen für die drei Gleichungen x, y, z; ebenso, wie dies zutrifft, wenn man in dem vorbesprochenen Tetraëder nach Finsterwalder-Scheufele mit a, b, c die Seiten des Basisdreieckes, mit α, β, γ die diesen an der Spitze gegenüberliegenden Winkel, endlich mit x, y, z die Sehstrahlen so bezeichnet, dass a mit x und z, b mit z und y, c mit y und x je ein Seitendreieck bestimmt, und sodann den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie zur Anwendung bringt. Wir stellen die beiden Tripel von Gleichungen nebeneinander, wie folgt:[1])

I. Kugelfläche.

$$\begin{aligned} \cos x \cos z + \sin x \sin z \cos \alpha &= \cos a, \\ \cos z \cos y + \sin z \sin y \cos \beta &= \cos b, \\ \cos y \cos x + \sin y \sin x \cos (\alpha + \beta) &= \cos c. \end{aligned}$$

II. Tetraëder.

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 - 2\,x\,z \cos \alpha &= a^2, \\ z^2 + y^2 - 2\,z\,y \cos \beta &= b^2, \\ y^2 + x^2 - 2\,y\,x \cos \gamma &= c^2. \end{aligned}$$

---

[1]) Es musste hier eine unwesentliche Änderung der (a. a. O.) gewählten Bezeichnungsweise platzgreifen, um den Parallelismus zwischen den beiden Systemen recht klar hervortreten zu lassen. Diese letzteren müssen, wenn der vierte Eckpunkt in die Basisebene fällt, und wenn andererseits der Radius der Kugel unendlich gross wird, zur Identität gelangen. Wirklich wird bei ersterer Voraussetzung $\gamma = \alpha + \beta$; die goniometrischen Funktionen aber kann man durch ihre Reihen ausdrücken und von diesen nur die ersten Glieder beibehalten. Nehmen wir also etwa die dritte Gleichung von System I heraus und verfahren mit ihr in diesem Sinne, so erhalten wir:

$$\left(1 - \frac{y^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + y\,x \cos \gamma = 1 - \frac{c^2}{2},$$

$$2 - y^2 - x^2 + \tfrac{1}{2}\,y^2 x^2 + 2\,y\,x \cos \gamma = 2 - c^2.$$

Da $y^2 x^2$ einer tieferen Grössenordnung angehört, so fällt dieses Produkt ausser betracht; und man ist folglich zu Gleichung 3 von System I gekommen. Solchergestalt lassen sich überhaupt in allen Fällen die beiden Ausdehnungen eines planimetrischen Problemes auf den Raum als in ihrem inneren Wesen übereinstimmend nachweisen.

Im zweiten Falle würde eine Gleichung sechsten Grades zu lösen sein. Weit schlimmer jedoch, als bei System II, würde sich schon die Wegschaffung auch nur einer Unbekannten bei System I gestalten; ein noch weiteres Vorgehen wäre geradezu untunlich. Man wird vielmehr bestrebt sein müssen, andere unbekannte Grössen einzuführen.

Als solche empfehlen sich Seite $BD = x$, Seite $AD = y$, $\sphericalangle ACD = u_1$ und $\sphericalangle DCB = u_2$. Die vier Bedingungsgleichungen sind jetzt die nachstehenden:

$$\text{I)} \qquad \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos(\alpha + \beta) = \cos c,$$

$$\text{II)} \qquad u_1 + u_2 = \gamma,$$

$$\text{III)} \qquad \frac{\sin x}{\sin u_2} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{1}{m},$$

$$\text{IV)} \qquad \frac{\sin y}{\sin u_1} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{1}{n}.$$

Es gilt, aus denselben die drei Grössen y, u_1, u_2 zu eliminieren. Das geschieht, indem man u_2 aus III), u_1 aus IV) isoliert und beide Werte in II) einsetzt, indem dann nur zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und y übrig bleiben. Zunächst ist

$$\sin u_2 = m \sin x, \quad \sin u_1 = n \sin y;$$

aus Gleichung II) folgt

$$\cos u_2 \cos u_1 - \sin u_2 \sin u_1 = \cos \gamma,$$

und so erhält man weiter:

$$\cos u_2 \cos u_1 = \cos \gamma + m n \sin x \sin y,$$

$$(1 - m^2 \sin^2 x)(1 - n^2 \sin^2 y) = (\cos \gamma + m n \sin x \sin y)^2,$$

$$1 - m^2 \sin^2 x - n^2 \sin^2 y = \cos^2 \gamma + 2 m n \cos \gamma \sin x \sin y.$$

Ordnet man, indem man $\sin x = \xi$, $\sin y = \eta$ setzt, die letztere Gleichung um, so nimmt sie die folgende einfachere Gestalt an:

$$\text{V)} \qquad m^2 \xi^2 + 2 m n \cos \gamma \, \xi \eta + n^2 \eta^2 = \sin^2 \gamma.$$

Die Gleichung I) können wir ähnlich umgestalten:

$$\cos x \cos y = \cos c - \sin x \sin y \cos(\alpha + \beta),$$
$$(1 - \xi^2)(1 - \eta^2) = [\cos c - \xi\,\eta \cos(\alpha + \beta)]^2,$$

$$\text{VI)}\quad \xi^2 \eta^2 \sin^2(\alpha + \beta) + 2\cos c \cos(\alpha + \beta)\,\xi\,\eta - \xi^2 - \eta^2 = -\sin^2 c.$$

Nunmehr besteht keine Schwierigkeit mehr, η mit Hilfe der Sylvester'schen Determinante zu beseitigen, indem wir zuvor beide Gleichungen nach Potenzen von η ordnen. So findet sich als neues Paar:

$$\eta^2[1 - \xi^2 \sin^2(\alpha + \beta)] - \eta \cdot 2\,\xi \cos c \cos(\alpha + \beta) + (\xi^2 - \sin^2 c) = 0,$$
$$\eta^2 \cdot n^2 + \eta \cdot 2\,\xi\,m\,n \cos\gamma + (\xi^2 m^2 - \sin^2\gamma) = 0.$$

Die Elimination von η liefert die Schlussgleichung

$$\text{VII)}\quad \begin{vmatrix} 1-\xi^2\sin^2(\alpha+\beta) & -2\xi\cos c\cos(\alpha+\beta) & \xi^2 - \sin^2 c & 0 \\ 0 & 1-\xi^2\sin^2(\alpha+\beta) & -2\xi\cos c\cos(\alpha+\beta) & \xi^2 - \sin^2 c \\ n^2 & 2\,\xi\,m\,n\cos\gamma & \xi^2 m^2 - \sin^2\gamma & 0 \\ 0 & n^2 & 2\,\xi\,m\,n\cos\gamma & \xi^2 m^2 - \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Rechnet man die Determinante aus und beachtet, dass $\xi = \sin x = \sin(90^0 - \varphi) = \cos\varphi$ ist, so stellt sich die Schlussgleichung in expliziter Form folgendermassen dar:

$$\begin{aligned}
\text{VIII)}\quad & \cos^8\varphi\, m^4 \sin^2\gamma \sin^4(\alpha + \beta) \\
& - 2\cos^6\varphi\,(m^4 \sin^2(\alpha+\beta) + 2\,m^3 n \cos c \cos\gamma \sin^2(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) \\
& \qquad + 2\,m^2 n^2 \cos^2\gamma \sin^2(\alpha+\beta) + m^2 \sin^2\gamma \sin^2(\alpha+\beta) \\
& \qquad - 2\,m\,n^3 \cos c \sin^2 c \cos\gamma \cos(\alpha+\beta)) \\
& + \cos^4\varphi\,(m^4 + 4\,m^3 n \cos c \cos\gamma \cos(\alpha+\beta) + 4\,m^2 n^2 \cos^2\gamma \\
& \qquad + 4\,m^2 n^2 \cos^2(\alpha+\beta) + m^2 n^2 \sin^2 c \sin^2(\alpha+\beta) \\
& \qquad + 4m^2 \sin^2\gamma \sin^2(\alpha+\beta) + 4\,m\,n^3 \sin^2 c \cos c \cos\gamma \cos(\alpha+\beta) \\
& \qquad + 4\,m\,n \cos c \sin n^2\gamma \cos\gamma \sin^2(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) \\
& \qquad + \sin^2\gamma \sin^2(\alpha+\beta) - n^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- 2\cos^2\varphi\,(+\,m^2 \sin^2\gamma - 2\,m^2 n^2 \sin^2 c \cos^2\gamma \\
&\qquad + 2\,m\,n^3 \sin^2 c \cos c \cos\gamma \cos(\alpha+\beta) \\
&\qquad + 2\,m\,n \cos c \sin^2\gamma \cos\gamma \cos(\alpha+\beta) - n^4 \sin^2 c \\
&\qquad + 2\,n^2 \cos^2 c \sin^2\gamma \cos^2(\alpha+\beta) + 2\sin^4\gamma \sin^2(\alpha+\beta)) \\
&+ (\sin^4\gamma - n^4 \sin^4 c) = 0.
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung achten Grades ausschliesslich gerade Potenzen der Unbekannten $\cos\varphi$ aufweist, so reduziert sie sich sofort auf eine biquadratische, deren weitere Behandlung keine sachlichen Schwierigkeiten darbietet. Zuletzt ist $\alpha = 180^0 - w_1$, $\beta = w_1 - w_2$ zu setzen. Es ist zu bemerken, dass die Gleichung um nichts verwickelter als diejenige ist, welche Grunert und Rümker für die Hilfsgrösse tang $\frac{1}{2}(u_1 - u_2)$ ableiten; kennt man letztere, so hat erst wieder ein recht umständlicher Kalkul zur Bestimmung von $x = 90^0 - \varphi$ einzusetzen. Unsere Gleichung VIII) andererseits ergibt unmittelbar die geographische Breite als Funktion der äquatorialen Koordinaten jener beiden Sterne, deren Azimute gemessen worden waren, und damit zugleich die relativ einfachste Auflösung für das Pothenot'sche Problem auf der Sphäre.



Über das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Von **Carl Sigismund Hilbert.**

(Eingelaufen 7. Mai.)

Das Prinzip der kleinsten Wirkung hat eine ältere Geschichte und eine neuere. In der älteren Geschichte desselben handelt es sich, kurz gesagt, um die Beziehung einer mathematischen Formel zu ihrer metaphysischen Deutung, in der neueren Geschichte um seine Beziehung zum d'Alembert'schen Prinzip.

Es ist wesentlich das Verdienst von Hölder[1]) und Voss,[2]) nicht allein eine klare und bestimmte Formulierung des genannten Prinzipes gegeben zu haben, sondern auch gleichzeitig eine Gebrauchsanweisung für alle in der Mechanik denkbaren Fälle, sei es, dass die Zeit explicite in der Kräftefunktion oder in den Bedingungsgleichungen auftritt, oder dass keine Kräftefunktion existiert, oder dass die Bedingungsgleichungen durch einen Pfaff'schen Ausdruck gegeben sind, geliefert zu haben, alles dies auch für den Fall allgemeiner Koordinaten.

Von nicht geringerer Bedeutung für das Verständnis des Prinzipes sind die vorangegangenen Arbeiten über Variationsrechnung von A. Mayer, und die Anwendung derselben auf das Prinzip.

---

[1]) Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertius, Göttinger Nachrichten 1896.

[2]) Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertius, ibid. 1900.

Mayer[1]) und ein Jahr später Helmholtz[2]) im Anschlusse an ersteren gingen auf Lagrange zurück und zeigten in besonderen Fällen, die allerdings mechanisch nicht so allgemein sind, wie die Voraussetzungen, die Hölder und Voss machen, dass die Lagrange'schen Behauptungen tatsächlich richtig sind.

Damit wurde der Vorwurf auch entkräftet, den Jacobi, von dem die neuere Geschichte des Prinzipes datiert werden kann, gegen Lagrange erhob, indem er ein besonderes Prinzip formulierte, in welchem er bekanntlich aus dem Aktionsintegrale die Zeit gänzlich eliminierte.

Die folgende Arbeit wird das Lagrange'sche Resultat bestätigen, dass die gesamte Mechanik auf das Prinzip der kleinsten Wirkung gegründet werden kann. Wir werden dann in § 7 sowohl die Arbeiten von Hölder und Voss als diejenigen von Mayer und Helmholtz nochmals besprechen.

§ 1. Die Differentialgleichungen der Dynamik.

Wir betrachten die Bewegung eines Systemes von n Punkten mit den Massen m_i und den Koordinaten $x_i\, y_i\, z_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Diese Koordinaten seien wiederum dargestellt als Funktionen von $\mu = 3\,n$ neuen Variabelen q_i $(i = 1, 2, \ldots 3\,n)$.

Die halbe lebendige Kraft sei T und U die Kräftefunktion, die ausser den Koordinaten q noch die Zeit t explicit enthalten soll.

Was die Bedingungsgleichungen anbetrifft, so wollen wir zwei Fälle unterscheiden. Es soll sowohl der Fall betrachtet werden, dass die k Bedingungsgleichungen die Zeit t nicht explicit enthalten und von der Form

---

[1]) Die beiden allgemeinen Sätze der Variationsrechnung, welche den beiden Formen des Prinzips der kleinsten Aktion in der Dynamik entsprechen; Berichte der K. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Novb. 1886.

[2]) Zur Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, März 1887; Gesammelte Abhandlungen Bd. 3, p. 249 ff.

(1) $$\omega_i (q_1, q_2, \ldots q_\mu) = 0$$

seien, als auch der andere Fall, dass die Bedingungsgleichungen t explicit enthalten:

(2) $$\tilde{\omega}_i (q_1, q_2, \ldots q_\mu, t) = 0.$$

Als die zweite Form der Lagrange'schen Differentialgleichungen der Bewegung, wenn keine Bedingungsgleichungen vorhanden sind, bezeichnen wir das System von $3n$ Gleichungen

(3) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Durch dieselben Gleichungen wird aber auch noch die zweite Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen dargestellt, falls Bedingungsgleichungen der Form (1) oder der Form (2) vorhanden sind,[1]) dabei aber $\mu = 3n - k$ Koordinaten q so gewählt sind, dass die k Bedingungsgleichungen identisch erfüllt sind. Die Anzahl der Gleichungen (3) ist dann $3n - k = \mu$.

Statt der Form (3) wollen wir uns auch der Form:

(4) $$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_i}; \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'},$$

die sich nur in der Bezeichnungsweise von (3) unterscheidet, bedienen.

Ferner wollen wir uns auch der Hamilton'schen Form der Bewegungsgleichungen bedienen. Diese Form, welche aus den Lagrange'schen Gleichungen gefolgert wird, ist, wenn man $H = T - U$ setzt, und in dem Ausdrucke von T für die Grösse q_i' überall, die in (4) definierten Grössen p_i einführt, die folgende:

(5) $$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad H = T - U.$$

---

[1]) Für den Fall der Bedingungen (2) gab Vieille dies Resultat, 1849; vgl. die Darstellung von Voss: Die Prinzipien der rationellen Mechanik, Enzyklopädie der Mathematik, IV, 1, 1901.

Sind Bedingungsgleichungen der Form (1) oder (2) vorhanden und sind die q beliebig gegeben, so lautet die zweite Form der Lagrange'schen Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=k} \lambda_\varrho \frac{\partial \omega_\varrho}{\partial q_\varrho}. \tag{6}$$

§ 2. Die Analoga des Satzes der lebendigen Kraft.

Von dem Satze der lebendigen Kraft ist es üblich nur dann zu reden, wenn sowohl die Kräftefunktion U, wie auch die Bedingungsgleichungen die Zeit t nicht explizit enthalten. Ist dieser Einschränkung nur in Bezug auf U nicht genügt, so wollen wir die Differentialgleichung

$$\frac{d(T-U)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

das Analogon I des Satzes von der lebendigen Kraft nennen. Diese Gleichung hat Jacobi aus den Gleichungen (4) in der neunten Vorlesung über Dynamik ausführlich bewiesen.[1])

In die Gleichung (7) gehen die Bedingungsgleichungen, falls dieselben die Zeit nicht enthalten, nicht ein.

Enthalten aber die Bedingungsgleichungen sowie auch U die Zeit explizit, so soll die Differentialgleichung:

$$\frac{d(T-U)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=k} \lambda_\varrho \frac{\partial \tilde{\omega}_\varrho}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

das Analogon II des Satzes von der lebendigen Kraft genannt werden.

§ 3. Die Prinzipalfunktion.

Wir definieren die Funktion V durch die Gleichungen

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi\, dt; \quad \varphi = T + U, \tag{9}$$

wo wir in T uns wieder die p_i statt der q_i' eingeführt und somit φ als eine Funktion von $t, p_1, p_2, \ldots p_\mu, q_1, q_2, \ldots q_\mu$ denken. Dann gelangt man in bekannter Weise, indem man

---

[1]) Ein neuer Beweis aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgt am Schluss des § 6.

die Gleichungen (4) integriert, zu einer Bestimmungsweise der Funktion V, welche V als Funktion der Grössen

$$q_1, q_2, \ldots q_\mu, t, q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0, t_0$$

darstellt, wo die q_i dem Werte t der oberen Grenze des Integrales $\int_{t_0}^{t} \varphi\, d\, t$, die q_i^0 dem Werte t_0 entsprechen.

Die Variation dieser Funktion V, der Hamilton'schen Prinzipalfunktion, ist

$$(10)\quad \begin{cases} \delta V = \dfrac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots \dfrac{\partial V}{\partial q_\mu}\delta q_\mu \\ \quad + \dfrac{\partial V}{\partial q_1^0}\delta q_1^0 + \dfrac{\partial V}{\partial q_2^0}\delta q_2^0 + \cdots \dfrac{\partial V}{\partial q_\mu^0}\delta q_\mu^0 \\ \quad\quad + \dfrac{\partial V}{\delta t}\delta t + \dfrac{\partial V}{\partial t_0}\delta t_0. \end{cases}$$

§ 4. Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Auf Grund insbesondere der Arbeiten von Hölder und Voss formulieren wir das Prinzip der kleinsten Wirkung folgendermassen:

Setzt man $\varphi = T + U$, und variiert man das Integral $V = \int_{t_0}^{t_1} \varphi\, d\, t$ derart, dass nur Variationen $\delta\, q_i$ den Koordinaten und die Variation $\delta\, t$ der Zeit vorkommt, so soll der Integralbestandteil der auf diese Weise entwickelten Variation $\delta\, V$ gleich Null gesetzt, die Differentialgleichungen der Mechanik ergeben, falls keine Bedingungsgleichungen vorgeschrieben sind.

Sind Bedingungsgleichungen vorgeschrieben, und bezeichnet man mit $\delta\, J$ den Integralbestandteil der Variation $\delta\, V$, so erhält man, wenn die Bedingungsgleichungen von der Form (1) sind, die Bewegungsgleichungen aus folgender Gleichung des Prinzipes der kleinsten Wirkung:

$$(11)\qquad \delta\, J + \int_{t_0}^{t_1} d\, t \sum_{\varrho=1}^{\varrho=k} \lambda_\varrho \frac{\partial\, \omega_\varrho}{\partial\, q_\varrho}\, \delta\, q_\varrho = 0.$$

Die Gleichung des nämlichen Prinzipes lautet aber, wenn die Bedingungsgleichungen die Zeit explizit enthalten, wie folgt:

$$\partial J + \int_{t_0}^{t_1} d\,t \left(\Sigma \lambda_\varrho \frac{\partial \tilde{\omega}_\varrho}{\partial q_\varrho} \delta q_\varrho + \delta t \Sigma \lambda_\varrho \frac{\partial \tilde{\omega}_\varrho}{\partial t} \right) = 0. \tag{12}$$

Wir stellen sogleich das Variationsresultat an die Spitze und bemerken, dass wir dasselbe am Schlusse mit Hilfe der Einführung eines Parameters ausführlich entwickeln werden.

Die Variation lautet:

$$\begin{aligned} \delta V = \delta \int_{t_0}^{t_1} \varphi\, d\,t = & \left[\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} \delta q_i + \left(\varphi - \Sigma \frac{\delta \varphi}{\partial q_i'} q_i' \right) \delta t \right]_{t_0}^{t_1} \\ & + \int_{t_0}^{t_1} d\,t\, \Sigma\, \delta q_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{d}{d\,t} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} \right) \\ & + \int d\,t\, \delta t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{d}{d\,t} \left(\varphi - \Sigma \frac{\delta \varphi}{\partial q_i'} q_i' \right) \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Um das Raisonnement, welches sich an diese Gleichung anschliesst, kürzer ausdrücken zu können, schreiben wir auch statt (13)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \varphi\, d\,t = \delta A + \delta B + \delta L + \delta M, \tag{14}$$

wo δL und δM die beiden Integralbestandteile der Gleichung (13) bezeichnen, δA und δL nur Variationen δq_i und δB sowie δM nur die Variation δt enthalten.

§ 5. Ableitung der Differentialgleichungen der Mechanik aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung.

I. Es seien zuerst keine Bedingungsgleichungen vorgeschrieben; dann folgt aus der Gleichung

$$\delta J = \delta L + \delta M = 0$$

des Prinzipes (da die δq_i untereinander und von t unabhängig sind):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{d}{d\,t} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} = 0 \tag{15}$$

$$(16) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{d}{d t}\left(\varphi - \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} q_i'\right) = 0$$

Die Gleichung (15) ist aber identisch mit (3) und die Gleichung (16) ist identisch mit (7), und da, wie Jacobi gezeigt (7) eine Folge aus (4) und (4) gleichwertig mit (3), so ist (16) eine Folge von (15).

II. Sind Bedingungsgleichungen der Form (1) vorgeschrieben, so folgen aus der Gleichung (11) die beiden Gleichungen:

$$(17) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{d}{d t}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} - \sum_1^k \lambda_\varrho \frac{\partial \omega_\varrho}{\partial q_\varrho} = 0$$

$$(18) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{d}{d t}\left(\varphi - \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} q_i'\right) = 0.$$

Die Gleichung (17) ist identisch mit (6) und die Gleichung (18) wieder mit (7). Es folgt aber (7) aus (6) und mithin (18) aus (17).

III. Die Bedingungsgleichungen seien von der Form (2). Es folgen dann aus der Gleichung (12) des Prinzipes die beiden Gleichungen:

$$(19) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{d}{d t}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} - \sum_1^k \lambda_\varrho \frac{\partial \tilde{\omega}_\varrho}{\partial q_\varrho} = 0$$

$$(20) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{d}{d t}\left(\varphi - \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} q_i'\right) - \sum_1^k \lambda_\varrho \frac{\partial \tilde{\omega}_\varrho}{\partial t} = 0,$$

wo (20) mit (8) identisch ist, und also (20) wiederum aus (19) folgt. — Durch die Art, wie wir die Bedingungsgleichungen eingeführt haben, sind die δq_i untereinander und von t unabhängig.

§ 6. Ableitung der Ausgangsgleichungen der Hamilton-Jacobi'schen Theorie, aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung.

Setzen wir voraus, dass die Bedingungsgleichungen durch independente Koordinaten q_i identisch erfüllt seien, so erhält man infolge der Gleichung $\delta L = 0$ die Variation (10)

$$(10) \qquad \delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i^0} \delta q_i^0 + \frac{\partial V}{\partial t} \delta t + \frac{\delta V}{\delta t_0} \delta t_0.$$

$\delta L = 0$ ist das Hamilton'sche Prinzip. Wir haben aber gezeigt, dass die Gleichung $\delta L = 0$ die andere $\delta M = 0$ nach sich zieht. Mithin ist die Gleichung (10) eine Folge der Gleichung $\delta L + \delta M = 0$ des Prinzipes der kleinsten Wirkung. Nun folgt aber weiter aus der letzten Gleichung die andere;

$$(21) \qquad \delta V = \delta A + \delta B$$

oder ausführlich

$$(22) \qquad \delta V = \left[\sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} \delta q_i + \left(\varphi - \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} q_i'\right) \delta t\right]_{t_0}^{t_1}.$$

Aus (22) folgen aber in Verbindung mit (10) die Gleichungen:

$$(23) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_i'} = p_i = \dfrac{\partial V}{\partial q_i}, \; - \dfrac{\partial \varphi^0}{\partial q_i'} = - p_i^0 = \dfrac{\partial V}{\partial q_i^0} \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} = \varphi - \sum p_i q_i', \; \dfrac{\partial V}{\partial t_0} = \sum p_i^0 q_i^{0\prime} - \varphi^0. \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen sind mit den Gleichungen (4) und (5) der neunzehnten Vorlesung über Dynamik im Jacobi identisch.

Wir fügen hier noch eine neue Beweismethode der Differentialgleichung (7) hinzu, die Jacobi auf seine Art in der achten Vorlesung ableitet.

Wir haben zu zeigen, dass aus $\delta L = 0$ die Gleichung $\delta M = 0$ als identische Folge hervorgeht.

Wir transformieren den Ausdruck δM dadurch, dass wir die Funktion V einführen; man erhält dann, indem man $\varphi = \dfrac{dV}{dt}$ setzt und die aus $\delta L = 0$ folgenden Relationen (23) benutzt,

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\, \delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{dV}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt} - \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}\right)\right)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \delta t\, dt \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{dV}{dt} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}\right) = 0. \quad \text{q. e. d.}$$

§ 7. Vergleichung mit früheren Arbeiten.

Wir haben im Voraufgegangenen von den allgemeineren Voraussetzungen Abstand genommen, dass erstens keine Kräftefunktion gegeben sei, und dass zweitens die Bedingungsgleichungen durch sogenannte Pfaff'sche Ausdrücke, oder, in Beziehung auf die Mechanik nach der Bezeichnung von Hertz, in nicht holonomer Form gegeben seien.

Den Arbeiten von Hölder und Voss über die Prinzipien von Hamilton und Maupertius lagen die genannten allgemeinen Voraussetzungen zugrunde; die in dieser Arbeit abgeleiteten Resultate gehen aus Resultaten der genannten Autoren durch Spezialisierung hervor.

Der Unterschied in der Ableitung besteht darin, dass die gegenwärtigen Entwicklungen die Variationsgleichungen von Hölder und Voss in Differentialgleichungen ausdrücken.

Hierdurch dürfte das Prinzip der kleinsten Wirkung übersichtlicher und durchsichtiger erscheinen, unter den gemachten Voraussetzungen.

Andererseits haben die an die Gleichungen zwischen Variationen sich a. a. O. anschliessenden begrifflichen und geometrischen Deutungen der Gleichungen einen grossen Wert, abgesehen von der bereits erwähnten Allgemeinheit der Variationsbetrachtungen.

Um das eben Gesagte deutlich hervortreten zu lassen, gehe ich auf die Hölder'sche Relation

$$\delta T = \delta' U, \tag{24}$$

die Gleichung (8) der genannten Arbeit, mit einigen Worten ein.

Wie bekannt, fordert die Variationsrechnung eine stetige punktweise „Zuordnung“ zwischen wirklicher und variierter Bewegung.

Während nun beim Hamilton'schen Prinzip derartig variiert wird, dass zugeordnete Systemlagen gleichzeitig durchschritten werden, findet dies beim Prinzip von Maupertius im Allgemeinen nicht statt. Die Forderung lautet hier, „dass der

Unterschied der lebendigen Kraft für entsprechende Zustände beider Bewegungen gleich sein soll der Arbeit, welche die wirkenden Kräfte für eine die entsprechenden Lagen verbindende Verrückung gemäss der Gleichung (24) leisten würden."

Aber während darauf, dass zugeordnete Systemlagen gleichzeitig durchlaufen werden, im Allgemeinen nicht gesehen wird, hat Hölder gezeigt, dass es stets ratsam und oft nötig ist, die Variationen so vorzunehmen, dass man von irgend einer Systemlage zur „zugeordneten" variierten Lage durch „virtuelle" Verschiebungen gelangte. Es ist dieses zwar nicht stets notwendig, allein man kann, insbesondere in zwei Fällen bei anderer Variationsart in Klippen geraten, dies sind die Fälle nicht holonomer Bedingungsgleichungen und solcher Bedingungsgleichungen, welche die Zeit explizit enthalten.

Im Falle nicht holonomer Bedingungsgleichungen sind virtuelle Variationen sowohl bei dem Prinzip von Hamilton als auch bei denjenigen der kleinsten Wirkung erforderlich. Enthalten die Bedingungsgleichungen die Zeit explizit, so ist die Erfüllung der genannten Forderung beim Hamilton'schen Prinzip erlässlich, beim anderen Prinzip ist darauf zu achten.

Diesen letzteren Fall will ich nun näher untersuchen, da hier Voraussetzungen zugrunde liegen, die in den Bereich dieser Arbeit gehören.

Aber dieser Fall erledigt sich sofort durch nähere Betrachtung der Gleichung (12).

Hier sind die Bedingungsgleichungen, welche die Zeit explizit enthalten, so in das Prinzip eingeführt, dass die $\delta \zeta_i$ keine virtuellen Verschiebungen sind; dennoch liefert das Prinzip die Differentialgleichungen der Mechanik.

Beim Hamilton'schen Prinzip hat Hölder bereits bemerkt, dass es gleichgiltig ist, ob wir setzen

$$\delta \omega_i = 0 \quad \text{oder} \quad \delta \omega_i - \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \delta t = 0,$$

da $\delta t = 0$ wird und die letztere Gleichung sich auf die erstere reduziert.

Nunmehr sieht man klar, dass bei dem anderen Prinzip die δq_i nicht an virtuelle Verschiebungen zu binden sind. Hierauf zielt Hölder mit den Worten „In diesem Falle sind wirkliche und variierte Bewegung ungleichartig.“

Trotz den verschiedenen Ausgangspunkten sind wir mit Hölder in Übereinstimmung, denn die Hölder'sche Relation

$$\delta T = \delta' U$$

ist nichts anderes, als unser Analogon des Satzes von der lebendigen Kraft. Unter dem gestrichenen δ' ist nämlich verstanden, dass die Variation so vorgenommen werden soll, dass die Verschiebungen virtuelle sind. Wir haben also

$$\delta' U = \frac{dU}{dt}\delta t - \frac{\partial U}{\partial t}\delta t.$$

Nun ist aber

$$\delta T = \frac{dT}{dt}\delta t.$$

Mithin erhält man aus $\delta T - \delta' U = 0$ die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{dt} - \frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

und dieses ist unsere Gleichung (7).

In der Einleitung hatte ich bemerkt, dass die Arbeiten von Mayer und Helmholz die von Jacobi angefochtene Lagrange'sche Begründung des Prinzipes der kleinsten Wirkung rechtfertigen.

A. Mayer legt eine Funktion zu Grunde, die analytisch genommen allgemeiner ist als die hier betrachtete Funktion $\varphi = T + U$, die aber mechanisch betrachtet weniger allgemein ist, insofern diese Funktion die Variabele t nicht explicit enthält.

Es wird von dem genannten Autor gezeigt, dass man eine Differentialgleichung, die im Speziellen der Satz der lebendigen Kraft ist, als Bedingungsgleichung vorschreiben kann, und dann mit Hülfe dsr Lagrange'schen Multiplikationsmethode[1]) durch

---

[1]) Wesentlich dieselbe Rechnungsweise wendet Helmholtz a. a. O. an.

Nullsetzen der Variation des betreffenden Integrals die dynamischen Differentialgleichungen erhält. Aber Mayer leitet letztere noch auf einem zweiten Wege ab, der mit dem von uns eingeschlagenen eine enge Verwandtschaft zeigt; hierbei richtet er die Variationen so ein, dass ein Parameter $\delta\vartheta$ eingeführt wird (vgl. unten § 8), wo dann δt nicht wie sonst gleich Null gesetzt werden darf. Als Faktor von δt ergibt sich vielmehr bei Ausführung der Variation derjenige Ausdruck, welcher infolge des Prinzipes von der lebendigen Kraft verschwindet,[1]) ganz wie es oben in Gleichung (13) der Fall war. Der Unterschied von unserer obigen Darstellung besteht darin, dass Mayer die Gleichung der lebendigen Kraft als erfüllt voraussetzt, während wir umgekehrt ihr Bestehen daraus schliessen, dass auch der Faktor der Variation δt verschwinden muss, und dann nachträglich bestätigen, dass sie auch eine Folge des Verschwindens der Faktoren der einzelnen Variationen δq_i ist.

Abgesehen hiervon ist unsere Entwicklung allgemeiner als diejenige von Mayer, da wir zulassen, dass die Zeit in der Kräftefunktion und in den Bedingungsgleichungen explizite vorkommt.

Diese Entwicklungen zusammenfassend, können wir das erlangte Resultat in folgender Weise aussprechen:

1) Die Grundlage der Dynamik bildet das d'Almbert'sche Prinzip,[2]) bei dem die vorkommenden Variationen als virtuelle (d. h. $\delta t = 0$) zu deuten sind.

---

[1]) Dieselbe Art der Variationsausführung findet sich übrigens auch bei Lipschitz: Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist; Crelle's Journal, Bd. 74, 1874, p. 121 f. Königsberger (Über die Prinzipien der Mechanik, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Juli 1896) nimmt zwar auch δt von Null verschieden an, zieht aber die Glieder (mit Hilfe des Satzes von der lebendigen Kraft) anders zusammen, so dass das Glied mit δt nur ausserhalb des Integrals, nicht wie in (13) unter dem Integralzeichen vorkommt; Königsberger berücksichtigt aber die Annahme, dass U auch von dem Differentialquotienten der Koordinaten abhängt.

[2]) Die eventuelle Zurückführung desselben auf andere Grundvor-

2) Mit diesem Prinzipe sind diejenigen von Hamilton und Maupertius vollkommen äquivalent; auch in ihnen sind deshalb im Allgemeinen virtuelle Variationen anzuwenden.

3) Trotzdem ist es bei dem in § 4 formulierten Prinzipe der kleinsten Wirkung dann, wenn die Zeit explizite vorkommt, erforderlich, die Variationen als nicht virtuelle einzuführen; denn das Verschwinden des Faktors von δt in der Variation der Integrale ist nichts anderes als der Satz von der lebendigen Kraft, bezw. dessen Analogon.

Nichtholonome Bedingungen bedürfen indessen noch einer besonderen Behandlung.

§ 8. Ableitung der obigen Formel (13).

Um unseren Gedankengang nicht zu unterbrechen, haben wir die Formel (13) zunächst ohne Beweis hingestellt. Es erübrigt jetzt noch dieselbe zu begründen.

Sei $f(q_i, q_i', t)$ eine Funktion der μ Grössen $q_1, q_2, \dots q_\mu$, sowie der Grössen $q_1' = \frac{dq_1}{dt}$, $q_2' = \frac{dq_2}{dt}$, $\cdots q_0' = \frac{dq_\mu}{dt}$ und der Grösse t explizit, so bestimmen wir die Variation

$$\delta \int f\,dt,$$

indem wir die Integrationsveränderliche t ebenfalls der Variation unterwerfen.

Dieser Fall ist bisher formell noch nicht vollständig durchgeführt worden. Man hat sich bisher in der vollständigen formellen Durchführung auf den Fall beschränkt, dass

$$\delta \int f\,dt = \int dt\,\delta f. \qquad \text{I)}$$

Wir untersuchen nun im Besonderen die Variation

$$\int \delta (f\,dt). \qquad \text{II)}$$

Durch Einführung eines Parameters, den wir mit τ be-

---

stellungen hat neuerdings Lindemann behandelt; vgl. p. 77 ff. des vorliegenden Bandes der Sitzungsberichte.

zeichnen wollen, kann man die Variation II) auf die Variation I) zurückführen.

Wir führen jetzt folgende Substitutionen ein:[1])

$$
\left.\begin{array}{l}
q_i = y_i(\tau) \quad , \quad t = z(\tau). \\
\text{Hiernach setzen wir ferner} \\
d q_i = y_i' \cdot d\tau \quad , \quad d t = z' d\tau, \\
\text{wo} \quad y_i' = \dfrac{d y_i}{d\tau} \quad , \quad z' = \dfrac{d z}{\partial \tau}, \\
q_i' = \dfrac{y_i' d\tau}{z' d\tau} = \dfrac{y_i'}{z'}.
\end{array}\right\} \quad \text{III)}
$$

Infolge dieser Substitution III) wird das zu variierende Integral $\int f d t$ in das Integral $\int f(y_i, y_i', z) z' d\tau$ transformiert. Setzen wir $f \cdot z' = F$, so schreibt sich das letztere Integral einfach $\int F d\tau$. Nunmehr aber ist die Variation $\int d\tau \, \delta F$ identisch mit der Variation II) nämlich mit $\int \delta (f d t)$, und wir haben mithin, um die letztere Variation II) zu bilden, nur die Variation $\int d\tau \, \delta F$ d. h. I) zu bilden.

Nach bekannter Methode setzen wir demnach:

$$
\left.\begin{array}{rl}
\int \delta (f d t) = \int \delta F \cdot d\tau & \\
= \int\limits_0^1 \Big[\Sigma \dfrac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \dfrac{\partial F}{\partial z} \delta z & \\
+ \Sigma \dfrac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i' + \dfrac{\partial F}{\partial z'} \delta z' \Big] d\tau, &
\end{array}\right\} \quad \text{IV)}
$$

Hierin setzen wir:

$$
\delta y_i' = \frac{d}{d\tau} \delta y_i, \quad \delta z' = \frac{d}{d\tau} \delta z,
$$

und indem wir nun partiell integrieren, kommt:

---

[1]) Vergl. Helmholtz a. a. O.

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \delta F\, d\tau = {} & \left[\Sigma \frac{\partial F}{\partial y_i'}\,\delta y_i + \frac{\partial F}{\partial z'}\right]_0^1 \\ & + \int_0^1 \left[\Sigma \frac{\partial F}{\partial y_i}\,\partial y_i - \Sigma \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\delta y_i\right] d\tau \\ & + \int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial z}\,\delta z \quad - \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\delta z\right] d\tau.\end{aligned}\right\} \qquad \text{V)}$$

Wir haben jetzt wieder die ursprüngliche Veränderliche $q_i\, q_i'$ und t in dieser Formel V) einzuführen.

Hiezu dienen folgende Rechnungen:

Wir betrachten die Veränderliche y_i' und z' als implizit in f, nämlich in dem q_i' vorkommend und sehen infolgedessen:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y_i'} = \frac{\partial f}{\partial q_i'}\,\frac{\partial q_i'}{\partial y_i'} \\ & \frac{\partial q_i'}{\partial y_i'} = \frac{\partial}{\partial y_i'}\left(\frac{y_i'}{z'}\right) = \frac{1}{z'} \\ \text{ferner} \qquad & \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial q_i'}\,\frac{\partial q_i'}{\partial z'} \\ & \frac{\partial q_i'}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{y_i'}{z'}\right) = -\frac{y_i'}{z'^2}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{VI)}$$

Wir erhalten:[1])

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \delta (f\, dt) = {} & \left[\Sigma \frac{\partial t}{\partial q_i'}\,\delta q_i + \left(f - \Sigma \frac{\partial t}{\partial q_i'}\, q_i'\right)\delta t\right]_0^1 \\ & + \int_0^1 dt\, \Sigma\, \delta q_i \left(\frac{\partial t}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial t}{\partial q_i'}\right)\right) \\ & + \int_0^1 dt\, \delta t \left(\frac{\partial t}{\partial t} - \frac{d}{dt}\left(f - \Sigma \frac{\partial t}{\partial q_i'}\, q_i'\right)\right).\end{aligned}\right\} \qquad \text{VII)}$$

Damit haben wir obige Formel (13) gewonnen.

---

[1]) Bei A. Voss (Über die Prinzipe von Hamilton und Maupertius, Göttinger Nachrichten 1900, p. 33) findet sich eine ähnliche Formel; die Glieder werden aber anders zusammengezogen.



Beiträge zur Theorie der unendlich kleinen Deformationen einer Fläche.

Von A. Voss.

(Eingelaufen 12. Mai.)

Erster Teil.

Über unendlich kleine Deformationen allgemeinster Art, welche eine Fläche erfahren kann, habe ich bereits vor längerer Zeit einige ganz kurze Andeutungen gegeben,[1]) insbesondere auch damals die partielle Differentialgleichung aufgestellt, von der ebenso wie bei der isometrischen Deformation, die Bestimmung der charakteristischen Funktion der Deformation abhängt. Inzwischen hat auch Herr E. Daniële[2]) diesen Gegenstand behandelt. Die folgenden Betrachtungen deuten eine Reihe von hierauf bezüglichen Fragen an, die sich mit Erfolg behandeln lassen; sie geben insbesondere eine, wie ich glaube, neue Behandlung des allgemeinen Deformationsproblems, welche geeignet scheint, in besonders einfacher Weise mit den unendlich kleinen Deformationen projektive und endliche Umformungen durch „Biegung“ zu verbinden.

---

[1]) Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4, p. 132 (1895).

[2]) Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed estensibili, Acc. li Torino, serie 2, tom. 1, p. 26, 1900; es ist wohl natürlich, dass meine Darlegungen in mehreren Punkten mit denen des Herrn Daniele zusammentreffen.

§ 1.

Die allgemeine infinitesimale Flächendeformation.

Sind x, y, z die rechtwinkeligen Koordinaten der Punkte einer Fläche, die auf irgend ein System krummliniger Koordinaten u, v bezogen ist, und bezeichnet man die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung durch e, f, g; E, F, G, die Richtungscosinus der Normale mit p, q, r, so bestehen bekanntlich die Gleichungen[1])

$$\text{A)}\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= A\frac{\partial x}{\partial u} + A'\frac{\partial x}{\partial v} + Ep \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= B\frac{\partial x}{\partial u} + B_1\frac{\partial x}{\partial v} + Fp \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= C\frac{\partial x}{\partial u} + C_1\frac{\partial x}{\partial v} + Gp, \end{aligned}$$

nebst den analogen, welche durch gleichzeitige Vertauschung von x, E, p mit y, F, q; z, G, r hervorgehen. Dabei ist, wenn

$$eg - f^2 = H$$

gesetzt wird,

$$\text{B)}\quad \begin{aligned} 2A\ H &= g\frac{\partial e}{\partial u} - 2f\frac{\partial f}{\partial u} + f\frac{\partial e}{\partial v} \\ 2A_1 H &= 2e\frac{\partial f}{\partial u} - e\frac{\partial e}{\partial v} - f\frac{\partial e}{\partial u} \\ 2B\ H &= g\frac{\partial e}{\partial v} - f\frac{\partial g}{\partial u} \\ 2B_1 H &= e\frac{\partial g}{\partial u} - f\frac{\partial e}{\partial v} \\ 2C\ H &= 2g\frac{\partial f}{\partial v} - g\frac{\partial g}{\partial u} - f\frac{\partial g}{\partial v} \\ 2C_1 H &= e\frac{\partial g}{\partial v} - 2f\frac{\partial f}{\partial v} + f\frac{\partial g}{\partial u}, \end{aligned}$$

[1]) Vgl. z. B. diese Berichte 1892, p. 231; diese Formeln mussten hier angeführt werden, weil auf dieselben beständig Bezug genommen wird.

ferner

$$\text{C)}\quad \begin{aligned} &B\,F + B_1 G - C\,E - F C_1 + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} = 0 \\ &B_1 F + B\,E - A_1 G - F A + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} = 0, \end{aligned}$$

und

$$\text{D)}\quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} &= L\frac{\partial x}{\partial u} + L_1 \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial p}{\partial v} &= M\frac{\partial x}{\partial u} + M_1 \frac{\partial x}{\partial v}; \\ L\;H &= Ff - Eg \\ L_1\,H &= Ef - Fe \\ M\;H &= Gf - Fg \\ M_1 H &= Ff - Ge, \end{aligned}$$

$$\text{E)}\quad \begin{aligned} B + C_1 &= \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial v} \\ B' + A &= \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u}. \end{aligned}$$

Das Krümmungsmass $\frac{EG - F^2}{eg - f^2}$, welches mit den Fundamentalgrössen erster Ordnung durch eine dritte Gleichung verbunden ist, sei k.

Wird die Fläche einer infinitesimalen Deformation unterworfen, so gehen x, y, z in $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta$ über, wo ε eine unendlich kleine Konstante bedeutet. Das Quadrat des Längenelementes

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

wird dann den Zuwachs δds^2 enthalten, wobei

$$\delta ds^2 = 2\varepsilon\left(du^2 \Sigma \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + du\,dv \Sigma\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) + dv^2 \Sigma \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

wird, falls unter

$$\Sigma \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \Sigma \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \cdots$$

die Ausdrücke

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}, \text{ etc.}$$

verstanden werden. Soll nun die Deformation einen vorgeschriebenen Charakter haben, so setze man

$$\delta\, ds^2 = 2\,\varepsilon\,[P du^2 + 2\,Q\, du\, dv + R\, dv^2]\sqrt{H},$$

wobei also P, Q, R irgend welche gegebene Funktionen der u, v sind, oder

$$\text{1)}\quad \begin{aligned} \Sigma\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} &= P\sqrt{H} \\ \Sigma\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} &= (Q-\varphi)\sqrt{H} \\ \Sigma\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} &= (Q+\varphi)\sqrt{H} \\ \Sigma\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} &= R\sqrt{H}. \end{aligned}$$ [1]

Sind P, Q, R gleich Null, so hat man die infinitesimal isometrische Deformation, die infinitesimale Isometrie[2]) mit der charakteristischen Funktion φ; sind die P, Q, R die Fundamentralgrössen erster Ordnung proportional, oder $P=\lambda e$, $Q=\lambda f$, $R=\lambda g$, so hat man die infinitesimale konforme Deformation; sind die P, Q, R den Fundamentalgrössen zweiter Ordnung proportional, so hat man

---

[1]) Dieses System von Differentialgleichungen für die ξ, η, ζ geht durch Vertauschung von u, v, P, Q, R, φ mit v, u, R, Q, P, $-\varphi$ in sich über; daher ist in den folgenden Formeln bei Untersuchung von u und v jedesmal φ mit $-\varphi$, P mit R zu vertauschen.

[2]) Zwei Flächen mit denselben Fundamentalgrössen erster Ordnung nenne ich zueinander isometrisch; häufiger werden dieselben als Biegungen voneinander bezeichnet; zu unterscheiden ist von der infinitesimalen Biegung der allgemeine Prozess der infinitesimal-isometrischen Deformation.

$$\delta\, d s^2 = 2 \varepsilon \lambda (E\, d u^2 + 2 F\, d u\, d v + G\, d v^2)$$

er

$$\delta\, d s = \frac{\varepsilon \lambda}{\varrho}\, d s$$

nn man mit ϱ den Krümmungshalbmesser des der Richtung ι, $d v$ zugehörigen Normalschnittes bezeichnet, u. s. w.

Die Bestimmung der Komponenten[1] ξ, η, ζ d. h. der :htwinkeligen Projektionen des Verschiebungsvektors r η, ζ) auf die Koordinaten kann auf dieselbe Weise wie in m speziellen Falle der infinitesimalen Isometrie erfolgen, mlich durch Aufstellung der Integrabilitätsbedingungen der fferentialgleichungen 1).

Dabei mag gleich bemerkt werden, dass die Deformationen n Charakter 2) sich sofort erledigen lassen. Setzt man mlich

$$\xi = -\lambda p \sqrt{H}$$
$$\eta = -\lambda q \sqrt{H}$$
$$\zeta = -\lambda r \sqrt{H}$$

o λ eine willkürliche Funktion von u, v ist, so wird

$$\Sigma \frac{\partial \xi'}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda E \sqrt{H}$$

$$\Sigma \frac{\partial \xi'}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda F \sqrt{H}$$

$$\Sigma \frac{\partial \xi'}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = \lambda G \sqrt{H}$$

Die Gleichungen 1)

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda E \sqrt{H}$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = 2 \lambda F \sqrt{H}$$

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = \lambda G \sqrt{H}$$

---

[1] Deformationen mit verschiedenen Komponentensystemen setzen ich selbstverständlich durch Addition zusammen.

gehen daher über in

$$\Sigma \frac{\partial(\xi - \xi_1)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = 0$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial(\xi - \xi_1)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial(\xi - \xi_1)}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial(\xi - \xi_1)}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

d. h. in dem speziellen Fall der isometrischen Deformation. Man erhält daher alle Transformationen vom Charakter 2)[1], wenn man mit einer völlig willkürlichen infinitesimalen Verrückung nach der Normale der Fläche die infinitesimalen isometrischen Deformationen zusammensetzt. Für die Kugel insbesondere, wo die E, F, G den e, f, g proportional sind, sind diese Transformationen konforme: Alle infinitesimalen konformen Deformationen der Kugel ergeben sich durch Zusammensetzung ihrer infinitesimalen isometrischen Deformationen mit einer willkürlichen Verschiebung im Radius.[2])

Die Gleichungen 1) führt man auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die charakteristische Funktion φ zurück. Man erhält durch Differentiation nach v und u aus der ersten und dritten

$$\Sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial P}{\partial v} \sqrt{H} + P \frac{\partial \sqrt{H}}{\partial v}$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial v \partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial u} = \frac{\partial (Q + \varphi)}{\partial u} \sqrt{H} + (Q + \varphi) \frac{\partial \sqrt{H}}{\partial u}$$

und durch Subtraktion, falls die zweiten Differentialquotienten der x, y, z nach den Gleichungen A) durch die ersten und zu-

[1]) Es sind dies zugleich diejenigen Deformationen, bei denen die Kurven der Haupttangenten der Fläche ihre Länge nicht ändern.

[2]) Eine Kugelfläche (Ebene) ist auch die einzige Fläche, welche eine infinitesimale konforme Deformation in der Richtung der Normale allein zulässt.

gleich die Werte der $\sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u}$ etc. wieder vermöge der Gleichungen 1) ersetzt werden,

$$3^a) \quad \frac{F \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial u}\right) - E \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial u}\right)}{\sqrt{H}} = \frac{\partial P}{\partial v} + P C_1 + R A_1 - 2 Q B_1 - \frac{\partial (Q + \varphi)}{\partial u},$$

sowie durch Vertauschung von u und v

$$3^b) \quad \frac{F \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) - G \sum \left(p \frac{\partial \xi}{\partial u}\right)}{\sqrt{H}} = \frac{\partial R}{\partial u} + R A + P C - 2 Q B - \frac{\partial (Q - \varphi)}{\partial v}.$$

Die beiden Gleichungen 3) drücken aus, dass die Ausdrücke

$$\sum \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial v \partial u}\right) \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\sum \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial v \partial u}\right) \frac{\partial x}{\partial v},$$

identisch verschwinden. Fügt man den Gleichungen 3) noch die Bedingung

$$4) \quad \partial \sum \frac{\left(p \frac{\partial \xi}{\partial u}\right)}{\partial v} - \partial \sum \frac{\left(p \frac{\partial \xi}{\partial v}\right)}{\partial u} = \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial u}\right)$$

hinzu, so wird auch

$$\sum \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial v \partial u}\right) p = 0;$$

d. h. die Integrabilitätsbedingungen für die Funktionen ξ, η, ζ sind identisch erfüllt (selbstverständlich unter der Voraussetzung $H \neq 0$), so dass dieselben durch Quadratur gefunden werden, sobald φ bestimmt ist. Man erhält aber aus 4) vermöge der Gleichungen D)

5)
$$\frac{\partial \Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)$$
$$= \frac{\varphi}{\sqrt{H}}(Eg + Ge - 2fF) - \frac{1}{\sqrt{H}}\begin{vmatrix} P & Q & R \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix},$$

und nun ergibt sich aus 3) und 4) die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ, sobald man die aus 3^a), 3^b) bestimmten Werte der $\Sigma p\frac{\partial \xi}{\partial u}$, $\Sigma p\frac{\partial \xi}{\partial v}$ in die linke Seite von 5) einträgt.

Setzt man vermöge der Gleichungen E)

$$\frac{\partial P}{\partial v} + PC_1 + RA_1 - 2QB_1 - \frac{\partial Q}{\partial u}$$

gleich

$$\frac{\partial P}{\partial v} + P\frac{\partial \log\sqrt{H}}{\partial v} - PB + RA_1 - QB_1 + QA - \frac{\partial Q}{\partial u} - Q\frac{\partial \log\sqrt{H}}{\partial u},$$

und führt an Stelle der $P\sqrt{H}$, $Q\sqrt{H}$, $R\sqrt{H}$ die Grössen P', Q', R' ein, so wird dieser Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{H}}\left(\frac{\partial P'}{\partial v} - \frac{\partial Q'}{\partial u} - P'B + R'A_1 - Q'B_1 + Q'A\right).$$

Wird der Zähler desselben durch S bezeichnet, und definiert man dementsprechend

$$T = \frac{\partial R'}{\partial u} - \frac{\partial Q'}{\partial v} - Q'B - R'B_1 + P'C + Q'C_1,$$

so werden die Gleichungen 3^a), 3^b)

$$\frac{E\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) - F\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)}{\sqrt{H}} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{S}{\sqrt{H}},$$
$$\frac{G\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) - F\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)}{\sqrt{H}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{T}{\sqrt{H}}$$

oder, unter der Voraussetzung, dass k nicht Null ist,

$$6)\quad \begin{aligned} \Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) &= \frac{F\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - E\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{k\sqrt{H}} - \frac{SF + ET}{kH} \\ \Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) &= \frac{G\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - F\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{k\sqrt{H}} - \frac{GS + TF}{kH}, \end{aligned}$$

und die partielle Differentialgleichung wird nach 5)

$$7)\quad \frac{\partial \dfrac{\left(F\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - E\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right)}{k\sqrt{H}}}{\partial v} + \frac{\partial \dfrac{\left(F\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - G\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right)}{k\sqrt{H}}}{\partial u} - \frac{\partial \dfrac{FS + ET}{kH}}{\partial v} + \frac{\partial \dfrac{GS + FT}{kH}}{\partial u}$$

$$= \frac{\varphi}{\sqrt{H}}(Eg + Ge - 2fF) - \frac{1}{H}\begin{vmatrix} P' & Q' & R' \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix}. \quad [1]$$

Die Ausdrücke S, T verschwinden, wie ein Blick auf die Codazzi'schen Gleichungen C) zeigt, sobald P' Q' R' durch die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung irgend einer der aus der Fläche F durch Isometrie hergeleiteten Flächen F' ersetzt werden. Von dieser Reduktion der partiellen Differentialgleichung 7), die zugleich eine Beziehung des Problems der infinitesimalen Deformationen mit dem der endlichen Isometrieen enthält, wird später[2]) Gebrauch gemacht werden; hier möge nur gleich ein spezieller Fall hervorgehoben sein. Ist nämlich F eine Fläche, die mit Erhaltung der Krümmungslinien gebogen werden kann, so führt die Aufgabe, alle infinitesimalen Deformationen derselben zu bestimmen, bei denen

$$\delta\, ds^2 = 2\varepsilon(E'\,du^2 + G'\,dv^2) \quad [3])$$

---

[1]) Diese Gleichung in abgekürzter Form, Jahresberichte d. D. Math. a. a. O., p. 133, sodann bei Herrn Danièle, a. a. O., p. 53.

[2]) Siehe § 5.

[3]) E', G' sind die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung irgend einer der durch Biegung entstehenden Flächen; als Koordinatensystem der u, v ist das der Krümmungslinien ($f = 0$, $F = 0$) vorausgesetzt.

wird, auf die Weingarten'sche partielle Differentialgleichung für die charakteristische Funktion φ, welche aus 7) für

$$P' = Q' = R' = 0$$

folgt, aus welcher die Komponenten ξ, η, ζ durch Quadratur bestimmt werden.

§ 2.

Die infinitesimale Deformation der Developpabeln.

Ist die Fläche F developpabel, so lassen sich, da $EG - F^2 = 0$ ist, aus 3ᵃ) und 3ᵇ) die $\sum p \frac{\partial \xi}{\partial u}$, $\sum p \frac{\partial \xi}{\partial v}$ nicht ausdrücken. Man erhält in diesem Falle keine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ. Wenn aber Darboux[1]) diesen Fall als unwesentlich ansieht, weil es sich um den isometrischen Deformationsprozess der Developpabeln handelt, für welche ja von vornherein alle endlichen Biegungen bekannt seien, so scheint mir diese Ausdrucksweise nicht ganz zutreffend. In der Tat müsste dann, da bei jeder endlichen Biegung die Developpabele in eine Developpabele, die Erzeugenden dabei in Erzeugende übergehen, auch bei der infinitesimalen Isometrie die Developpabele in eine unendlich benachbarte Developpabele übergehen, während die allgemeine isometrische infinitesimale Deformation sie in eine Regelfläche verwandelt.

Man kann in diesem Falle folgendermassen verfahren. Denkt man sich von vornherein die developpabele Fläche auf das System ihrer Erzeugenden $v =$ Konst bezogen, so sind E

---

[1]) Herr Darboux sagt, Leçons sur la theorie générale des surfaces, tom. IV, p. 28 geradezu: Comme on sait résoudre le problème de la déformation finie pour toute surface développable, on saura, par cela même résoudre aussi celui de la déformation infiniment petite. Herr Bianchi bezeichnet dagegen (Lezioni di geometria, ed. II, 1903, vol. II, p. 6, vgl. auch die Anm. auf p. 2) diesen Fall als privo d'interesse. Aber derselbe scheint gerade geeignet, den Unterschied zwischen unendlich kleiner Biegung und infinitesimaler Isometrie zu erläutern.

und F gleich Null. Die Gleichung 3ᵃ) § 1 bestimmt dann durch Quadratur die Funktion φ; da G nicht verschwindet, falls die Fläche nicht eine Ebene ist, folgt aus 3ᵇ) die Grösse $\sum\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)$.

Alsdann ergibt sich durch Quadratur aus der Gleichung 5) auch die Grösse $\sum p\frac{\partial \xi}{\partial v}$, womit neben der bei der Integration für φ auftretenden willkürlichen Funktion von v eine zweite solche Funktion eingeführt wird. Alle infinitesimalen Deformationen einer Developpabelen eines vorgeschriebenen Charakters lassen sich daher durch Quadraturen bestimmen und enthalten — bei der vorausgesetzten Koordinatenbestimmung — noch zwei willkürliche Funktionen von v.

Hinsichtlich der weiteren Ausführung beschränke ich mich der Einfachheit halber auf die isometrische Deformation.

Bezeichnet man mit X, Y, Z die Koordinaten eines Punktes der Rückkehrkurve der Fläche, welche als Funktionen von v so angenommen sind, dass

$$\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2=1$$

ist, so sind die auf das aus den Erzeugenden und ihnen orthogonalen Trajektorien gebildete Koordinatensystem bezogenen rechtwinkligen Koordinaten der Developpabelen

$$x=X+(u-v)\frac{\partial X}{\partial v};$$

y und z haben die durch Vertauschung von X mit Y, Z hervorgehenden Werte. Es ist aber

$$1)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}&=\frac{\partial X}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial v}&=(u-v)\frac{\partial^2 X}{\partial v^2},\end{aligned}$$

mithin

$$e = 1, \quad f = 0, \quad g = (u - v)^2 h^2,$$

falls

$$h^2 = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}$$

gesetzt wird, und $\sqrt{H}$ ist gleich $h\,(u - v)$.

Die Richtungskosinus der Flächennormale sind ferner d
die Identität

$$h\,(c_1 p + c_2 q + c_3 r) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

gegeben, in der die $c_1\, c_2\, c_3$ willkürliche Koeffizienten bede
Setzt man noch

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^3 X}{\partial v^3} & \frac{\partial^3 Y}{\partial v^3} & \frac{\partial^3 Z}{\partial v^3} \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

so erhält man

$$G = (u - v)\,\frac{\varDelta}{h}.$$

Da nach 3[a]) § 1, $\varphi = V$ wird, wo V eine willkür
Funktion von V ist, so folgt aus 3[b])

$$\Sigma p \frac{\partial \xi}{\partial u} = -h^2 \frac{V'}{\varDelta},$$

wo V' den Differentialquotienten von V bedeutet. Au
folgt dann

$$-\frac{\partial}{\partial u} \Sigma \left(p \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = V \frac{\varDelta}{h^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h^2 V'}{\varDelta}\right);$$

mithin

$$2)\quad \begin{aligned} &\Sigma p \frac{\partial \xi}{\partial u} = - h^2 \frac{V'}{\Delta} \\ &\Sigma p \frac{\partial \xi}{\partial v} = - (u - v) \left(\frac{V \Delta}{h^2} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h^2 V'}{\Delta} \right) \right) + V_1, \end{aligned}$$

wo V_1 eine zweite willkürliche Funktion von v bedeutet. Hieraus folgt dann unter Benutzung der Gleichung 1) des § 1

$$3)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \xi}{\partial u} = - \frac{V}{h} \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} - h^2 \frac{V'}{\Delta} p \\ &\frac{\partial \xi}{\partial v} = V(u-v) h \frac{\partial X}{\partial v} + p \left(V_1 - (u-v) \left(\frac{V \Delta}{h^2} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h^2 V'}{\Delta} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass die Erzeugenden der Fläche $v =$ Konst auch bei der infinitesimalen Isometrie geradlinig bleiben, ξ, η, ζ sind lineare gerade Funktionen von u. Die aus den Koordinaten ξ, η, ζ gebildete Fläche, welche zu der Developpabeln in Moutard'scher Zuordnung steht, ist aber im allgemeinen eine Regelfläche, welche nur dann in eine Developpabele übergeht, wenn V oder V_1 verschwindet. Im ersten Falle aber ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = p V_1,$$

d. h. man hat eine singuläre Transformation, bei der die soeben genannte Fläche in eine Kurve degeneriert. Im zweiten Falle dagegen entsteht die infinitesimale Isometrie, bei der die Flächen x, y, z und ξ, η, ζ gleichzeitig Developpabele sind.

Ist die gegebene Fläche eine Kegelfläche, so muss die Betrachtung etwas anders geführt werden. Setzt man

$$1^a)\quad \begin{aligned} x &= u X \\ y &= u Y \\ z &= u Z, \end{aligned}$$

wo X, Y, Z Funktionen von v sind, welche die Gleichungen

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$
$$\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 = 1,$$

befriedigen, so wird die Flächennormale bestimmt durch die Identität

$$c_1 p + c_2 q + c_3 r = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Setzt man wieder

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

so wird

$$G = u\varDelta,$$

und zugleich $e = 1$, $f = 0$, $g = u^2$, $\sqrt{H} = u$. Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$2^a) \qquad \Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = -\frac{V'}{\varDelta}$$

$$-\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = V\varDelta + V_1 + u\frac{\partial\left(\frac{V'}{\varDelta}\right)}{\partial v},$$

unter Beibehaltung der Bedeutungen von V, V', V_1. Es wird daher:

$$3^a) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -V\frac{\partial X}{\partial v} - p\frac{V'}{\varDelta}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = uVX - p\left\{V_1 + V\varDelta + u\frac{\partial\left(\frac{V'}{\varDelta}\right)}{\partial v}\right\}.$$

Auch hier ist die Fläche ξ, η, ζ im allgemeinen eine Regelfläche, welche — abgesehen von dem singulären Falle $V = 0$ — in eine Kegelfläche übergeht, wenn V_1 gleich Null angenommen wird.

Für die infinitesimal deformierte Fläche der Developpabelen, deren Koordinaten nach § 1

$$x + \varepsilon\xi, \quad y + \varepsilon\eta, \quad z + \varepsilon\zeta$$

sind, ist nun selbstverständlich die Fundamentalgrösse E' gleich Null. Dagegen erhält man für F' den Ausdruck

$$\varepsilon \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} \end{vmatrix},$$

wobei von den Determinanten nur eine Vertikalreihe hingeschrieben ist. Werden die Differentialquotienten der ξ, η, ζ nach 3) eingesetzt, so ergibt sich

$$\varepsilon V_1 h,$$

d. h. die infinitesimal deformierte Fläche ist im allgemeinen eine Regelfläche und nur dann wieder developpabel, wenn $V_1 = 0$ angenommen wird. Der genauere Nachweis, dass in der Tat dieser Fall, wie es zu vermuten ist, der infinitesimalen Biegung der Developpabeln entspricht, scheint allerdings die explizite Biegung dieser Flächen zu erfordern; ich gehe auf diese Frage, die eine etwas andere Behandlung erfordert, hier nicht ein.

Developpabele Flächen ändern sich also bei infinitesimaler Isometrie auch nur so, dass ihre Erzeugenden geradlinig bleiben. Nur die Ebene ist bei den vorstehenden Betrachtungen ausgeschlossen. Setzt man aber in den Gleichungen 3) und 5) des § 1 die drei Fundamentalgrössen E, F, G gleich Null voraus, so ergibt sich:

Bei allen infinitesimalen Isometrieen der Ebene ist die charakteristische Funktion φ eine Konstante und alle Deformationen dieser Art ergeben sich, wenn man den Gleichungen 1) noch die Beziehungen

$$\Sigma p \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\Sigma p \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

wo ψ eine willkürliche Funktion von u und v, hinzufügt. Und in analoger Weise erhält man auch alle Deformationen der Ebene von vorgeschriebenem Charakter, doch ist zu bemerken, dass die P, Q, R in diesem Falle nicht vollkommen willkürlich angenommen werden dürfen, sondern den Gleichungen 3^a), 3^b) des § 1 zufolge selbst einer Bedingung genügen müssen, die besonders einfach ausfällt, wenn man z. B. die Koeffizienten e, f, g als Konstanten voraussetzt.

§ 3.

Die infinitesimale Isometrie der Flächen.

Für die Untersuchung derselben sind im wesentlichen drei Methoden entwickelt. Herr Darboux hat bereits 1882 in seinen Vorlesungen unter Zugrundelegung des Koordinatensystems der Haupttangentenkurven die betreffenden Untersuchungen in ausserordentlich eleganter und fruchtbarer Weise durchgeführt; Herr Weingarten hat 1886 bei der allgemeinsten Koordinatenbestimmung die Frage auf die Ermittelung der charakteristischen Funktion φ reduziert; Herr Bianchi, dem man insbesondere die wichtige Theorie der assoziierten Flächen verdankt, bestimmt endlich die Differentialgleichungen, denen die Änderungen der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung bei der infinitesimalen Isometrie genügen müssen.[1]) Jeder dieser Wege hat besondere Vorzüge, allen aber ist das gemeinsam, dass die eine Fläche F' mit den Koordinaten ξ, η, ζ als gesuchte, die andere F (x, y, z) als gegebene erscheint, während die völlige Reziprozität der beiden Flächen zurücktritt.

Stellt man sich auf den Standpunkt, dass F und Φ überhaupt zwei Flächen sind, welche in Moutard'scher Zuordnung stehen, derart, dass in korrespondierenden Punkten korrespondierende Richtungen einen rechten Winkel miteinander bilden,

[1]) Lezioni, Vol. II, p. 22.

so erscheint es zweckmässig, die beiden Flächen als völlig gleichberechtigt anzusehen.

Setzt man

$$1)\quad \begin{aligned} &\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \\ &\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\psi \\ &\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = +\psi \\ &\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = 0,\ ^{1)} \end{aligned}$$

so folgt durch Differentiation dieser Gleichungen nach u und v, wenn man die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung für die Fläche F' (ξ, η, ζ) durch e', f', g'; E', F', G', die Normalenkosinus durch $\pi, \varkappa, \varrho$, die Christoffel'schen Koeffizienten $A, B, \ldots$ des § 1 durch kleine griechische Buchstaben bezeichnet,

$$2)\quad \begin{aligned} &1)\quad (\alpha_1 - A_1)\psi + E'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial u}\right) + E\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = 0 \\ &2)\quad (\beta_1 - B_1)\psi + F'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial u}\right) + F\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = 0 \\ &3)\ -(\alpha + B_1)\psi + E'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial v}\right) + F\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = -\frac{\partial \psi}{\partial u} \\ &4)\ -(\beta + C_1)\psi + F'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial v}\right) + G\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = -\frac{\partial \psi}{\partial v} \\ &5)\quad (\beta_1 + A)\psi + F'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial u}\right) + E\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = +\frac{\partial \psi}{\partial u} \\ &6)\quad (\gamma_1 + B)\psi + G'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial u}\right) + F\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ &7)\ (-\beta + B)\psi + F'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial v}\right) + F\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = 0 \\ &8)\ (-\gamma + C)\psi + G'\Sigma\left(\pi\frac{\partial x}{\partial v}\right) + G\Sigma\left(p\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = 0; \end{aligned}$$

---

[1]) Zwischen ψ und den charakteristischen Funktionen φ und φ' für die beiden Flächen F und F' besteht daher die Bezeichnung

$$\psi = \varphi\sqrt{H} = \varphi_1\sqrt{H_1}.$$

dabei ist nach E) § 1

$$\beta + \gamma_1 = \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial v}, \quad \beta_1 + \alpha = \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial u}.$$

Durch Subtraktion von 2), 1) und 5), 4) und 7) ergeben sich die Gleichungen von Weingarten

$$3)\quad \begin{aligned} F\,\Xi_u - E\,\Xi_v &= -\frac{\partial \psi}{\partial u} + \psi \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u} \\ F\,\Xi_v - G\,\Xi_u &= +\frac{\partial \psi}{\partial v} - \psi \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial v} \\ F'\,X_u - E'\,X_v &= +\frac{\partial \psi}{\partial u} - \psi \frac{\partial \log \sqrt{H'}}{\partial u} \\ F'\,X_v - G'\,X_u &= -\frac{\partial \psi}{\partial v} + \psi \frac{\partial \log \sqrt{H'}}{\partial v}, \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung

$$\sum p \frac{\partial \xi}{\partial u} = \Xi_u, \quad \sum p \frac{\partial \xi}{\partial v} = \Xi_v$$

$$\sum \pi \frac{\partial x}{\partial u} = X_u, \quad \sum \pi \frac{\partial x}{\partial v} = X_v$$

gesetzt wird.[1]) Aus den Gleichungen 3) ergibt sich wieder die partielle Differentialgleichung des § 2 für ψ.

Aus den Gleichungen 2) lässt sich der Satz folgern:

Für irgend zwei in Moutard'scher Zuordnung stehende Flächen F und F' besteht zwischen den

---

[1]) Bei Anwendung der Gleichungen E) des § 1 und der Gleichungen 3) nehmen die Gleichungen 2) 1, 2, 3 und 4, sowie 5 und 6, 7, 8 die völlig symmetrische Gestalt an

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - A_1)\,\psi + E'\,X_u + E\,\Xi_u &= 0 \\ (\beta_1 - B_1)\,\psi + F'\,X_u + F\,\Xi_u &= 0 \\ (\gamma_1 - C_1)\,\psi + G'\,X_u + G\,\Xi_u &= 0 \\ (A - \alpha)\;\psi + E'\,X_v + E\,\Xi_v &= 0 \\ (B - \beta)\;\psi + F'\,X_v + F\,\Xi_v &= 0 \\ (C - \gamma)\;\psi + G'\,X_v + G\,\Xi_v &= 0. \end{aligned}$$

Fundamentalgrössen zweiter Ordnung derselben die Relation[1])

$$\Omega = EG' + GE' - 2FF' = 0.$$

Zunächst erhält man für das Produkt der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ p \end{vmatrix} = \sqrt{H}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \pi \end{vmatrix} = \sqrt{H_1},$$

durch Multiplikation die Gleichung

$$4) \qquad \sqrt{HH_1} = \Xi_u X_v - \Xi_v X_u + \psi \cos \Theta,$$

welche zeigt, dass die rechte Seite, in der

$$\sum (p\pi) = \cos \Theta$$

gesetzt ist, wobei $\cos \Theta$ den Kosinus des Neigungswinkels der Normalen von F und F' bedeutet, niemals verschwinden kann, da H, H_1 nach Voraussetzung nicht Null sind.

Man differentiiere nun die beiden ersten Gleichungen 3) nach u und v. Alsdann folgt, wenn man wieder die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten, sowie die ersten der p, q, r nach den Gleichungen A) und D) des § 1 durch die ersten Differentialquotienten ersetzt,

---

[1]) Diese Relation selbst ist für nicht developpabele Flächen eine Folge von dem Satze, dass dem System der Haupttangentenkurven von F ein konjugiertes System auf F' entspricht, welchen Darboux durch Benutzung der gegenwärtig als Lelieuvre's Formeln bezeichneten Transformation ableitet, Leçons, IV, p. 50. Die Betrachtung des Textes beweist diesen wichtigen Satz in der allgemeinsten Weise für irgend zwei Flächen F und F'; übrigens ist er in § 2 schon für die Developpabelen hergeleitet.

$$F(\beta\, \Xi_u + \beta\, \Xi_v) - E(\gamma\, \Xi_u + \gamma_1\, \Xi_v) + \Xi_u \frac{\partial F}{\partial v} - \Xi_v \frac{\partial E}{\partial v}$$

$$+ (F F' - E G') \cos \Theta + F \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} - E \sum \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial v}$$

$$= - \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u} + \psi \frac{\partial^2 \log \sqrt{H}}{\partial u\, \partial v}$$

$$F(\beta\, \Xi_u + \beta_1\, \Xi_v) - G(\alpha\, \Xi_u + \alpha_1\, \Xi_v) + \Xi_v \frac{\partial F}{\partial u} - \Xi_u \frac{\partial G}{\partial u}$$

$$+ (F F' - G E') \cos \Theta + F \sum \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial u} - G \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v}$$

$$= + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial v} - \psi \frac{\partial^2 \log \sqrt{H}}{\partial u\, \partial v},$$

also durch Addition

$$\Xi_u \left(2\beta F - \gamma E - \alpha G + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\right) + \Xi_v \left(2\beta_1 F - \gamma_1 E - \alpha_1 G + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v}\right)$$

$$= \Omega \cos \Theta + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial v};$$

oder, wenn

$$2\beta\, F - \gamma\, E - \alpha\, G + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} = U$$

$$2\beta_1 F - \gamma_1 E - \alpha_1 G + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} = V,$$

gesetzt wird,

$$5) \quad \Xi_u U + \Xi_v V + \Omega \cos \Theta = \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial v}.$$

Aus den Gleichungen 2) 1, 2, 5, 6 folgt ferner durch Zuziehung von C) § 1

$$X_u \Omega + (E G - F^2)\, \Xi_u - \psi\, V = E \frac{\partial \psi}{\partial v} - F \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$X_v \Omega + (E G - F^2)\, \Xi_v - \psi\, U = F \frac{\partial \psi}{\partial v} - G \frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen mit Ξ_v und Ξ_u und subtrahiert, so folgt

$$(X_u \Xi_v - X_v \Xi_u)\,\Omega - \psi\,(V \Xi_v + U \Xi_u)$$
$$= \frac{\partial \psi}{\partial v}(E \Xi_v - F \Xi_u) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(G \Xi_u - F \Xi_v).$$

Ersetzt man hierin nach 5) den mit ψ multiplizierten Teil, so folgt unter Benutzung der beiden ersten Gleichungen 3)

$$(X_u \Xi_v - X_v \Xi_u + \psi \cos \Theta)\,\Omega = 0,$$

also nach der oben gemachten Bemerkung

$$\Omega = 0$$

und diese Gleichung gilt daher auch für den Fall, dass eine der Flächen F und F' oder beide, developpabel sind.[1])

Ist nun die nicht developpabele Fläche auf ihre Haupttangentenkurven bezogen, d. h. $E = G = 0$, so ist auch $F' = 0$. Zugleich aber folgt aus den Gleichungen 2) 4 und 5

$$\beta + C_1 = \frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial v}$$
$$\beta_1 + A = \frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

Nun ist aber nach den Gleichungen C) § 1

$$B - C_1 + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$
$$B_1 - A + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$
$$B + C_1 - \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial v} = 0$$
$$B_1 + A - \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u} = 0,$$

---

[1]) Ist die Fläche F elliptisch gekrümmt, so kann man immer ein isotherm-konjugiertes Koordinatensystem $E = G$, $F = 0$ (vgl. Bianchi, Lezioni, Vol. I, p. 167) voraussetzen. Dann ist aber $E' + G' = 0$, also die Fläche F' negativ gekrümmt. Es folgt also: Ist die Fläche F positiv gekrümmt, so ist F' von negativer Krümmung; ist dagegen F negativ gekrümmt, so kann das Krümmungsmass von F' positiv, negativ oder auch Null sein.

also

$$2\,C_1 = \frac{\partial \log F\sqrt{H}}{\partial v}$$

$$2\,A = \frac{\partial \log F\sqrt{H}}{\partial u};$$

also

$$2\,\beta = \frac{\partial \log \frac{\psi^2}{F\sqrt{H}}}{\partial v}$$

$$2\,\beta_1 = \frac{\partial \log \frac{\psi^2}{F\sqrt{H}}}{\partial u}.$$

Das heisst: Bei zwei in Moutard'scher Beziehung stehenden Flächen entspricht dem System der Haupttangentenkurven der einen ein konjugiertes System mit gleichen Invarianten der anderen.[1])

Andererseits folgt für das gemeinsame konjugierte System, welches die beiden Flächen F und F' besitzen

$$F = 0, \quad F' = 0,$$

mithin nach 2) 2 und 7

$$\beta = B, \quad \beta_1 = B_1.$$

Aber dies ist nur eine andere Ausdrucksweise für die bekannte Tatsache, dass die beiden Flächen mit den Koordinaten $x - \xi, \ldots, x + \xi, \ldots$ zu einander isometrisch sind, also auch in Bezug auf das gemeinsame konjugierte System derselben Laplace'schen Differentialgleichung genügen.

Aus den Gleichungen 2) können noch einige weitere Folgerungen gezogen werden. Ist die Fläche F developpabel und $E = 0$, $F = 0$, so ist notwendig $E' = 0$. Dann ist aber nach 2), 1 auch $a_1 = A_1$. Da nun aber für die Erzeugende der Developpabeln auch $A_1 = 0$ ist, so folgt $a_1 = 0$; d. h. die Fläche F' ist eine Regelfläche, wie in § 2 bereits erkannt

[1]) Vgl. Darboux, Leçons IV, p. 50.

wurde. Es gilt übrigens der allgemeine Satz: Stehen zwei Flächen in Moutard'scher Beziehung und entspricht dabei einer Schar von Haupttangentenkurven der einen Fläche wieder eine solche Schar auf der anderen, so ist die eine Fläche developpabel, die andere eine Regelfläche. Ist überhaupt auf der einen Fläche eine gerade Linie mit parabolischer Krümmung vorhanden, also längs derselben $F=0$, $E=0$, $\Delta_1 = 0$, so entspricht ihr auf der anderen Fläche notwendig eine gerade Linie.

Durch Multiplikation der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ p \end{vmatrix} = \cos\Theta \sqrt{H_1}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ \pi \end{vmatrix} = \cos\Theta \sqrt{H},$$

folgt

$$\psi^2 = \cos\Theta \sqrt{H H_1}.$$

Die Bestimmung von H_1 ergibt sich, wenn die Fläche F nicht developpabel ist, auf folgende Weise. Setzt man

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v} + \gamma p,$$

so ist:

$$\begin{aligned} \alpha e + \beta f &= 0 \\ \alpha f + \beta g &= -\varphi \sqrt{H} = -\psi \\ \gamma &= \Xi_u. \end{aligned}$$

Man erhält daher für die Fundamentalgrössen erster Ordnung e', f', g' von F':

$$6) \qquad \begin{aligned} e' &= e\varphi^2 + \Xi_u^2 \\ f' &= f\varphi^2 + \Xi_u \Xi_v \\ g' &= g\varphi^2 + \Xi_v^2. \end{aligned}$$

Und hieraus folgt mittelst der Gleichungen 3[a]), 3[b]) des § 1

$$H_1 = H\varphi^4 + \varphi^2 \Delta(\varphi),$$

wenn man unter $\varDelta(\varphi)$ den ersten Differentialparameter der auf die sphärische Abbildung von F bezogenen charakteristischen Funktion φ versteht, mithin ist auch

$$\cos\Theta = \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \varDelta(\varphi)}}.$$

Man kann noch eine andere Gleichung für $\cos\Theta$ erhalten. Multipliziert man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix} = \sqrt{H_1}\, X_u \text{ mit } \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ p \end{vmatrix} = \sqrt{H},$$

so folgt

$$\sqrt{H H_1}\, X_u = \psi\,(f\,\Xi_u - e\,\Xi_v)$$
$$\sqrt{H H_1}\, X_v = -\,\psi\,(f\,\Xi_v - g\,\Xi_u)$$

und durch Vertauschung

$$\sqrt{H H_1}\, \Xi_u = \psi\,(e'\,X_v - f'\,X_u)$$
$$\sqrt{H H_1}\, \Xi_v = -\,\psi\,(g'\,X_u - f'\,X_v).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich, wenn

$$\psi^2 = \omega\, H H_1 = \cos\Theta \sqrt{H H_1}$$

gesetzt wird, falls die Normalen der Flächen F, F' nicht zueinander parallel sind, also Ξ_u, Ξ_v Null sind, durch geeignete Kombination

$$\omega^2\, H H_1 - \omega\,(e\,g' + g\,e' - 2\,f f'\,1) + 1 = 0,$$

wodurch die charakteristische Funktion resp. $\cos\Theta$ durch die Fundamentalgrössen erster Ordnung von F und F' ausgedrückt ist.

Sind nun F und F' konform aufeinander bezogen, die Normalen aber in entsprechenden Punkten nicht zueinander parallel, so folgt wegen $e' = \lambda\, e$, $f' = \lambda\, f$, $g' = \lambda\, g$

$$\omega^2 \lambda^2 H^2 - 2\,\omega\,\lambda\,H + 1 = 0$$

oder

$$\omega = \frac{1}{\lambda H}, \quad \psi^2 = \lambda H, \quad \varphi^2 = \lambda.$$

Dann aber folgt aus den Gleichungen 6), dass Ξ_u, Ξ_v Null sein müssten, was der Voraussetzung widerspricht. Die konforme Beziehung erfordert also den Parallelismus der Normalen. Dann aber ist nach den Gleichungen 3) des § 1 die charakteristische Funktion notwendig eine Konstante, und dies kann nur eintreten, wenn F eine Minimalfläche ist. Dann ist aber auch F' eine Minimalfläche; die Beziehung überdies (wegen $\lambda =$ konst) eine Ähnlichkeit; man erkennt sofort, dass F und F' zwei adjungierte Minimalflächen (mit parallel zugeordneten Normalen) oder zu solchen ähnlich und ähnlich gelegen sind.

Zwei in Moutard'scher Beziehung stehende Flächen, die nicht developpabel sind, können nur dann zugleich konform aufeinander bezogen sein, wenn sie adjungierte Minimalflächen (also auch isometrisch zueinander) oder zu solchen ähnlich und ähnlich gelegen sind.

Die noch mögliche Ausnahme lässt sich leicht beseitigen. Ist nämlich F developpabel, so sind die Koeffizienten e', f', g' des Quadrates des Längenelementes von F' nach 3) § 2

$$\text{7)} \qquad \begin{aligned} e' &= V^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 \frac{h^4}{\Delta^2} \\ g' &= V^2 h^2 (u - v)^2 + M^2 \\ f' &= \frac{h^2 M}{\Delta} \frac{\partial V}{\partial v}, \end{aligned}$$

wo

$$M = V_1 - (u - v)\left(V \frac{\Delta}{h^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h^2}{\Delta} \frac{\partial V}{\partial v}\right)\right).$$

Konform aber kann diese Beziehung nur sein, wenn auch $f' = 0$ ist, also entweder V konstant oder M gleich Null ist; hieraus würde aber in beiden Fällen $V_1 = 0$, $V = 0$ folgen. Eine konforme Beziehung kann also überhaupt nicht eintreten, wenn F developpabel ist.

Man kann endlich voraussetzen, dass die beiden Flächen F und F' auf das gemeinsame reelle System orthogonaler Koordinatenlinien bezogen sind. Dann ist notwendig nach 6)

$$\Xi_u \cdot \Xi_v = 0,$$

also, wenn etwa $\Xi_u = 0$ angenommen wird, auch $X_v = 0$, und man erhält

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\psi}{e} \frac{\partial x}{\partial u} + \gamma p$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = - \frac{\psi}{g} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Es gibt daher immer ein System der Kurven $u =$ konst der ersten Fläche, denen Kurven $v =$ konst mit parallelen Tangenten in entsprechenden Punkten der zweiten Fläche entsprechen; eine besondere Vereinfachung scheint aber die Einführung dieses Koordinatensystems nicht mit sich zu bringen. — Ist F eine developpabele Fläche, so erfordert der Fall $f' = 0$, dass entweder $V =$ konst ist oder M verschwindet. Im ersten Falle ist F' noch eine Regelfläche, im zweiten Falle ist F' notwendig auch developpabel, und V ist aus der Differentialgleichung

$$\frac{V \Delta}{h^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h^2}{\Delta} \frac{\partial V}{\partial v}\right) = 0$$

zu bestimmen.

§ 4.

Die konforme Transformation.

Bei der konformen Transformation ist

$$\delta\, d s^2 = 2\, \varepsilon \lambda\, d s^2,$$

oder

1) $$\delta\, d s = \varepsilon \lambda\, d s,$$

wie aus den Gleichungen

$$\delta e = 2\, \varepsilon \lambda e, \quad \delta f = 2\, \varepsilon f \lambda, \quad \delta g = 2\, \varepsilon g \lambda,$$

oder

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} = \lambda \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}$$

2) $$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} = 2\lambda \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \lambda \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

hervorgeht. Die Transformation ändert (bis auf Glieder mit ε^2) die Länge Null der Minimalkurven der Fläche nicht, und kann auch durch diese Eigenschaft definiert werden. Für den Kosinus des Winkels zweier Richtungen d_1 und d_2 auf der Fläche

$$d_1 s\, d_2 s \cos\Theta = e\, d_1 u\, d_2 u + f(d_1 u\, d_2 v + d_2 u\, d_1 v) + g\, d_1 v\, d_2 v$$

folgt $$\delta \cos\Theta = 0.$$

Bei der konformen infinitesimalen Deformation bleiben also auch die Winkel ungeändert; isometrische Kurvensysteme bewahren ihren Charakter. Auch eine gewisse Analogie zur Moutard'schen Deutung der infinitesimalen Isometrie lässt sich hier festhalten. Setzt man

$$\xi - \lambda x, \quad \eta - \lambda y, \quad \zeta - \lambda z$$

in den Formeln 2) gleich Ξ, H, Z, so folgt:

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \Xi}{\partial u} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial r^2}{\partial u}$$

2a) $$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \Xi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \Xi}{\partial u} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial r^2}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial r^2}{\partial v}\right)$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \Xi}{\partial v} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial r^2}{\partial v},$$

wenn unter r^2 das Quadrat der Entfernung des Punktes x, y, z vom Anfang der Koordinaten verstanden wird. Das Quadrat des Längenelementes $d\sigma$ der Fläche mit den Koordinaten

$$x + t\Xi, \quad y + tH, \quad z + tZ$$

ist bei konstantem Werte von t nach 2a)

$$d\sigma^2 = ds^2 - t\, d\lambda\, dr^2 + t^2(d\Xi^2 + dH^2 + dZ^2).$$

Die beiden Flächen mit den Koordinaten

$$x \pm t\,\Xi, \quad y \pm t\,H, \quad z \pm t\,Z$$

sind daher nicht mehr isometrisch zueinander — dies würde, abgesehen von dem Falle der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 =$ konst,[1]) nur für $\lambda =$ konst eintreten, d. h. für die mit einer Ähnlichkeitstransformation $\xi = c\,x$, $\eta = c\,y$, $\zeta = c\,z$ verbundene infinitesimale Isometrie, aber sie stehen in der Beziehung, dass längs der Kurven, welche durch die Beziehung

$$d\,r^2 = \text{konst}, \quad \text{oder auch} \quad \lambda = \text{konst}$$

auf den Flächen in Korrespondenz versetzt werden, die Längenelemente derselben gleich sind. Es sind das im allgemeinen zwei verschiedene Kurvensysteme, die nur dann zusammenfallen, wenn der Modulus λ der konformen Deformation selbst eine Funktion von r allein ist.[2])

Setzt man in den Formeln 3^a), 3^b) des § 1

$$P = \mu\,e, \quad Q = \mu\,f, \quad R = \mu\,g,$$

so ergeben sich für die rechten Seiten derselben

$$\frac{\partial P}{\partial v} + P\,C_1 + R\,A_1 - 2\,Q\,B_1 - \frac{\partial Q}{\partial u}$$

$$\frac{\partial R}{\partial u} + R\,A + P\,C - 2\,Q\,B - \frac{\partial Q}{\partial v},$$

nach den Gleichungen C) des § 1 die Ausdrücke

$$\frac{1}{\sqrt{H}}\left(e\frac{\partial\,\mu\sqrt{H}}{\partial v} - f\frac{\partial\,\mu\sqrt{H}}{\partial u}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{H}}\left(f\frac{\partial\,\mu\sqrt{H}}{\partial u} - g\frac{\partial\,\mu\sqrt{H}}{\partial v}\right),$$

---

[1]) Dieser Fall eines Paares zueinander isometrischer Flächen, welche noch von einer willkürlichen Funktion abhängen, dürfte eine etwas ausführlichere Behandlung verdienen.

[2]) Derartige Kurvensysteme (reell oder imaginär) gibt es selbstverständlich bei jeder Korrespondenz zwischen den Punkten zweier Flächen; dieselben sind im vorliegenden Falle nur durch eine besonders einfache Beziehung ausgedrückt.

so dass, wenn $\mu\sqrt{H}=\lambda$ gesetzt wird, die partielle Differentialgleichung für die charakteristische Funktion φ die Form annimmt:

$$3)\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial u}-E\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{k\sqrt{H}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial v}-G\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{k\sqrt{H}}\right)+\frac{\partial\frac{\omega_1}{k}}{\partial v}-\frac{\partial\frac{\omega_2}{k}}{\partial u}$$

$$=\frac{\varphi}{\sqrt{H}}(Eg+Ge-2fF),$$

wenn man zur Abkürzung

$$4)\quad \begin{aligned}-\omega_1 H&=(gE-Ff)\frac{\partial\lambda}{\partial u}+(eF-fE)\frac{\partial\lambda}{\partial v},\\ -\omega_2 H&=(gF-fG)\frac{\partial\lambda}{\partial u}+(eG-fF)\frac{\partial\lambda}{\partial v}\end{aligned}$$

setzt. Für die K u g e l, wo ω_1 und ω_2 identisch Null sind, reduziert sich die Gleichung 3) auf die der infinitesimalen Isometrie, wie nach § 1 zu erwarten war.

Dieser Umstand findet auch dann statt, wenn

$$5)\quad \frac{\partial\frac{\omega_1}{k}}{\partial v}-\frac{\partial\frac{\omega_2}{k}}{\partial u}=0$$

wird. Nun ist aber nach § 1, D)

$$H\frac{\partial p}{\partial u}=(fF-gE)\frac{\partial x}{\partial u}+(fE-eF)\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$H\frac{\partial p}{\partial v}=(fG-gF)\frac{\partial x}{\partial u}+(fF-eG)\frac{\partial x}{\partial v}$$

und hieraus folgt, dass die Gleichungen

$$(fF-gE)\frac{\partial r^2}{\partial u}+(fE-eF)\frac{\partial r^2}{\partial v}=2H\frac{\partial}{\partial u}\Sigma(px)$$

$$(fG-gF)\frac{\partial r^2}{\partial u}+(fF-eG)\frac{\partial r^2}{\partial v}=2H\frac{\partial}{\partial v}\Sigma(px)$$

bestehen. Für d i e j e n i g e n F l ä c h e n, b e i d e n e n, w i e z. B. b e i d e n F l ä c h e n k o n s t a n t e r K r ü m m u n g, d e n R o t a t i o n s-

flächen etc. das Krümmungsmass k eine Funktion der Entfernung der Tangentialebene vom Anfang ist, kennt man daher eine partikuläre konforme infinitesimale Deformation, bei der $\lambda = r^2$ gewählt ist.

Etwas ähnliches findet statt, wenn das Krümmungsmass k in den gleichen Punkten einen konstanten Wert hat, wo die Neigung der Flächennormale gegen eine feste Richtung eine konstante Grösse besitzt. Denn es ist auch

$$(fF - gE)\frac{\partial \sum c x}{\partial u} + (fE - eF)\frac{\partial}{\partial v}\sum c x = H\frac{\partial}{\partial u}\sum c p$$

$$(fG - gF)\frac{\partial \sum c x}{\partial u} + (fF - eG)\frac{\partial \sum c x}{\partial v} = H\frac{\partial}{\partial v}\sum c p,$$

so dass man wieder eine partikuläre Lösung erhält, wenn

$$\lambda = c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

genommen wird.

Die Flächen, bei denen das Krümmungsmass eine Funktion des Winkels ist, den die Normale mit einer festen Richtung, etwa mit der Z Axe des rechtwinkligen Koordinatensystems bildet, lassen sich auf folgende Weise finden. Man nehme an, dass das Krümmungsmass nicht konstant sei und wähle die Kurven konstanten Krümmungsmasses zu Kurven $u =$ konst; die Kurven $v =$ konst seien ihre senkrechten Trajektorien. Die sphärische Abbildung dieses Kurvensystems besteht dann in den Parallelkreisen und Meridianen der Einheitskugel, und aus dieser sphärischen Abbildung ist umgekehrt die Fläche herzuleiten.

Setzt man demgemäss

$$p = \cos v \sin u$$
$$q = \sin v \sin u$$
$$r = \cos u,$$

so ergeben sich die Koordinaten der zugehörigen Fläche durch die Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -E\cos v\cos u + F\frac{\sin v}{\sin u}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -E\sin u\cos u - F\frac{\cos v}{\sin u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \quad E\sin u,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -F\cos v\cos u + G\frac{\sin v}{\sin u}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -F\sin v\cos u - G\frac{\cos v}{\sin u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \quad F\sin u,$$

wobei

$$EG - F^2 = \sin^2 u\, U$$

vorauszusetzen ist, und die von u allein abhängige Funktion U das reziproke Krümmungsmass bedeutet. Die vorstehenden Gleichungen müssen nun noch den Integrabilitätsbedingungen genügen. Setzt man

$$E\sin u = \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$F\sin u = \frac{\partial z}{\partial v},$$

so sind dieselben, wie eine einfache Rechnung zeigt

$$\text{6)} \qquad E\sin u = \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad F\sin u = \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\text{7)} \qquad \frac{\partial \frac{G}{\sin u}}{\partial u} = \operatorname{cotg} u\,\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{\sin^2 u},$$

wo

$$\text{8)} \qquad \frac{G}{\sin u} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{\frac{\partial z}{\partial u}\sin u} + \frac{\sin^2 u\, U}{\frac{\partial z}{\partial u}}$$

zu setzen ist. Man erhält also die Differentialgleichung zweiter Ordnung für z durch Einsetzen von 8) in 7).[1] Da sie nicht allgemein lösbar scheint, beschränke ich mich auf die Betrachtung eines speziellen Falles.

Nimmt man $\frac{\partial z}{\partial v} = c =$ konst an, so ist E eine Funktion von u allein

$$E = \frac{1}{\cos u} \frac{\partial U_1}{\partial u};$$

dann aber wird nach 7)

$$G = (U_1 + c_1) \sin u,$$

weil G nach 8) nicht von v abhängen kann. Die Gleichung 8) dient dann zur Bestimmung der Funktion U. Es folgt daher

$$x = -(U_1 + c_1) \cos v - c \sin v \operatorname{cotg} u$$
$$y = -(U_1 + c_1) \sin v + c \cos v \operatorname{cotg} u$$
$$z = c v + \int \frac{\partial U_1}{\partial u} \operatorname{tg} u \, d u,$$

oder, wenn

$$c \operatorname{cotg} u = \lambda \sin \varepsilon$$
$$U_1 + c_1 = \lambda \cos \varepsilon$$

gesetzt wird

$$x = -\lambda \cos (v - \varepsilon)$$
$$y = -\lambda \sin (v - \varepsilon)$$
$$z = c (v - \varepsilon) + c \varepsilon + \int \frac{\partial U_1}{\partial u} \operatorname{tg} u \, d u.$$

---

[1] Einfache Eigenschaften dieser Flächen sind folgende. Da

$$d z = \sin u (E d u + F d v),$$

so sind die Kurven $z =$ konst **konjugiert** zu den Kurven $v =$ konst. Ferner ist das Quadrat des Längenelementes

$$d s^2 = (E d u + F d v)^2 + \left(\frac{F d u + G d v}{\sin^2 u}\right)^2,$$

d. h. die zu den Kurven $u =$ konst, $v =$ konst **konjugierten** Kurven bilden ein **Orthogonalsystem**.

Da λ und ε nur Funktionen von u sind, erkennt man in dieser Darstellung die Schraubenflächen, im speziellen Falle $c = 0$ die Rotationsflächen.

Bei der Aufstellung der Gleichungen 7), 8) ist indessen vorausgesetzt, dass $\frac{\partial z}{\partial u}$ oder E nicht Null ist. Für den Fall, dass die Kurven $v =$ konst Haupttangentenkurven der gesuchten Fläche werden, erhält man aber aus den aufgestellten Gleichungen

$$z = c\,v + c_1$$

$$F = \frac{c}{\sin u},$$

während die Integrabilitätsbedingungen liefern

$$G = V \sin u,$$

wenn V eine willkürliche Funktion von v ist, und somit

$$\begin{aligned} x &= -\,c \sin v \operatorname{cotg} u + \int V \sin v\, d\,v \\ y &= +\,c \cos v \operatorname{cotg} u - \int V \cos v\, d\,v \\ z &= \quad c\,v + c_1, \end{aligned}$$

d. h. eine Regelfläche mit dem Krümmungsmass

$$-\frac{\sin^4 u}{c^2};$$

in dem speziellen Falle $V = 0$ entsteht die gewöhnliche Schraubenfläche.

Verlangt man, alle konformen infinitesimalen Deformationen zu bestimmen, bei denen λ einen vorgeschriebenen Wert hat, so ist natürlich die partielle Differentialgleichung für φ zu lösen. Will man aber überhaupt nur konforme Deformationen finden, so kann man auch in dieser Gleichung λ als Unbekannte ansehen; kann man sie dann in der allgemeinsten Weise befriedigen, so gelingt es, alle konformen Deformationen zu bestimmen, jedoch nicht so, dass man nun auch schon alle solchen Deformationen eines vorgeschriebenen Charakters gewonnen hätte. In diesem Sinne lässt sich z. B.

für die Minimalflächen das Problem der infinitesimalen konformen Deformationen vollständig lösen.

Bezieht man eine (reelle) Minimalfläche auf ihre Krümmungslinien u, v, so sind die beiden Fundamentalgrössen E (G) nach den Codazzi'schen Gleichungen § 1, D) Funktionen von u (v) allein. Da keine derselben verschwinden darf, so kann man dieselben gleich $+1$, resp. -1 annehmen; dann ist aber die Fläche durch ihre Krümmungslinien in infinitesimale Quadrate geteilt, denn aus der für Minimalflächen charakteristischen Gleichung

$$Eg + Ge = v$$

folgt jetzt $g = e$. Da nun das Krümmungsmass $k = -\frac{1}{e^2}$ wird, nimmt die Gleichung 3) die einfache Form

$$\frac{\partial}{\partial v} e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right)$$

an. Setzt man jetzt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{1}{e} \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{1}{e} \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

wo ψ eine willkürliche Funktion an u, v ist, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{e} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{e} \frac{\partial \psi}{\partial v} = \Omega(u, v),$$

welche Gleichung in bekannter Weise auf die durch Quadratur zu lösende

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_1 \partial v_1} = \Omega_1(u_1, v_1)$$

zurückgeführt wird. Alle konformen infinitesimalen Deformationen der Minimalflächen lassen sich daher durch Quadraturen bestimmen.

Ich erwähne, um ein weiteres Beispiel zu geben, noch die Cycliden. Führt man überhaupt in die Gleichung 3) die

Voraussetzung ein, dass die Fläche auf ihre Krümmungslinien bezogen ist, so erhält sie wegen

$$f = 0, \quad F = 0$$

die Form

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{eg}}{G}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{eg}}{E}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{g}{G}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e}{E}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)$$

$$+ \varphi \frac{Eg + Ge}{\sqrt{eg}} = 0.$$

Ist also $\frac{e}{E}$ nur von v, $\frac{g}{G}$ nur von u abhängig, so wird der λ enthaltende Teil von der Form

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \, \partial v}\left(\frac{g}{G} - \frac{e}{E}\right),$$

so dass λ durch Quadratur gefunden werden kann. Es sind dies aber diejenigen Flächen, bei denen die beiden Schalen der Zentralfläche sich auf zwei Kurven reduzieren, d. h. die Dupin'schen Cycliden. Alle infinitesimalen konformen Deformationen dieser Cycliden sind demnach durch Quadraturen bestimmbar; ich übergehe die leicht auszuführenden Integrationen, durch welche man die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung einer solchen auf ihre Krümmungslinien bezogenen Cyclide aus den Codazzi'schen Gleichungen zu bestimmen hat.

Wir fragen nun nach den infinitesimalen konformen Deformationen der Fläche in sich. Lässt sich die Fläche in dieser Weise in sich verschieben, so gibt es für jeden Punkt eine gewisse Richtung der Verschiebung; die von diesen Richtungen umhüllten Kurven seien die Kurven $v =$ konst. Wenn diese Kurven nicht gerade zugleich Minimalkurven der Fläche sind, kann man das System ihrer Orthogonalkurven zu Kurven $u =$ konst wählen. Unter dieser Voraussetzung aber werden die Komponenten des Verschiebungsvektors

$$\xi = \frac{\mu}{\sqrt{e}} \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\eta = \frac{\mu}{\sqrt{e}} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\zeta = \frac{\mu}{\sqrt{e}} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Wegen der Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{\mu}{\sqrt{e}} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\mu}{2 e \sqrt{e}} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial e}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{\mu}{\sqrt{e}} \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} - \frac{\mu}{2 e \sqrt{e}} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial e}{\partial v}$$

ist daher zu setzen

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} \sqrt{e} = \lambda e,$$

$$\frac{\mu}{2\sqrt{e}} \frac{\partial g}{\partial u} = \lambda g,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} \sqrt{e} - \frac{\mu}{2\sqrt{e}} \frac{\partial e}{\partial v} = 0.$$

Dies liefert aber

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial u} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial v} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial \log e}{\partial v};$$

oder

$$\frac{\partial^2 \log \frac{e}{g}}{\partial u \, \partial v} = 0.$$

Man erhält daher die allgemeine Auflösung der Aufgabe, alle konformen infinitesimalen Deformationen der Fläche in sich zu bestimmen, durch die Bestimmung aller isothermen Systeme derselben. Setzt man demgemäss

$$e = g$$

voraus, so wird $\mu = e$ konst und die Komponenten der Verschiebung sind einfach der Grösse des Längenelements an der betreffenden Stelle proportional, die Funktion λ hat den Wert $\frac{1}{2}\frac{\partial \log e}{\partial u}$.

Ist aber das System der Kurven $v =$ konst aus Minimalkurven der Fläche gebildet, was freilich nur bei imaginären Verschiebungen möglich ist, so gilt die vorstehende Betrachtung nicht mehr, weil diese Kurven kein Orthogonalsystem besitzen. Durch Einführung der zweiten Schar von Minimalkurven $u =$ konst erhält man jetzt für die Bedingungen einer konformen Deformation

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = \lambda f,$$

welche durch den Ansatz

$$\xi = \mu \frac{\partial x}{\partial u} + \nu \frac{\partial x}{\partial v}, \text{ etc.}$$

zu befriedigen sind. Hieraus folgt aber

$$f \frac{\partial \nu}{\partial u} = 0, \quad f \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0,$$

daher ist die allgemeine Lösung

$$\xi = U \frac{\partial x}{\partial u} + V \frac{\partial x}{\partial v}$$

nebst den analogen Werten für η, ζ, und für λ folgt

$$\lambda = \frac{1}{f}\left\{\partial \frac{(Uf)}{\partial u} + \partial \frac{(Vf)}{\partial v}\right\}.$$

Im allgemeinen erhält man hier selbstverständlich nur die isothermen Systeme wieder. Aber hievon abgesehen ist es auch noch zulässig, z. B. die willkürliche Funktion V von v gleich Null zu setzen; man hat dann eine Verschiebung längs der Minimalkurve. Nur in dem Falle, wo die Funktion λ

gleich Null sein, d. h. eine infinitesimale isometrische Deformation entstehen soll, ist diese Annahme im allgemeinen nicht mehr gestattet. Denn es müsste dann Uf von u unabhängig, also die Fundamentalgrösse f selbst von der Form $\frac{V}{U}$ sein. Dann aber wäre die Fläche developpabel; ein Fall, den man gewöhnlich ausschliesst.[1])

§ 5.

Neue Lösung des Problems der infinitesimalen Deformation.

Anstatt die Differentialquotienten der Verschiebungskoordinaten ξ, η, ζ zu suchen, aus denen durch Quadratur dann die Werte der ξ, η, ζ selbst hergeleitet werden, kann man auch darauf ausgehen, diese Komponenten direkt darzustellen.[2]) Setzt man zu diesem Zwecke

$$1)\qquad \begin{aligned} \xi &= \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v} + \nu p \\ \eta &= \lambda \frac{\partial y}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial v} + \nu q \\ \zeta &= \lambda \frac{\partial z}{\partial u} + \mu \frac{\partial z}{\partial v} + \nu r, \end{aligned}$$

so wird

$$1^a)\qquad \begin{aligned} \Sigma\left(\xi \frac{\partial x}{\partial u}\right) &= \lambda e + \mu f \\ \Sigma\left(\xi \frac{\partial x}{\partial v}\right) &= \lambda f + \mu g \\ \Sigma\,(\xi\, p) \quad &= \nu. \end{aligned}$$

Es sind also

$$\frac{\lambda e + \mu f}{\sqrt{e}}, \quad \frac{\lambda f + \mu g}{\sqrt{g}}, \quad \nu$$

---

[1]) So auch Bianchi, Lezioni vol. II, p. 60; die Flächen mit infinitesimaler Isometrie in sich sind zu Rotationsflächen isometrisch.

[2]) Dieser Ansatz findet sich, indessen unter Voraussetzung eines Orthogonalsystems der u, v auch bei Herrn Daniële, a. a. O., p. 28.

die Projektionen des Verschiebungsvektors ξ, η, ζ auf die Tangenten der Kurven v und u, und die Flächennormale. Aus den Bedingungen für eine beliebige Deformation, die wir jetzt

$$\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = P$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 2\,Q$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = R,$$

schreiben, erhält man durch Einführung der Funktion ψ die Gleichungen

$$2)\quad \begin{aligned} &e\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial u} + f\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\mu}{2}\frac{\partial e}{\partial v} = \nu E + P \\ &f\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}\right) + g\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial u} = \nu F - \psi + Q \\ &e\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial v} + f\frac{\partial \mu}{\partial v} + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \nu F + \psi + Q \\ &f\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial g}{\partial u} + g\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial v} = \nu G + R. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den Fundamentalgrössen erster Ordnung

$$g, \quad -f, \quad -f, \quad e$$

und addiert, so ergibt sich

$$3)\quad \begin{aligned} &\partial\frac{\lambda\sqrt{H}}{\partial u} + \partial\frac{\mu\sqrt{H}}{\partial v} \\ &= \nu\left(\frac{Eg + Ge - 2fF}{\sqrt{H}}\right) + \frac{Pg - 2\,Qf + Re}{\sqrt{H}}. \end{aligned}$$

Durch eine etwas andere Kombination kann man die Gleichungen 2) in die Form

$$
2') \quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda A + \mu B = \frac{\nu(Eg - Ff) + \psi f + Pg - Qf}{H} \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda B + p\, C = \frac{\nu(Fg - Gf) + \psi g + Qg - Rf}{H} \\
&\frac{\partial \mu}{\partial u} + \lambda A' + p B' = \frac{\nu(Fe - Ef) - \psi e + Qe - Pf}{H} \\
&\frac{\partial \mu}{\partial v} + \lambda B' + \mu C_1 = \nu(Ge - Ff) - \psi f + \frac{Re - Qf}{\sqrt{H}}
\end{aligned}
$$

bringen, in denen linker Hand nur die Christoffel'schen Koeffizienten vorkommen. Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit den Fundamentalgrössen zweiter Ordnung

$$-F, \quad E, \quad -G, \quad F,$$

so entsteht, wenn man die Codazzi'schen Gleichungen C) hinzuzieht:

$$
4) \quad \partial\frac{(\lambda E + \mu F)}{\partial v} - \partial\frac{(\lambda F + \mu G)}{\partial u} = \frac{\psi}{H}(Eg + Ge - 2fF) - \frac{1}{H}\begin{vmatrix} P & Q & R \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix}.
$$

Ferner folgt unmittelbar aus den Gleichungen 1ᵃ):

$$
5) \quad
\begin{aligned}
&\partial\frac{\lambda e + \mu f}{\partial v} - \partial\frac{\lambda f + \mu g}{\partial u} = 2\psi \\
&\frac{\partial v}{\partial u} = \sum p \frac{\partial \xi}{\partial u} - (\lambda E + \mu F) \\
&\frac{\partial v}{\partial v} = \sum p \frac{\partial \xi}{\partial v} - (\lambda F + \mu G),
\end{aligned}
$$

aus welchen Gleichungen man auch 4) hätte direkt finden können, nach § 1, 5). — Bildet man ferner die Integrabilitätsbedingungen des Systemes 2), so ergibt sich, wenn man wieder die Codazzi'schen Gleichungen beachtet,[1])

[1]) Selbstverständlich ergeben sich diese Gleichungen auch aus den in § 3 bestimmten Werten der Ξ_u, Ξ_v nach 5).

$$6)\qquad -\mu = -\frac{E\frac{\partial \nu}{\partial v} - F\frac{\partial \nu}{\partial u}}{kH} - \frac{1}{k\sqrt{H}}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{S}{kH}$$

$$-\lambda = \frac{G\frac{\partial \nu}{\partial u} - F\frac{\partial \nu}{\partial v}}{kH} + \frac{1}{k\sqrt{H}}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{T}{kH},$$

wo $\frac{\psi}{\sqrt{H}} = \varphi$ die charakteristische Funktion bedeutet, und S und T durch die Bezeichnungen

$$S = \frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} + A_1 R - B_1 Q + A Q - B P$$

$$T = \frac{\partial R}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial v} + C P - B Q + C_1 Q - B_1 R$$

des § 1 definiert sind.

Bildet man nun aus 6) die Gleichungen

$$-(\lambda E + \mu F) = \frac{\partial \nu}{\partial u} + \frac{1}{k\sqrt{H}}\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{ES + FT}{kH}$$

$$-(\lambda F + \mu G) = \frac{\partial \nu}{\partial v} + \frac{1}{k\sqrt{H}}\left(F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{FS + GT}{kH},$$

so ergibt sich wieder durch Elimination von ν die partielle Differentialgleichung, der die Funktion φ zu genügen hat, in der Form

$$7)\quad \frac{\partial}{\partial v}\frac{\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)}{k\sqrt{H}} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\left(G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)}{k\sqrt{H}} + \partial\frac{\frac{ES+FT}{kH}}{\partial v} - \partial\frac{\frac{FS+GT}{kH}}{\partial u}$$

$$= -\frac{\varphi}{\sqrt{H}}(Eg + Ge - 2fF) + \begin{pmatrix} P & Q & R \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix}\frac{1}{H},$$

welche vollständig mit der in § 1 gegebenen übereinstimmt.

Die Gleichungen 2) und 6) bilden daher unter Voraussetzung von 7) ein System von sechs unbeschränkt integrabelen Differentialgleichungen, aus denen man die λ, μ, ν bestimmen kann, sobald die Werte derselben für irgend einen

Punkt beliebig festgesetzt sind.[1]) An und für sich wird dadurch freilich die Bestimmung der Transformation, welche nach Lösung von 7) nach § 1 nur noch Quadraturen verlangt, sobald die Fläche gegeben ist, nicht vereinfacht. Denn die Integration dieses Systems ist selbst wieder eine neue Aufgabe, die im wesentlichen auf die hinauskommt, die Koordinaten einer Fläche aus ihren sechs Fundamentalgrössen herzuleiten. Die wahre Bedeutung dieses Systems besteht vielmehr darin, dass durch dasselbe die Komponenten des Verschiebungsvektors auf eine von jeder Koordinatenbestimmung unabhängige Weise ausgedrückt sind, sobald man nur diese Fundamentalgrössen kennt.

In dem besonderen Falle der infinitesimalen Isometrie hat man übrigens an Stelle von 3), 4) und 6)

$$\text{3')} \qquad \frac{\partial \lambda \sqrt{H}}{\partial u} + \frac{\partial \mu \sqrt{H}}{\partial v} = \nu \frac{Eg + Ge - 2fF}{\sqrt{H}},$$

$$\text{4')} \qquad \frac{\partial (\lambda E + \mu F)}{\partial v} - \frac{\partial (\lambda F + \mu G)}{\partial u} = \frac{\varphi}{\sqrt{H}} (Eg + Ge - 2fF),$$

$$\text{6')} \qquad \begin{aligned} -\mu &= \frac{E\frac{\partial \nu}{\partial v} - F\frac{\partial \nu}{\partial u}}{kH} - \frac{1}{k\sqrt{H}}\frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ -\lambda &= \frac{G\frac{\partial \nu}{\partial u} - F\frac{\partial \nu}{\partial v}}{kH} + \frac{1}{k\sqrt{H}}\frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned}$$

Um eine Anwendung von diesen Formeln zu machen, nehme man an, die Fläche sei eine Minimalfläche. Dann ist nach 3')

$$\lambda \sqrt{H} = \frac{\partial \varrho}{\partial v}$$

$$\mu \sqrt{H} = -\frac{\partial \varrho}{\partial u},$$

und nach Gleichung 5) wird

[1]) Vgl. auch einige Bemerkungen bei Herrn Danièle, a. a. O., p. 45.

$$2\varphi = \frac{1}{\sqrt{H}}\left(\frac{\partial \dfrac{\left(e\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} - f\dfrac{\partial \varrho}{\partial u}\right)}{\sqrt{H}}}{\partial v} + \frac{\partial \dfrac{\left(g\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} - f\dfrac{\partial \varrho}{\partial v}\right)}{\sqrt{H}}}{\partial u}\right);$$

d. h. bei den Minimalflächen ist die charakteristische Funktion[1]) der zweite Differentialparameter der Funktion ϱ, deren partielle Differentialquotienten die Grössen λ, μ bestimmen.

Andererseits ist nach 4′)

$$\lambda E + \mu F = \frac{\partial \Theta}{\partial u}$$

$$\lambda F + \mu G = \frac{\partial \Theta}{\partial v},$$

oder, durch Auflösung nach den λ, μ

$$k H \lambda = G\frac{\partial \Theta}{\partial u} - F\frac{\partial \Theta}{\partial v}$$

$$k H \mu = E\frac{\partial \Theta}{\partial v} - F\frac{\partial \Theta}{\partial u}.$$

Setzt man diese Werte der λ, μ in die Gleichung 3′) ein, so folgt

$$\frac{\partial \dfrac{G\dfrac{\partial \Theta}{\partial u} - F\dfrac{\partial \Theta}{\partial v}}{k\sqrt{H}}}{\partial u} + \frac{\partial \dfrac{E\dfrac{\partial \Theta}{\partial v} - F\dfrac{\partial \Theta}{\partial u}}{k\sqrt{H}}}{\partial v} = 0.$$

Dies aber sagt nach 7) aus, dass Θ wieder eine charakteristische Funktion für die gegebene Minimalfläche ist. Aus jeder infinitesimalen isometrischen Deformation einer Minimalfläche mit der charakteristischen Funktion lässt sich daher eine zweite mit der charakteristischen Funktion Θ durch Quadratur herleiten.

Da endlich auch noch nach 7)

---

[1]) Bis auf den Faktor $^1/_2$.

$$\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{k\sqrt{H}} = \frac{\partial \omega}{\partial u}$$

$$\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{k\sqrt{H}} = -\frac{\partial \omega}{\partial v},$$

so folgt wegen

$$0 = \lambda E + \mu F + \frac{\partial \nu}{\partial u} + \frac{1}{k\sqrt{H}}\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)$$

$$0 = \lambda F + \mu G + \frac{\partial \nu}{\partial v} + \frac{1}{k\sqrt{H}}\left(F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right),$$

die Beziehung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \frac{\partial \nu}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0,$$

also

$$\Theta + \nu + \omega = \text{konst.}$$

Eine zweite Anwendung lässt sich auf die **Flächen konstanter Krümmung** machen. Multipliziert man die Gleichungen 6') mit $\sqrt{H}$ und bildet dann die Relation 3'), so folgt

$$-\nu\frac{(Eg + Ge - 2fF)}{\sqrt{H}} = \frac{\partial \frac{E\frac{\partial \nu}{\partial v} - F\frac{\partial \nu}{\partial u}}{k\sqrt{H}}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{G\frac{\partial \nu}{\partial u} - F\frac{\partial \nu}{\partial v}}{k\sqrt{H}}}{\partial u}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right).$$

Besteht also eine Relation

$$F(\varphi, k) = 0,$$

so genügt die Funktion v, d. h. die Normalkomponente des Verschiebungsvektors wieder der partiellen Differentialgleichung 7), ist also eine charakteristische Funktion. Insbesondere ist diese Bedingung für die Flächen konstanter Krümmung von selbst erfüllt, und so folgt:

Aus jeder infinitesimalen Isometrie einer Fläche konstanter Krümmung mit der charakteristischen Funktion φ ergibt sich durch Quadraturen eine zweite, deren charakteristische Funktion die Normalkomponente des Verschiebungsvektors ist.[1])

Mit Hilfe der angegebenen Formeln lässt sich auch die Frage nach denjenigen Flächen, welche eine infinitesimale Isometrie in sich besitzen, ohne Anwendung eines speziellen Koordinatensystems entscheiden. Die Fläche wird in sich verschoben, wenn die Normalkomponente v des Vektors ξ, η, ζ Null ist; dann ist aber nach 3')

$$\lambda \sqrt{H} = \frac{\partial \eta}{\partial v}$$

$$\mu \sqrt{H} = -\frac{\partial \eta}{\partial u},$$

und nach 6')

$$\lambda \sqrt{H} = -\frac{1}{k}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\mu \sqrt{H} = +\frac{1}{k}\frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -k\frac{\partial \eta}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -k\frac{\partial \eta}{\partial v}$$

folgt, dass φ und η Funktionen des Krümmungsmasses k allein sind. Die Gleichung

$$5) \qquad \frac{1}{\sqrt{H}}\left(\frac{\partial \dfrac{e\dfrac{\partial \eta}{\partial v} - f\dfrac{\partial \eta}{\partial u}}{\sqrt{H}}}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \dfrac{g\dfrac{\partial \eta}{\partial u} - f\dfrac{\partial \eta}{\partial v}}{\sqrt{H}}}{\partial u}\right) = 2\varphi,$$

[1]) Auf einem ganz anderen Wege habe ich die beiden Sätze über Deformation von Minimalflächen und Flächen konstanter Krümmung bereits in diesen Berichten 1897, p. 269 hergeleitet.

in der η und φ Funktionen von k allein sind, sagt jetzt aus, dass der zweite Differentialparameter einer Funktion des Krümmungsmasses wieder eine Funktion desselben ist. Aber diese Beziehung ist noch nicht hinreichend; um eine zweite zu finden, entwickeln wir eine allgemeine Formel, die auch sonst Verwendung finden kann.

Für den Quadrat des Verschiebungsvektors

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2$$

erhält man nach 1) den Wert

$$r^2 = \nu^2 + e\lambda^2 + 2f\lambda\mu + g\mu^2.$$

Durch Addition der beiden ersten Gleichungen 2) aber folgt

$$2\lambda e \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda^2 \frac{\partial e}{\partial u} + 2\lambda f \frac{\partial \mu}{\partial u} + \lambda\mu \frac{\partial e}{\partial v}$$

$$+ 2\mu f \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda\mu\left(2\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial e}{\partial v}\right) + 2\mu g \frac{\partial \mu}{\partial u} + \mu^2 \frac{\partial g}{\partial u}$$

$$= 2\nu(\lambda E + \mu F) - 2\mu\varphi\sqrt{H},$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial u} = \nu(\lambda E + \mu F) - \mu\varphi\sqrt{H} + \nu\frac{\partial \nu}{\partial u}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial v} = \nu(\lambda F + \mu G) + \lambda\varphi\sqrt{H} + \nu\frac{\partial \nu}{\partial v};$$

also nach 6')

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial u} = -\mu\varphi\sqrt{H} - \frac{\nu}{k\sqrt{H}}\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial v} = +\lambda\varphi\sqrt{H} + \frac{\nu}{k\sqrt{H}}\left(G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right).$$

In dem besonderen Falle, wo $\nu = 0$ sein soll, ist daher

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial u} = -\frac{\varphi}{k}\frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial v} = -\frac{\varphi}{k}\frac{\partial \varphi}{\partial v};$$

also auch r^2 eine Funktion von k allein. Demgemäss ist

$$r^2 = \lambda^2 e + 2\mu\lambda f + \mu^2 g$$

$$= \frac{e\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2f\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + g\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{H},$$

d. h. der erste Differentialparameter einer Funktion von k wieder eine Funktion von k allein. Dies aber bildet mit der vorhin gefundenen Beziehung die Bedingung dafür, dass die Fläche zu einer Rotationsfläche isometrisch sein muss.

§ 6.

Umformung der Gleichungen des § 5.

Man kann die Gleichungen 2) des § 5 in eine viel übersichtlichere Form bringen, wenn man die Grössen $\lambda e + \mu f$, $\lambda f + \mu g$, welche durch $\sqrt{e}$, $\sqrt{g}$ dividiert die Projektionen des Verschiebungsvektors r auf die Tangenten der Kurven $v =$ konst, $u =$ konst sind, in sie einführt. Um eine kurze Ausdrucksweise zu haben, seien

$$1)\qquad \begin{aligned} \varrho &= \lambda e + \mu f \\ \sigma &= \lambda f + \mu g \end{aligned}$$

die auf die Koordinatenlinien reduzierten Komponenten des Verschiebungsvektors, die reduzierten Vektorkomponenten, genannt. Vermöge 1) nehmen die Gleichungen 2) des § 5 die Form an

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u} + \mu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\right) - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial u} = \nu E + P$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial v} - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial u} = \nu F + \psi + Q$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial u} = \nu F - \psi + Q$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} + \lambda\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) - \frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial v} = \nu G + R.$$

Aber es bestehen die Gleichungen

$$\mu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial u}\right)-\frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial u}=-\varrho A-\sigma A_1$$

$$\frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial e}{\partial v}=\varrho B+\sigma B_1$$

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}\right)-\frac{\mu}{2}\frac{\partial g}{\partial v}=-\varrho C-\sigma C_1,$$

so dass die Gleichungen des § 5 nun auch folgende Form annehmen

$$
2)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varrho}{\partial u}-\varrho A-\sigma A_1=\nu E+P\\
&\frac{\partial \varrho}{\partial v}-\varrho B-\sigma B_1=\nu F+Q+\psi\\
&\frac{\partial \sigma}{\partial u}-\varrho B-\sigma B_1=\nu F+Q-\psi\\
&\frac{\partial \sigma}{\partial v}-\varrho C-\sigma C_1=\nu G+R,
\end{aligned}
$$

welche sich in manchen Fällen als besonders vorteilhaft erweist.

Ist die Fläche auf ihre Haupttangentenkurven bezogen, so wird wegen $E=G=0$ die erste und letzte Gleichung 2) von ν ganz unabhängig. Man hat daher zwei Differentialgleichungen zur Bestimmung von ϱ und σ, ferner aus

$$\frac{\partial \varrho}{\partial v}+\frac{\partial \sigma}{\partial u}-2(\varrho B+\sigma B_1)=2(\nu F+Q)$$

die Funktion ν. Hierdurch ist aber die Lösung des Problems auf ihre einfachste Gestalt zurückgeführt, denn nach Lösung der beiden Differentialgleichungen

$$3)\qquad \frac{\partial \varrho}{\partial u}-A\varrho-A_1\sigma=P$$

$$4)\qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v}-C\varrho-C_1\sigma=R$$

ergeben sich die infinitesimalen Deformationen nach § 5, 1) ohne weitere Quadratur.

Ist insbesondere die Fläche eine auf ihre Haupttangentenkurven bezogene Regelfläche, deren Erzeugende die Kurven $v =$ konst sind, so ist auch noch A_1 gleich Null. Man erhält also aus 3) die Funktion ϱ, wobei eine willkürliche Funktion V von v allein eingeführt wird, sodann aus 4) die Funktion σ, wobei eine willkürliche Funktion U von u allein eintritt. Dabei kann man noch bemerken, dass wegen der Gleichungen E) und C) des § 1

$$A = \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u} - B_1; \quad 2\,B_1 = -\frac{\partial \log \frac{F}{\sqrt{H}}}{\partial u},$$

mithin

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial \log F\sqrt{H}}{\partial u}, \qquad C_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \log F\sqrt{H}}{\partial v}$$

wird. Es werden daher bei beliebigen Werten der P und R, zur Integration von 3) und 4) nur zwei Quadraturen erfordert, da A und C_1 schon selbst Differentialquotienten bekannter Grössen sind, und man hat den Satz:

Alle infinitesimalen Deformationen einer Regelfläche von vorgeschriebenem Charakter lassen sich durch zwei Quadraturen bestimmen, sobald die Fläche in Bezug auf ihre Haupttangentenkurven völlig gegeben ist. Insbesondere ergeben sich also auch alle infinitesimalen Isometrieen der Regelflächen, wenn man setzt

$$\sqrt{F\sqrt{H}} = \Theta,$$

aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u}\Theta - \varrho\frac{\partial \Theta}{\partial u} = 0$$

$$\frac{1}{\Theta^2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}\Theta - \sigma\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) = C\frac{\varrho}{\Theta}.$$

Hiernach wird, wenn unter U, V wieder willkürliche Funktionen ihres entsprechenden Argumentes bedeuten

$$\varrho = \Theta V$$
$$\sigma = \Theta \int C V d v + U,$$

in welchen Gleichungen nur noch eine Quadratur vorkommt. Alle infinitesimalen isometrischen Deformationen lassen sich daher vermöge einer einzigen Quadratur unter der obigen Voraussetzung bestimmen.

Ist endlich die Regelfläche eine Fläche zweiten Grades, so hat man, da nun auch C gleich Null ist, ohne jede Quadratur für den Fall der Isometrie

$$\varrho = V\Theta$$
$$\sigma = U\Theta,$$

und im allgemeinen

$$\varrho = \Theta\left(V + \int \frac{P}{\Theta}\, du\right)$$
$$\sigma = \Theta\left(U + \int \frac{R}{\Theta}\, dv\right)$$

zu setzen.

Nimmt man andererseits in den Gleichungen 2) ν gleich Null an und setzt voraus, dass das System der Kurven $v =$ konst aus geodätischen Linien der Fläche gebildet sei, so findet man wegen $A_1 = 0$ aus der ersten Gleichung 2) durch Quadratur die Funktion ϱ; durch zwei weitere Quadraturen aus der letzten aber σ. Aus den beiden mittleren Gleichungen ergeben sich dann die Werte von φ und Q. Das heisst:

Man kann durch drei Quadraturen und zwei willkürliche Funktionen U, V alle infinitesimalen Verschiebungen einer Fläche in sich bestimmen, bei denen die Längenelemente der Kurven eines gegebenen Koordinatensystems, dessen eine Schar aus geodätischen Linien der Fläche besteht, in vorgeschriebener Weise deformiert werden.

Man kann die Gleichungen 1) noch weiter vereinfachen durch die Voraussetzung, dass auf der Fläche bereits das Koordinatensystem der u, v so gewählt sei, dass die Tangenten der Kurven $u =$ konst senkrecht zum Verschiebungsvektor stehen. Dann ist die reduzierte Komponente σ gleich Null und man hat

$$
5)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial \varrho}{\partial u} - \varrho A &= \nu E + P \\
\frac{\partial \varrho}{\partial v} - \varrho B &= \nu F + \psi + Q \\
- \varrho B &= \nu F - \psi + Q \\
- \varrho C &= \nu G + R.
\end{aligned}
$$

Die Kurven $u =$ konst sind auf der Fläche durch den Umstand charakterisiert, dass bei der betrachteten Deformation keine Verschiebung in der Richtung ihrer Tangenten stattfindet, sie sind die Kurven ohne Verschiebung, ihre orthogonalen Trajektorien sind dann als Verschiebungskurven zu bezeichnen, weil ihre Tangenten von den Projektionen des Verschiebungsvektors auf die zugehörige Tangentialebene der Fläche gebildet werden. Beschränkt man sich hier der Einfachheit halber auf den Fall der isometrischen Deformation $P = Q = R = 0$, so ergibt sich aus 5) durch Elimination von ψ und ν

$$
6)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial \log \varrho}{\partial u} &= A - C\frac{E}{G} \\
\frac{\partial \log \varrho}{\partial v} &= 2\left(B - C\frac{F}{G}\right).
\end{aligned}
$$

Sind also die Kurven $u =$ konst Kurven ohne Verschiebung bei irgend einer infinitesimalen Isometrie, so muss für die zugehörigen Fundamentalgrössen der Fläche die Beziehung stattfinden

$$
7)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(A - C\frac{E}{G}\right) = 2\frac{\partial}{\partial u}\left(B - C\frac{F}{G}\right)
$$

und umgekehrt sind alle Koordinatensysteme auf der Fläche, deren eine Schar $u =$ konst von Kurven ohne Verschiebung bei einer isometrischen infinitesimalen Deformation gebildet sein kann, durch diese Beziehung völlig charakterisiert; auch ist die zugehörige reduzierte Komponente ϱ dann jedesmal bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Diese Betrachtung gilt nur dann nicht, wenn $G = 0$ ist, d. h. wenn die Kurven ohne Verschiebung Haupttangentenkurven sein könnten. In diesem Falle muss nach der letzten Gleichung 5) notwendig auch C gleich Null sein, d. h. die Fläche ist eine Regelfläche. Das heisst:

Die einzigen Flächen, bei denen die Kurven ohne Verschiebung aus den Haupttangentenkurven einer Schar der Fläche gebildet sein können, sind die Regelflächen, jene Kurven selbst ihre Erzeugenden.

Und ebenso folgt für $C = 0$, falls nicht auch v gleich Null ist, also die Fläche zu einer Rotationsfläche isometrisch ist, dass auch $G = 0$ sein muss, d. h.:

Die einzigen Flächen, bei denen die Kurven ohne Verschiebung eine Schar von geodätischen Linien bilden, sind die Regelflächen, jene Kurven selbst ihre Erzeugenden, — mit Ausnahme der zu Rotationsflächen isometrischen Flächen. In der Tat gestatten ja auch die letzteren eine infinitesimale Verschiebung in sich, deren Richtung überall senkrecht steht zu den Bildern der Meridiane der korrespondierenden Rotationsfläche.

In der Gleichung 7) kann das System der Kurven $v =$ konst immer noch ganz willkürlich angenommen werden. Setzt man voraus — unter Ausschluss des soeben betrachteten Ausnahmefalles — dass die Kurven $v =$ konst zu den Kurven ohne Verschiebung konjugiert liegen, so ist nach den Gleichungen D) des § 1, wegen $F = 0$

$$B_1 G - C E - \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

also

$$A - C \frac{E}{G} = \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u} - 2 B_1 + \frac{\partial \log G}{\partial u},$$

und an Stelle der Bedingung 5) tritt nunmehr

$$\frac{\partial^2 \log G \sqrt{H}}{\partial u \, \partial v} = 2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} \right). \tag{8}$$

Andererseits kann man voraussetzen, dass die Kurven u, v das aus den Kurven ohne Verschiebung und den Verschiebungskurven gebildete Orthogonalsystem bilden. Dann ist in 7) die Fundamentalgrösse $f = 0$ zu setzen. Damit sind durch die Gleichung 7) und durch die Codazzi'schen Gleichungen diese charakteristischen Koordinatensysteme auf einer Fläche durch Eigenschaften der zugehörigen Fundamentalgrössen völlig definiert.

Ausgezeichnet ist hier der Fall der Kugel. Ist $f = 0$, so ist auch $F = 0$ und $E = ke$, $G = kg$, wo k das Krümmungsmass bezeichnet.

Die Gleichung 8), welche jetzt giltig sein muss, liefert aber, wenn man die B, B_1 nach A) § 1 einsetzt,

$$\frac{\partial^2 \log \frac{e}{g}}{\partial u \, \partial v} = 0.$$

Auf der Kugel sind daher die Scharen der Kurven ohne Verschiebung von allen Kurvensystemen gebildet, welche die eine Schar eines isothermen Systemes zu bilden geeignet sind. Die zugehörige Schar des betreffenden isothermen Systems stellt dann die Verschiebungskurven vor. Auch ergibt sich aus der konjugierten Beziehung der beiden Kurvenscharen eines isothermen Systems, dass zu jeder infinitesimal isometrischen Deformation der Kugel eine zweite gehört. Und integriert man endlich die Gleichungen 6) unter der Voraussetzung

$$e = g, \quad E = G = k e,$$

so folgt

$$\varrho = \gamma e, \quad \nu = \frac{\gamma}{k} \frac{\partial \log e}{\partial u},$$

falls γ eine willkürliche Konstante bedeutet. Hierdurch sind alle infinitesimalen Isometrieen der Kugel in der anschaulichsten Weise bestimmt.

In den meisten Fällen wird allerdings, wie es scheint, die Beziehung zwischen den Fundamentalgrössen für die charakte-

ristischen Orthogonalsysteme nicht einfach. Ich bemerke nur noch, dass für die Minimalflächen ($f = 0$, $Eg + Ge = 0$) die Gleichung 7) durch Integration die Form

$$4\,C\frac{F}{G} = \frac{\partial}{\partial v}\log(g\,e) + U,$$

wo U eine willkürliche Funktion von u, annimmt.

Diejenigen Flächen, auf denen, wie bei der Kugel, Kurven ohne Verschiebung aus einer Schar von Krümmungslinien gebildet sein können, sind übrigens ganz spezieller Natur. Man erhält zunächst unter der Annahme $f = 0$ aus der Gleichung 8) durch Integration

$$G = U\,V\cdot\sqrt{e\,g}$$

oder, indem man an Stelle der Variabeln u, v neue Funktionen desselben so einführt, dass die nur von u (v) abhängigen Funktionen U (V) in Konstanten übergeführt werden,

$$G = \gamma\sqrt{e\,g}.$$

Nach C) § 1 ist dann

$$\frac{\partial \log g}{\partial u}G + \frac{E}{2e}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

oder

$$E = \gamma\frac{\frac{\partial e}{\partial u}}{\frac{\partial g}{\partial u}}\sqrt{e\,g}.$$

Aber diese beiden Ausdrücke für E und G müssen nun noch den zwei nicht berücksichtigten Codazzi'scheu Gleichungen genügen, woraus sich zwei partielle Differentialgleichungen für die e, g ergeben, die eine einfache Deutung nicht zu gestatten scheinen.

Die Gleichungen 2) haben ferner eine ausgezeichnete projektive Eigenschaft. Ich habe bei einer anderen Gelegenheit

gezeigt,[1]) dass die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung einer Fläche und die Christoffel'schen Koeffizienten bei einer allgemeinen projektiven Transformation der Fläche sich in folgender Weise ändern, dass, wenn man die entsprechenden Grössen für die projektiv verwandte Fläche durch in Klammern gesetzte Ausdrücke bezeichnet

$$(E) = \frac{\lambda}{t} E, \quad (F) = \frac{\lambda}{t} F, \quad (G) = \frac{\lambda}{t} G;$$

$$(A) = A - 2\frac{\partial \log t}{\partial u} - \lambda m E$$

$$(A_1) = A_1 - \lambda n E$$

$$(B) = B - \frac{\partial \log t}{\partial u} - \lambda m F$$

$$(B_1) = B_1 - \frac{\partial \log t}{\partial u} - \lambda n F$$

$$(C) = C - \lambda m G$$

$$(C_1) = C_1 - 2\frac{\partial \log t}{\partial v} - \lambda n G$$

wird. Dabei ist t der gemeinsame Nenner in den Transformationsgleichungen der Koordinaten

$$(x) = \frac{\xi}{t}, \quad (y) = \frac{\eta}{t}, \quad (z) = \frac{\zeta}{t},$$

während die Grössen λ, m, n einfach definiert werden können.[2])

Bezeichnet man nun die Grössen ϱ, σ, ν, P, Q, R für die transformierte Fläche F' durch ϱ_1, σ_1, ν_1, P_1, Q_1, R_1, so ist nach 2) und den angeführten Gleichungen

---

[1]) Vgl. meine Arbeit: Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Mathemat. Annal., Bd. 39, p. 177.

[2]) a. a. O., p. 191.

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} - \varrho_1\left(A - 2\frac{\partial \log t}{\partial u} - \lambda m E\right) - \sigma_1 (A_1 - \lambda n E) = \nu_1 \frac{\lambda}{t} E + P_1$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} - \varrho_1\left(B - \frac{\partial \log t}{\partial v} - \lambda m F\right) - \sigma_1\left(B_1 - \frac{\partial \log t}{\partial u} - \lambda n F\right)$$
$$= \nu_1 \frac{\lambda}{t} F + \psi' + Q_1$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} - \varrho_1\left(B - \frac{\partial \log t}{\partial v} - \lambda m F\right) - \sigma_1\left(B_1 - \frac{\partial \log t}{\partial u} - \lambda n F\right)$$
$$= \nu_1 \frac{\lambda}{t} F - \psi' + Q_1$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \varrho_1 (C - \lambda m G) - \sigma_1\left(C_1 - 2\frac{\partial \log t}{\partial v} - \lambda n G\right) = \nu_1 \frac{\lambda}{t} G + R_1.$$

Setzt man nun

$$\varrho_1 t^2 = \varrho_2$$
$$\sigma_1 t^2 = \sigma_2$$
$$t \nu_1 \lambda - \lambda m \varrho_1 t^2 - \lambda n \sigma_1 t^2 = \nu_2$$
$$t^2 \psi'_1 - \sigma_1 t \frac{\partial t}{\partial u} + \varrho_1 t \frac{\partial t}{\partial v} = \psi_2,$$

so ergibt sich, wenn man die eben erhaltenen Gleichungen mit t^2 multipliziert und in geeigneter Weise zusammenzieht

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial u} - \varrho_2 A - \sigma_2 A_1 = \nu_2 E + t^2 P_1$$

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial v} - \varrho_2 B - \sigma_2 B_1 = \nu_2 F + t^2 Q_1 + \psi_2$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial u} - \varrho_2 B - \sigma_2 B_1 = \nu_2 F + t^2 Q_1 - \psi_2$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \varrho_2 C - \sigma_2 C_1 = \nu_2 G + t^2 R_1.$$

Das sind aber gerade die Gleichungen 2) für die gegebene Fläche, falls man die $t^2 P_1$, $t^2 Q_1$, $t^2 R_1$ durch P, Q, R ersetzt. Hieraus ergibt sich ein, wie es scheint, sehr fruchtbarer Satz:

Man erhält alle infinitesimalen Deformationen des vorgeschriebenen Charakters P_1, Q_1, R_1 einer durch projektive Transformation aus F hervorgegangenen

Fläche F' aus den Deformationen der gegebenen Fläche F vom Charakter $P_1 t^2$, $Q_1 t^2$, $R_1 t^2$.

Dabei bestehen für die reduzierten Komponenten des Verschiebungsvektors die Gleichungen

$$\varrho_1 t^2 = \varrho$$
$$\sigma_1 t^2 = \sigma,$$

welche für den Fall der Affinität $t = \text{konst}$ besonders merkwürdig erscheinen. Insbesondere aber findet bei allen projektiven Transformationen die Beziehung[1])

$$\frac{\varrho_1}{\sigma_1} = \frac{\varrho}{\sigma}$$

statt. Endlich hat man für die zu den charakteristischen Funktionen der betreffenden Funktionen gehörigen Funktionen ψ_1 und ψ die Gleichung

$$t^2\left(\psi_1 - \tfrac{1}{2}\left(\varrho_1 \frac{\partial \log \sigma_1}{\partial v} - \sigma_1 \frac{\partial \log \varrho_1}{\partial u}\right)\right) = \psi - \tfrac{1}{2}\left(\varrho \frac{\partial \log \sigma}{\partial v} - \sigma \frac{\partial \log \varrho}{\partial u}\right).$$

Aus der soeben angegebenen Gleichung folgt für $\sigma = 0$ auch $\sigma_1 = 0$; mithin:

Bei allen projektiven Transformationen bleiben die Kurven ohne Verschiebung einer Fläche invariant.

Für die infinitesimale Isometrie kann man diesen Satz auch unmittelbar aus der Gleichung 7) entnehmen, welche die Kurven ohne Verschiebung charakterisiert. Denn diese Gleichung hat selbst einen absolut invarianten Charakter bei projektiven Transformationen, sie geht geradezu in die folgende

$$\frac{\partial}{\partial v}\left((A) - (C)\frac{(E)}{(G)}\right) = 2\frac{\partial}{\partial u}\left((B) - (C)\frac{(F)}{(G)}\right)$$

---

[1]) In Bezug auf dasjenige Koordinatensystem, für welches

$$e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = e_1\,du^2 + 2f_1\,du\,dv + g_1\,dv^2$$

wird, gilt dieser Satz von den wirklichen Komponenten. Aber dieses System ist nicht immer reell.

über, sowie man an Stelle der $A, B, C \dots$ die in Klammern eingeschlossenen Ausdrücke substituiert. Man erkennt daraus zugleich in Rücksicht auf die frühere Bemerkung über die Verschiebungskurven der Kugel den geometrischen Charakter der Verschiebungskurven auf den Flächen zweiten Grades.

Eine andere Anwendung lässt sich auf diejenigen Flächen F' machen, welche einer gegebenen Fläche F überhaupt mit Erhaltung der Längenelemente entsprechen oder zu ihr isometrisch sind. Es wird dabei einer Richtung auf F, der ein Normalschnitt mit dem Krümmungshalbmesser R entspricht, eine Richtung auf F' zugeordnet sein, welcher der Krümmungshalbmesser R_1 des zugehörigen Normalschnittes zukommt. Bei diesem Prozesse gehen die Fundamentalgrössen E, F, G von F in die entsprechenden E', F', G' von F' über, während die $A, B, C \dots$ völlig ungeändert bleiben. Wird nun verlangt, die gegebene Fläche F mit dem Charakter

$$\nu' E', \quad \nu' F', \quad \nu' G'$$

zu deformieren, so sind die Gleichungen 2)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u} - A \varrho - A_1 \sigma - \nu E - \nu' E' = 0$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial v} - B \varrho - B_1 \sigma - \nu F - \nu' F' - \psi = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} - B \varrho - B_1 \sigma - \nu F - \nu' F' + \psi = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} - C \varrho - C_1 \sigma - \nu G - \nu' G' = 0.$$

Dieselben sind aber völlig symmetrisch in den Grössen, welche sich auf die eine oder die andere Fläche beziehen. Daraus entspringt der folgende Reziprozitätssatz:

Sind ϱ, σ, ν die (reduzierten) Komponenten des Verschiebungsvektors für die gegebene Fläche bei derjenigen Deformation, welche das Längenelement derselben nach dem Gesetze

$$\delta\, d s = \varepsilon\, \nu' \frac{d s}{R_1}$$

umformt, so sind ϱ, σ, ν' zugleich die reduzierten Komponenten des Verschiebungsvektors für die isometrische Fläche, welche nach dem Gesetze

$$\delta\, d s = \varepsilon\, \nu \frac{d s}{R}$$

deformiert wird.

Um von diesem sehr allgemeinen Satze wenigstens eine Anwendung zu machen, sei jetzt F eine Fläche positiver konstanter Krümmung und F' diejenige Kugel, welche zu ihr auf irgend eine Weise in isometrische Beziehung versetzt ist. Alsdann sind die Koeffizienten $E'\, F'\, G'$ den e, f, g selbst proportional; d. h. man hat eine konforme infinitesimale Deformation von F. Diese lässt sich aber ausführen, wenn man die Kugel in vorgeschriebener Weise deformieren kann, und letztere Aufgabe ist in diesem Paragraph vollständig gelöst. Kennt man aber eine Transformation, welche die Fläche konstanter Krümmung auf die Kugel isometrisch bezieht, so kennt man auch alle Transformationen dieser Art, und so ergibt sich schliesslich der Satz:

Kennt man für eine Fläche konstanter positiver Krümmung irgend eine Transformation, durch welche sie isometrisch auf die Kugel bezogen ist, so lassen sich auch alle konformen infinitesimalen Deformationen der Fläche ermitteln.

Sitzung vom 4. Juni 1904.

1. Herr Siegmund Günther überreicht ein Exemplar seiner soeben erschienenen „Geschichte der Erdkunde."

2. Herr Richard Hertwig legt als Geschenk an die Akademie im Auftrag von Herrn Hofrat Dr. Eduard Hagen, z. Z. Vorstand des Völkermuseums in Frankfurt a/M., dessen wissenschaftliche Arbeiten und grosse und wertvolle Sammlungen von Photographien, besonders von Gesichtstypen der Bewohner der malayischen Inseln, vor.

Sitzung vom 2. Juli 1904.

1. Herr Adolf von Baeyer hält einen Vortrag: „Über Anilinfarbstoffe"; derselbe wird anderweit veröffentlicht werden.

2. Herr Wilhelm Muthmann reicht nachträglich eine von ihm und F. Fraunberger verfasste Abhandlung: „Über Passivität der Metalle" ein, welche den Inhalt des von ihm in der Mai-Sitzung gehaltenen Vortrags bildet.

Über Passivität der Metalle.

Von **W. Muthmann** und **F. Fraunberger.**

(*Eingelaufen 2. Juli.*)

Einleitung.

Bei einer Reihe von Metallen ist das elektromotorische Verhalten nach den bisherigen Untersuchungen ein sehr einfaches. Bei Mg, Cd, Zn, Hg z. B., sowie bei Ag, Tl, K, Na u. a. ist der Potentialsprung eine Funktion der Zusammensetzung, der Konzentration und Temperatur des Elektrolyten. Nernst[1]) hat uns ein Mittel gegeben, diese Verhältnisse rechnerisch zu verfolgen, indem er annahm, dass die Metalle einen bestimmten Lösungsdruck besitzen, d. h. mit einem gewissen Druck Ionen in den Elektrolyten hineinschicken. Der Potentialsprung lässt sich dann berechnen aus jenem Lösungsdruck und dem osmotischen Gegendruck, den die Ionen des Elektrolyten der Lösungstension des Metalles entgegensetzen. In den meisten Lehrbüchern der Elektrochemie sind diese Beziehungen ausführlich klargelegt.

Es gibt nun aber eine Reihe von Metallen, deren Lösungsdruck — um das Nernst'sche Bild zu gebrauchen — durchaus keine konstante Grösse ist. Zu diesen Metallen gehören vor allem Fe und Cr, deren Stellung in der Spannungsreihe keine definierte ist. Ihr elektromotorisches Verhalten hängt nicht nur ab vom Elektrolyten, sondern ist auch eine Funktion vom

[1]) Lehrbuch der theoretischen Chemie.

Zustand des Metalles selbst, d. h. die Metalle sind aktivier- bezw. passivierbar. Die elektromotorische Kraft der Kombination: Chrom (Elektrolyt) Normalelektrode kann, ohne dass die Konzentration und Temperatur des Elektrolyten im mindesten sich ändert, unendlich viele Werte annehmen, wie dies aus den klassischen Untersuchungen von Hittorf[1]) hervorgeht. Der Zustand, in welchem der Lösungsdruck des Metalles am grössten ist, nennt man seinen aktiven, derjenige, in dem er am kleinsten ist, seinen passiven Zustand.

Es hat nun dieses Verhalten der beiden genannten Metalle in letzter Zeit das Interesse der Elektrochemiker in hohem Masse wachgerufen und man hat nach einer Erklärung gesucht, ohne indessen bis jetzt zu einem völlig befriedigenden Resultate zu gelangen.

Es ist uns nun gelungen einige Metalle aufzufinden, welche die Eigenschaft der Veränderlichkeit des Potentialsprunges in demselben Elektrolyten in noch viel höherem Masse zeigen, als Chrom und Eisen. Es sind dies in erster Linie das Niob, bei dem die Differenz der maximalen Potentialsprünge in aktivem und passivem Zustande beinahe 2,5 Volt beträgt, ferner das Vanadium, das Molybdän, Wolfram und das Ruthenium. Wir haben das elektromotorische Verhalten dieser Metalle eingehend untersucht und die dabei gewonnenen neuen Gesichtspunkte auf Cr, Fe, Ni und Co übertragen. Wenn es uns auch nicht gelungen ist, eine endgiltige Erklärung für die Veränderlichkeit des Potentialsprunges zu finden und die Untersuchungen noch nicht abgeschlossen sind, so konnten wir doch diese merkwürdigen Erscheinungen dem Verständnis näher bringen und übergeben wir deshalb die gewonnenen Resultate der Öffentlichkeit.

---

[1]) Zeitschrift für physikalische Chemie, Bd. 25, 30, 34.

Historisches.

Die ersten Untersuchungen über die Passivität des Eisens, welche von Kidd, Wetzlar, John Herschel und besonders von Schönbein durchgeführt wurden, sind zu bekannt, als dass wir näher darauf einzugehen brauchten. Dieselben sind übersichtlich von Berzelius[1]) zusammengestellt worden. Schon damals hat man eingesehen, dass die Passivierbarkeit des Eisens mit seinem elektromotorischen Verhalten zusammenhängt; Berzelius bemerkt „diese Veränderung verhält sich ganz so, als wäre Eisen ein elektronegatives Metall geworden" und er konstatierte, dass passives Eisen sich sowohl gegen Kupfer als Silber negativ verhält. Wiedemann bringt in seinem „Lehrbuch der Elektrizität" eine Diskussion der oben zitierten Arbeiten und fügt zu, dass auch Nickel, Kobalt. Zinn, Aluminium, Kupfer und Wismuth in mehr oder weniger hohem Grade ein dem Eisen ähnliches Verhalten zeigen.

Mit dem elektromotorischen Verhalten des letzteren Metalles haben sich noch beschäftigt Heathcote,[2]) Finkelsteiner,[3]) Ruer,[4]) Micheli,[5]) Fredenhagen,[6]) während das Chrom bekanntlich Hittorf zum Gegenstand seiner berühmten und wichtigen Untersuchungen gemacht hat. Das Vanadium schliesslich ist kürzlich von Marino[7]) untersucht worden, auf dessen Ausführungen wir später noch zurückkommen werden. In allerjüngster Zeit sind noch zwei Abhandlungen erschienen von Le Blanc[8]) „Über die Passivität des Nickels" und eine Abhandlung von Bernoulli[9]) „Passivität des Chroms". Wir werden auf diese beiden Abhandlungen bei einer späteren Gelegenheit zurückkommen.

---

[1]) Lehrbuch der Chemie, 1844, Bd. 2, 699.
[2]) Zeitschrift für phys. Chemie, Bd. 37.
[3]) „ „ „ „ Bd. 39.
[4]) „ „ „ „ Bd. 44.
[5]) Arch. de scienc. phys. et nat., Bd. 4, 10.
[6]) Zeitschrift für phys. Chemie, Bd. 43.
[7]) Zeitschrift für anorg. Chemie, Bd. 39, 2.
[8]) Boltzmann, Festschrift 183—95, 1904.
[9]) Inaugural-Dissertation, München 1903.

Was die Ursache der aktiven und passiven Zustände der genannten Metalle anbetrifft, so hat sich fast jeder der erwähnten Forscher darüber ein anderes Bild gemacht.

Schönbein stellt sich die Sache einfach so vor, dass das Eisen beim Eintauchen in konz. HNO_3 sich mit einer Oxydhaut überzieht, die es vor weiterem Angriff beim Eintauchen in verdünntere Säure schützt. Dieser Anschauung schloss sich in neuerer Zeit Micheli[1]) an, der die Anwesenheit einer Oxydhaut aus dem optischen Verhalten des passiven Eisens ableitete, auch Ruer[2]) hält diese Erklärung für die richtige; ebenso kommt Heathcote[3]) zu dem Schluss, dass, wenn die Änderung der Zustände in der Bildung einer neuen Phase besteht, diese Phase fest sein muss. Eine solche Oxydschicht müsste allerdings merkwürdige Eigenschaften haben; sie müsste ein vollkommener Leiter der Elektrizität sein und das Metall müsste ein mit der Dicke der Oxydhaut abnehmendes Potential haben, weil ja, wie Hittorf erkannt hat, zwischen dem aktiven und passiven Zustand eines Metalles unendlich viel Zwischenstufen liegen. Diese Erwägungen machen diese Erklärung kompliziert und daher unwahrscheinlich. Hittorf spricht daher von einem Zwangszustand der Moleküle; unsere Einsicht in das Wesen der Erscheinung wird durch diesen Notbehelf allerdings wenig geändert. Hittorf suchte die Anschauung Schönbeins dadurch zu widerlegen, dass er ein Chromstück durch Glühen an der Luft mit einer Oxydhaut überzog und dann konstatierte, dass die Anwesenheit der letzteren die Passivität nicht bedingt; diesem Versuch ist wenig Beweiskraft beizulegen, weil ein in wässeriger Lösung erzeugter Oxydüberzug ganz andere Eigenschaften haben kann, als ein durch trockene Oxydation entstandener. Fredenhagen endlich hat versucht, das Problem der Passivität auf das der Gasbeladung an angreifbaren Elektroden zurückzuführen. Wir werden auf alle diese Erklärungs-

[1]) Arch. des scienc. phys. et nat. (4) 10, 1900.
[2]) Zeitschrift für phys. Chemie, Bd. 44, 1903.
[3]) „ „ „ „ Bd. 37, 1901.

versuche später zurückkommen, wenn wir unsere experimentellen Resultate besprochen haben.

Untersuchungsmethoden und Metallmaterial.

Die Metalle, die uns in unregelmässigen Stücken zur Verfügung standen, haben wir stets mit Platin armiert, teils durch direkte Umwicklung mit Draht, teils durch Einklemmen in eine für diese Zwecke konstruierte Platinpinzette. — Die Messungen wurden wie üblich gegen die Normal-Elektrode (Hg; Kalomel $^1/_1$ n K Cl) ausgeführt mit dem Potentialsprung von — 0,56 Volt. Bei allen im Laufe der Abhandlung angeführten Potentialsprüngen bezieht sich das Vorzeichen auf die positive oder negative Ladung der Lösung. Die Temperatur wurde möglichst konstant auf 20° gehalten. Das Messen gegen die Normalelektrode hat den grossen Vorteil, dass die erhaltenen Zahlen durch einfache Addition den Potentialsprung des betreffenden Metalls geben und dass die Messungen jederzeit leicht kontrolliert werden können. Wir geben also der Normalelektrode unbedingt den Vorzug vor der Kombination mit Pt — H_2CrO_4 bezw. Ag — $AgNO_3$, die von anderen Forschern, wie von Marino, verwendet wurden. Als Elektrolyt diente uns $^1/_1$ n K Cl Lösung; wir haben dieselbe gewählt, weil eine Messung der Potentiale gegen die normalen Salzlösungen bei Cr, Mo, Wo, Nb, Vd ausgeschlossen ist. Die Wahl des Chlorkaliums bietet ausserdem den Vorteil, dass die Fehler, die durch die Berührungspotentiale verschiedener Elektrolyten mit dem Chlorkalium der Normalelektrode hervorgerufen worden wären, verschwinden. Da nach der Formel von Nernst

$$\pi = \frac{RT}{n_e} \log \frac{P}{p}$$

der Potentialsprung eines Metalles durch das Verhältnis des Lösungsdruckes des Metalles zu dem osmotischen Gegendruck seiner Ionen bestimmt ist, so erhält man bestimmte vergleichbare Werte nur, wenn die Ionen des Metalls als Kationen im Elektrolyten in bestimmter Menge vorhanden sind. In unserem

Falle fehlen aber solche Kationen im Elektrolyten und es müsste nun eigentlich die Potentialdifferenz unendlich gross werden; praktisch tritt natürlich dieser Fall nicht ein, es gehen eben Spuren des betreffenden Metalles sofort in Lösung und Ostwald[1]) hat gezeigt, dass schon viel kleinere Mengen, als durch Analyse nachgewiesen werden können, hinreichen, um eine Potentialdifferenz hervorzurufen, die von den natürlichen Potentialen wenig verschieden ist. Es hängt der Grad der Verschiedenheit natürlich in diesem Fall mit der Grösse des Lösungsdruckes zusammen. Je grösser der Lösungsdruck, um so mehr nähern sich die natürlichen Potentiale den anormalen d. h. den gegen Chlorkaliumlösung gemessenen.

Diese Verhältnisse werden veranschaulicht durch folgende kleine Tabelle, in welcher die natürlichen Potentiale einiger Metalle nach Neumann[2]) denjenigen gegenübergestellt sind, welche dieselben nach unserer Messung gegen normal Chlorkaliumlösung zeigen:

Nach Neumann[3])

Mg	$^1/_1$ n $MgCl_2$ = + 1,23	Mg	$^1/_1$ n KCl = + 1,17
Cu	$^1/_1$ n $CuSO_4$ = — 0,51	Cu	$^1/_1$ n KCl = — 0,35
Fe	$^1/_1$ n $FeSO_4$ = + 0,09	Fe	$^1/_1$ n KCl = + 0,001
Al	$^1/_1$ n $AlCl_3$ = + 1,01	Al	$^1/_1$ n KCl = + 0,88
Gold	$^1/_1$ n $AuCl_3$ = — 1,35	Au	$^1/_1$ n KCl = — 0,51

Auf keinen Fall haben wir aber in unserem Elektrolyten einen Anhaltspunkt über die Konzentration der in Lösung gehenden Metallionen und somit über den osmotischen Druck derselben. Wir messen also anomale Spannungsdifferenzen, die von den natürlichen Potentialen mehr oder weniger abweichen. Für unsere Aufgabe erfüllen sie aber den Zweck vollkommen, weil Relationswerte für denselben genügen. Diese anomalen Potentialdifferenzen sind zwar eigentlich zufällige Werte in Bezug auf die natürlichen Potentiale; sie sind aber

[1]) Lehrbuch der allg. Chemie (2. Aufl.), II, 855.
[2]) Zeitschrift für phys. Chemie, Bd. 14, 1894, 193.
[3]) „ „ „ „ Bd. 14.

trotzdem gut reproduzierbar und wechseln bei den meisten Metallen nicht oder wenig wie bei Pt, Cu, Ni, Co, Fe, Zn, Mg, Mn, Ur etc. Gross werden die Schwankungen erst bei den Metallen, die sich leichter als Fe, Ni, Co aktivieren und passivieren lassen. Diese Schwankungen sind auch vollkommen gesetzmässige. Zum Studium der aktiven und passiven Erscheinungen bei den Metallen sind die anomalen Potentialdifferenzen vollkommen genügend. Ausserdem haben wir bei Metallen, die ein Messen der natürlichen Potentiale ermöglichen, wie Fe, Ni, Co etc. stets auch diese bestimmt. In diesen Fällen sind dann die Messungen in Normallösungen ihrer Sulfate gemacht worden.

Die Bestimmung der elektromotorischen Kraft erfolgte nach der Kompensationsmethode. Als Nullinstrument diente uns das Lippmann'sche Kapillarelektrometer. Zur Kompensation standen vier Helmholtz-Elemente mit je ungefähr 1 Volt zur Verfügung, sowie ein fünftes Element, dessen Spannung durch einen 1000 HP Widerstand in Intervallen von Hunderteln Volt benutzt werden konnte. Diese fünf Elemente wurden vor jedem Versuch mit einem Normal-Clark-Element verglichen.

Über die von uns verwendeten Metalle möchten wir kurz folgendes mitteilen. Das reine Eisen war durch Reduktion von reinem Fe_2O_3 mit Aluminium dargestellt worden und enthielt nur Spuren von Silicium, dagegen kein Aluminium und keinen Kohlenstoff. Das Nickel und Kobalt verdankten wir der Liebenswürdigkeit der „Vereinigte deutsche Nickelwerke, Schwerte, Westphalen." Beide Proben waren von grosser Reinheit. Chrom, Molybdän, Wolfram und Mangan wurden uns von Dr. Goldschmidt in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt, die drei letzten Metalle enthielten etwa 98—99%. Das Chrom, das aus grösseren Stücken herausgespalten wurde, war fast vollständig rein. Das Uran ebenfalls sehr rein, war von Herrn E. Tornow durch Reduktion von Uranfluorid mit metallischem Magnesium dargestellt und von diesem uns zur Verfügung gestellt worden; das untersuchte Stück besass ein spezifisches Gewicht von über 18 und erwies sich ebenfalls für

unsere Untersuchungen als genügend rein. Das untersuchte Niobium, Vanadium und Tautal ist von den Herren Weiss und Aichel im hiesigen Laboratorium durch Reduktion der Pentoxyde mit Hilfe von Mischmetall hergestellt worden. Das untersuchte Ruthenium bestand aus einem geschmolzenen, kompakten Stück und stammt aus der kaiserlichen Münze in Petersburg.

Wir haben zunächst die von Hittorf angestellten Untersuchungen über das Chrom nochmals durchgeführt. Wir glauben dieselben in einigen Punkten erweitern zu können. Namentlich erschien es uns notwendig Klarheit zu erhalten über den wahren Potentialsprung des Chroms gegen einen bestimmten Elektrolyten, als welchen wir aus den oben angeführten Gründen normale Chlorkaliumlösung anwandten. Als den wahren Potentialsprung eines Metalles möchten wir denjenigen bezeichnen, welchen die von jedem Fremdkörper, also auch von jedem Gase befreite Oberfläche des Metalles, bei der Messung ergibt. Ein Stück blankes Zink ergibt bei gleicher Temperatur gegen normal Chlorkaliumlösung unter allen Umständen denselben Potentialsprung. Bei Chrom indessen schwankt dieser Potentialsprung nach unseren Messungen zwischen + 0,35 und — 1,47 Volt und man kann sagen, dass innerhalb dieser Grenzen reines Chrom sich auf jedes beliebige Potential einstellen kann. Es entsteht nun die Frage, welcher von den unendlich vielen Potentialsprüngen als der wahre Potentialsprung des Chroms zu bezeichnen ist.

Jener höchste oben angeführte Wert von + 0,35 Volt ist durchaus nicht derjenige, welchen das Chrom beim Liegen an der Luft annimmt. Hittorf hat schon gezeigt, dass man das Chrom nicht nur passivieren, sondern auch aktivieren kann und er hat konstatiert, dass der Potentialsprung eines möglichst aktiv gemachten Stückes Chrom von selbst wieder auf einen mittleren zurückgeht. Eine Erklärung für diese auffallende Erscheinung hat Hittorf nicht gefunden. Er glaubte vielmehr, dass dieses Verhalten des Chroms ein von anderen Metallen abweichendes sei und auf noch unbekannte Ursachen zurück-

zuführen ist. Wir möchten zunächst hervorheben, dass dieses Verhalten des Chroms durchaus keine Ausnahme bildet, sondern dass alle Metalle, die sich passivieren lassen, auch aktivierbar sind und dass bei allen diesen Metallen die Einstellung auf einen mittleren Zustand sowohl von der Passivität als auch der Aktivität aus erfolgt. Wir haben also bei der Aktivierbarkeit mit einer Erscheinung zu rechnen, die ebenso wichtig ist, wie die Passivierbarkeit der Metalle.

Der Potentialsprung eines passivierbaren Metalles kann gesteigert werden, einmal durch chemische Agentien, dann aber auch durch mechanische Reinigung der Oberfläche, also durch Abschmirgeln oder durch Abfeilen, ganz allgemein durch Erneuerung der Oberfläche. Ferner haben unsere Versuche gelehrt, dass der Potentialsprung um so höher ist, je intensiver die Reinigung der Oberfläche erfolgt und je kürzer die Zeit ist, die zwischen der Messung und dem Reinigen der Oberfläche verfliesst. Daraus ergibt sich nun ohne weiteres, dass die höchsten, überhaupt beobachteten Potentialsprünge dem wahren Potentialsprung am nächsten kommen. Jene sogenannten Mittelwerte, auf die sich unsere Metalle sowohl vom passiven als auch vom aktiven Zustand aus einstellen, entsprechen in Wirklichkeit schon einem Zustand der Passivität, der, wie aus unseren Beobachtungen hervorgeht, durch die Luft hervorgerufen wird. Man kann in Wirklichkeit nur von einem Zustand der Aktivität sprechen und dieser entspricht dem höchsten Potentialsprung. Dieser höchste und wahre Potentialsprung ist aber der Messung sehr schwer zugänglich, weil nach unseren Erfahrungen die Luft als äusserst energisches Passivierungsmittel wirkt.

Wir sind nicht sicher, ob wir mit unseren höchsten Werten die wahren Potentialsprünge der untersuchten Metalle erreicht haben und halten es für durchaus nicht ausgeschlossen, dass spätere Untersuchungen im einen oder anderen Falle zu noch höheren Werten führen werden. So lange uns die Mittel fehlen, die wahren Potentiale dieser Metalle einwurfsfrei festzustellen, muss man sich mit den höchsten Werten be-

gnügen, als denjenigen, welche den richtigen am nächsten kommen.

Das Verhalten des Chroms.

Das Chrom ist von Hittorf so eingehend studiert worden, dass etwas wesentlich Neues über das Verhalten dieses Metalles nicht zu sagen ist. Wenn wir trotzdem unsere Messungen im Nachfolgenden anführen, so geschieht dies deshalb, um Vergleichswerte für die Zahlen der übrigen von uns untersuchten Metalle zu haben. Wir benutzten Chromstücke von im allgemeinen parallelepipedischer Form, die aus grösseren Stücken nach den Hexaederflächen herausgespalten wurden. Drei von solch frischen Spaltungsstücken zeigten, gegen normal Kaliumchloridlösung gemessen, Potentialsprünge von — 0,24, — 0,43, — 0,36 Volt.

Diese Differenzen an frischen Stücken, die schon Hittorf bemerkt hat, rühren wahrscheinlich von der Oberflächenbeschaffenheit her. Die Spaltbarkeit des Chroms ist eine ziemlich unvollkommene und lassen sich gute, hexaedrische Spaltungsstücke daher kaum erhalten. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass auf verschiedenen Formen der Kristalle die Potentialsprünge verschieden sind, wie dies schon von Bäckström[1]) bei dem ebenfalls regulär kristallisierenden Magneteisen vermutet wurde. Der Beweis hiefür dürfte allerdings sehr schwer zu erbringen sein, weil ja eine Kristallfläche beim Lösungsprozess sich sofort mit einer Unzahl von Ätzfiguren überzieht, deren Flächen den verschiedenartigsten Richtungen im Kristall entsprechen. Wir haben diesen Gedanken bis jetzt noch nicht weiter verfolgt.

Es schien uns wünschenswert zunächst experimentell festzustellen, dass die Aktivierung bezw. Passivierung auf der Metalloberfläche nur lokal erfolgt. Dass Chromstücke aus einer Schmelze verschiedene Potentiale zeigen, hat schon Hittorf bemerkt; ein von uns untersuchtes Stück von etwa 0,5 cm

---

[1]) Översigt af k. Vetenskaps, Akademiens Förhandlingar, Bd. 45, 1888.

Dicke und 2,5 cm Länge, das in der Mitte mit Platin armiert war, zeigte am einen Ende $a = -0,25$, am anderen Ende $b = -0,31$, also eine Differenz von 0,06 Volt. Bemerkt muss werden, dass das Ende b mit dem niederen Potentialsprung matt, also etwas angeätzt war. Nun wurde das Stück in Zitronensäure als Kathode aktiviert und wiederum gemessen. Sodann liess man das Stück nach sorgfältigem Abspülen und Abtrocknen 14 Stunden an der Luft liegen und bestimmte neuerdings die Potentialsprünge. Die Resultate finden sich in untenstehender Tabelle.

Tabelle Nr. 1.

Ausgangs-potential	Nach dem Aktivieren in Zitronensäure	Nach 14 Stunden Liegen an der Luft
$a = -0,25$	$a = -0,11$	$a = -0,16$
$b = -0,31$	$b = -0,21$	$b = -0,30$

Es geht daraus hervor, dass durch ganz einheitliche chemische Behandlung die Differenz im elektromotorischen Verhalten beider Enden sich nicht ausgleicht, sondern im Gegenteil noch grösser wurde. Schon aus diesem Verhalten geht hervor, dass die Aktivierung bezw. Passivierung eine rein lokale ist. Man kann dieses noch dadurch beweisen, dass man ein Chromstück mit Wachs überzieht, eine kleine Stelle blosslegt und nun energisch aktiviert oder passiviert, sodass der Potentialsprung sich um mehrere Zehntel Volt verändert. Verschliesst man nun diese Stelle und legt eine andere derselben Fläche bloss, so zeigt diese wieder das ursprüngliche Potential.

Wir haben dann sowohl aktives als auch passives Chrom mit verschiedenen Lösungsmitteln behandelt und stellen die Resultate der Übersichtlichkeit halber hier unten in einer Tabelle zusammen. Die Messungen erfolgten derart, dass das Chrom nach dem Herausnehmen aus dem betreffenden Lösungsmittel schnell abgespült und dann sofort gegen normale Chlorkaliumlösung gemessen wurden.

Chrom.

Tabelle Nr. 2.

Potentialsprünge an frischen Spaltungsstücken = — 0,24; — 0,43; — 0,36 Volt.

1. Aktivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,08	Salzsäure 20%	2 Min.	+ 0,04
— 0,31	Ammoniak 10%	24 Stund.	— 0,17
— 0,87	Kalilauge 25%	16 Stund.	— 0,19
— 1,0	Kathode in Kalilauge 0,5 A	5 Min.	— 0,15
— 1,17	„ „ Salmiaklösung 0,25 A	5 Min.	+ 0,13
— 0,21	„ „ Schwefelsäure 0,5 A	10 Min.	+ 0,03
— 0,72	„ „ stark gekühlter Kalilauge 0,5 A	2 Min.	+ 0,35
—	Abgeschmirgelt	—	+ 0,15

2. Passivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
— 0,23 Volt	Eisenchloridlösung 18%	10 Min.	— 0,92 Volt
— 0,31 „	Wasserstoffsuperoxyd	24 Stund.	— 0,86 „
— 0,16 „	Rhodanwasserstoffsäure	2 Stund.	— 0,3[illegible] „
— 0,01 „	Anode in Kaliumfluorid	1 Min.	— 1,24 „
— 0,35 „	„ „ Cyankalium	10 Min.	— 1,19 „
— 1,19 „	„ „ „	15 Min.	— 1,22 „
— 0,84 „	Konz. Chromsäure	15 Stund.	— 1,29 „
— 0,39 „	Anode in Chromsäure	5 Min.	— 1,20 „
— 1,29 „	Konz. Chromsäure	5 Stund.	— 1,47 „

Von den in der Tabelle aufgeführten Potentialsprüngen interessiert besonders der höchste von + 0,35 Volt, welcher dem wahren Potentialsprung des Chroms gegen normal Chlorkaliumlösung am nächsten kommen dürfte. Derselbe wurde in folgender Weise erhalten: Konzentrierte Kalilauge wurde in einem Bechergläschen mit flüssiger Luft soweit abgekühlt, bis

eine zähe teigige Masse entstanden war, dann wurde das Chromstück und ein Platinblech hineingesteckt, hierauf etwa eine Minute lang in der Richtung vom Platin zum Chrom der Strom einer Akkumulatorenzelle hindurchgeschickt. Das Stück wurde sodann herausgenommen, das Ätzkali schnell mit kaltem Wasser vollständig abgespült. Nach dem Einbringen in die Kaliumchloridlösung umgab sich das Chromstück mit einer Eisschicht, nach deren Wegschmelzen das obige Potential abgelesen wurde. Dieses hohe Potential konnte nur deshalb zur Messung kommen, weil die Temperatur, bei welcher gearbeitet wurde, eine möglichst niedrige war; wir haben oft die Bemerkung gemacht, dass diese Temperaturen konservierend auf das Potential eines Metalles wirken, ganz gleichgiltig, ob sich dasselbe in aktivem oder passivem Zustand befindet. Wir haben uns deshalb manchmal der flüssigen Luft bedient, wenn es sich darum handelte, ein Metallstück längere Zeit in demselben Zustande zu erhalten. Dieselbe eignet sich zu diesem Zweck auch deshalb recht gut, weil sie, wie aus zahlreichen Beobachtungen hervorgeht, selbst keinen Einfluss auf das elektromotorische Verhalten der Metalle ausübt.

In der Einleitung wurde erwähnt, dass man durch mechanische Reinigung der Oberfläche die Metalle sehr häufig aktivieren kann. Dies trifft auch beim Chrom zu, wie folgender Versuch beweist.

Ein Metallstäbchen, das an einem Ende passiviert war und einen Potentialsprung von — 0,72 Volt zeigte, wurde auf einer schnell rotierenden Schmirgelscheibe abgerieben und sodann der Potentialsprung wiederum bestimmt. Derselbe war bedeutend in die Höhe gegangen und bei einer Reihe von Versuchen erreichten wir als höchsten Wert + 0,15 Volt. Dass auf diese Weise keine höheren Werte erreicht wurden, liegt einfach daran, dass die Luft auf das Metall ausserordentlich passivierend wirkt. Der in abgekühlter Kalilauge erhaltene höchste Wert von + 0,35 Volt schnellt sofort nach dem Verschwinden der Eisschicht rapide zurück und erreichte schon nach 15 Sekunden ein Potential von + 0,10 Volt, zweifellos

infolge des im Elektrolyten aufgelösten Luftsauerstoffes. Im übrigen ergeben sich aus unserer Tabelle Schlussfolgerungen, die mit denen Hittorfs übereinstimmen. Sie lassen sich kurz dahin zusammenfassen: Oxydationsmittel passivieren — Reduktionsmittel aktivieren, woraus sich ohne weiteres ergibt, dass das Metall bei der Elektrolyse kathodisch aktiviert, anodisch passiviert wird. Der Wert für den passivsten Zustand betrug — 1,47 Volt, sodass also aktives und passives Chrom in normaler Chlorkaliumlösung eine Kette mit einer elektromotorischen Kraft von 1,82 Volt liefern würde. Bestätigen konnten wir die Beobachtungen Hittorfs, dass beim Aktivieren des Chroms ein um so schwächerer Strom genügt, je höher der Gehalt der Lösung an Säure und ihre Temperatur ist (die Temperatur ist nebenbei bemerkt, von geringem Einfluss). Wir wollen hier kurz die betreffenden Zahlen anfügen. Chrom wurde 7 Minuten lang bei einem Strom von 0,5 Ampère als Kathode aktiviert, nachdem es jedesmal mit Chromsäure auf einen Potentialsprung von — 0,67 Volt passiviert wurde.

	Normal-Schwefelsäure	ergab	— 0,10 Volt
3 ×	„ „	„	— 0,01 „
	96 % „	„	+ 0,25 „

Wir fügen diese Zahlen deshalb hier an, weil Molybdän und Wolfram die entgegengesetzten Verhältnisse zeigen.

Molybdän und Wolfram.

Diese beiden Metalle stehen in Bezug auf ihr elektromotorisches Verhalten dem Chrom sehr nahe. Wir finden, wie bei diesem, ausserordentlich grosse Schwankungen in den Potentialsprüngen. Die von uns beobachteten Grenzwerte waren:

Bei Molybdän:

+ 0,46 Volt
— 0,94 „ } Differenz 1,40 Volt.

Bei Wolfram:

+ 0,34 Volt
— 1,16 „ } Differenz 1,50 Volt.

Es wurden von jedem Metall zwei längliche Stücke verwendet, die an den dicken Enden mit einem Platindraht armiert wurden. Die beiden Stücke zeigten im frischen Zustand folgende Potentialsprünge:

Mo_I = — 0,54 Volt
Mo_{II} = — 0,26 „
Wo_I = — 0,63 „
Wo_{II} = — 0,25 „

Die Metalle zeigten fein kristallinische Struktur und konnten Spaltungsstücke deshalb nicht hergestellt werden. An den Enden, an denen die Messungen vorgenommen wurden, haben wir die Stücke mit einer Karborundscheibe öfters anpoliert.

Das Passivieren mit oxydierenden Mitteln gelingt sehr leicht und es wirken hier, wie bei Chrom, Chromsäure, Eisenchlorid, Salpetersäure sehr energisch. Die beiden oben angeführten höchsten Werte der Passivität von — 0,94 für Molybdän und — 1,16 für Wolfram, haben wir erhalten, indem wir die Metalle 14 Stunden lang der Einwirkung einer konzentrierten Chromsäurelösung aussetzten. Man muss, um die höchsten Werte zu erhalten, die Metalle ziemlich lange mit dem passivierenden Mittel in Berührung lassen, da das Potential des betreffenden Metalles stetig und zwar zuerst schneller, dann langsamer abnimmt bezw. steigt, um schliesslich beim äussersten Wert stehen zu bleiben. Dies ist sowohl beim Aktivieren als auch beim Passivieren zu beobachten. Dieser äusserste Wert ist verschieden für die verschiedenen Reagentien und es lässt sich der folgende, sehr wichtige Satz aufstellen:

„Die Metalle mit veränderlicher elektromotorischer Kraft stellen sich bei genügend langer Einwirkung in jedem Medium auf einen bestimmten, vom Medium abhängigen Potentialsprung ein und zwar ist dieser Potentialsprung derselbe, ganz gleichgiltig ob die Einstellung von der aktiven oder passiven Seite aus erfolgt."

Auch das Eisenchlorid wirkt energisch passivierend auf Molybdän und Wolfram ein. Wir haben die Wirkung dieses

Oxydationsmittels etwas näher studiert um zu zeigen, wie weit der erreichte Potentialsprung eine Funktion der Zeit ist.

Ähnliche Versuche haben wir mit Kalilauge gemacht, welche stark aktivierend auf Molybdän und Wolfram einwirkt und haben die Resultate in nachfolgender Tabelle zusammengestellt:

Tabelle Nr. 3.

1. Molybdän.

Aktivierung in Kalilauge (1 : 3) Ausgangspotential — 0,45		Passivierung in Eisenchloridlösung (1 : 5) Ausgangspotential + 0,21	
Zeit	Potentialsprung	Zeit	Potentialsprung
1/2 Minuten	— 0,03	1/2 Minuten	— 0,34
1 „	+ 0,03	1 „	— 0,54
2 „	+ 0,16	2 „	— 0,57
3 „	+ 0,19	3 „	— 0,65
4 „	+ 0,19	4 „	— 0,67
5 „	+ 0,20	5 „	— 0,68
6 „	+ 0,22	1,5 Stunden	— 0,71
8 „	+ 0,21	2 „	— 0,75
10 „	+ 0,21	3 „	— 0,75

Tabelle Nr. 4.

2. Wolfram.

Aktivierung in Kalilauge (1 : 3) Ausgangspotential — 0,43		Passivierung in Eisenchloridlösung (1 : 5) Ausgangspotential + 0,19	
Zeit	Potentialsprung	Zeit	Potentialsprung
1/2 Minuten	+ 0,09	1/2 Minuten	— 0,19
1 „	+ 0,17	1 „	— 0,79
2 „	+ 0,21	2 „	— 0,79
3 „	+ 0,22	3 „	— 0,97
4 „	+ 0,22	4 „	— 0,99
5 „	+ 0,22	5 „	— 0,99
8 „	+ 0,23	10 „	— 1,00
9 „	+ 0,23	30 „	— 1,01
—	—	60 „	— 1,03

Untenstehend geben wir dann weitere vier Tabellen, in welchen die verschiedenen Werte angegeben sind, welche beim Aktivieren bezw. Passivieren in den verschiedenen Reagentien

erhalten wurden. Wie man sieht, wirkt Kalilauge besonders energisch aktivierend auf beide Metalle und zwar hauptsächlich deshalb, weil Kalilauge die Oberfläche reinigt dadurch, dass die Metalle sich zu Molybdaten bezw. Wolframaten in der alkalischen Flüssigkeit auflösen. Die Menge, die in Lösung geht, ist allerdings sehr gering und auch an der Oberfläche der Metalle ist mit dem Auge eine Veränderung nicht zu bemerken. Wir stellen uns die Sache so vor, dass der Sauerstoff, welcher die Passivität des Metalles bedingt, zur Säure- bezw. Salzbildung zunächst verbraucht wird.

Tabelle Nr. 5a.

Molybdän.

1. Aktivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,41	Konz. Kalilauge	4 Stund.	+ 0,44
— 0,67	Kathode in Salmiaklösung	5 Min.	+ 0,35
— 0,57	Ammoniaklösung	24 Stund.	+ 0,03
— 0,83	Kathode in stark gekühlter Kalilauge	2 Min.	+ 0,46
— 0,61	Alkalischer Formaldehydlösung	5 Min.	— 0,03
—	Abgeschmirgelt	—	+ 0,03

Tabelle Nr. 5b.

Molybdän.

2. Passivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,06	Salpetersäure 40%	2 Min.	— 0,66
— 0,32	Anode in Cyankalium	5 „	— 0,74
— 0,44	„ „ Rhodankali	5 „	— 0,73
+ 0,44	Konzentrierter Chromsäure	14 Stund.	— 0,94
— 0,03	Rhodanwasserstoffsäure	2 „	— 0,53
— 0,22	Salzsäure 20%	14 „	— 0,57
— 0,30	Schwefelsäure 16%	14 „	— 0,54
+ 0,20	Ammonpersulfatlösung	$2^1/_2$ „	— 0,73
— 0,01	Eisenchloridlösung 16%	30 Min.	— 0,76

Tabelle Nr. 6a.

Wolfram.

1. Aktivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,49	Konzentrierter Kalilauge	4 Stund.	+ 0,30
— 0,73	Kathode in konzentr. Kalilauge	5 Min.	+ 0,01
— 0,56	„ „ Salmiaklösung	5 „	+ 0,04
— 0,28	„ „ gekühlter Kalilauge	2 „	+ 0,34
— 0,11	Alkalischer Formaldehydlösung	5 „	+ 0,08
—	Abgeschmirgelt	—	— 0,01

Tabelle Nr. 6b.

Wolfram.

2. Passivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,13	Salpetersäure 40%	2 Min.	— 0,93
— 0,25	Anode in Cyankalium	5 „	— 0,96
+ 0,01	„ „ Rhodankalium	5 „	— 0,91
+ 0,15	Konzentrierter Chromsäure	14 Stund.	— **1,16**
— 0,04	Rhodanwasserstoffsäure	2 „	— 0,45
+ 0,30	Salzsäure 20%	14 „	— 0,58
+ 0,25	Schwefelsäure 16%	14 „	— 0,64
+ 0,04	Ammonpersulfatlösung	2 „	— 0,92
— 0,51	Eisenchloridlösung 16%	30 Min.	— 1,08

Zu obigen Tabellen wäre noch zu bemerken, dass der Grenzwert, der sich beim Aktivieren z. B. mit Kalilauge ergibt, immer derselbe ist, ganz gleichgiltig, ob man das Metall einfach in die Flüssigkeit eintaucht, oder ob man dasselbe mit einer fremden elektromotorischen Kraft kathodisch in derselben Flüssigkeit aktiviert. Nur verlauft in letzterem Falle der Aktivierungsprozess sehr viel schneller als in ersterem, offenbar

deshalb, weil die auf der Metalloberfläche sich entladenden Wasserstoffionen sofort mit dem die Passivität bedingenden Sauerstoff in Reaktion treten. Als auffallend muss es bezeichnet werden, dass Molybdän und Wolfram durch Salzsäure und durch verdünnte Schwefelsäure passiviert werden, während dieselben Reagentien auf das Chrom ziemlich energisch aktivierend wirken. Eine Erklärung für diese Erscheinung ist nicht leicht zu finden.

Man kann annehmen, dass der in den Säuren aufgelöste Sauerstoff energischer passivierend wirkt, als der Luftsauerstoff; in diesem Falle wären also nicht die Säuren selbst die wirkenden Agentien. Möglicherweise spielen indessen auch Verunreinigungen eine Rolle, ganz rein erhält man die Metalle ja nie und sind bei unseren, sehr schwer schmelzbaren Metallen kleine Mengen von Siliciden und vielleicht auch Nitriden niemals ganz auszuschliessen.

Wir haben nun untersucht, wie sich Molybdän und Wolfram beim kathodischen Aktivieren in einigen Säuren von verschiedener Konzentration verhalten und haben konstatieren können, dass auch hier das Verhalten ein vom Chrom vollständig abweichendes ist, wie das aus den unten folgenden vier Tabellen hervorgeht.

Tabelle Nr. 7.

Wolfram.

Vor jedem Versuch in Eisenchlorid passiviert: — 0,71.

$^1/_{10}$ n H_2SO_4 Stromstärke 0,25 A.		$^1/_1$ n H_2SO_4 Stromstärke 0,25 A.		$3 \cdot$ n H_2SO_4 Stromstärke 0,25 A.	
Zeit	Potential	Zeit	Potential	Zeit	Potential
1 Min.	— 0,08	1 Min.	— 0,07	1 Min.	— 0,12
2 „	— 0,07	2 „	— 0,07	2 „	— 0,07
3 „	— 0,06	3 „	— 0,07	3 „	— 0,051
4 „	— 0,06	4 „	— 0,07	4 „	— 0,07
5 „	— 0,05	5 „	— 0,07	5 „	— 0,07
10 „	— 0,04	—	—	10 „	— 0,07

Tabelle Nr. 8.

2 × n Zitronensäure Stromstärke 0,1 A.		1/1 n Zitronensäure 0,06 Ampère		2 × n Zitronensäure 0,06 Ampère		1/10 n Zitronensäure 0,06 Ampère	
Zeit	Potential	Zeit	Potential	Zeit	Potential	Zeit	Potential
1 Min.	— 0,21	1 Min.	— 0,17	1 Min.	— 0,2	1 Min.	— 0,12
2 „	— 0,15	2 „	— 0,10	2 „	— 0,18	2 „	— 0,07
3 „	— 0,14	3 „	— 0,03	3 „	— 0,18	3 „	— 0,06
4 „	— 0,13	4 „	— 0,07	4 „	— 0,17	4 „	— 0,05
5 „	— 0,11	5 „	— 0,08	5 „	— 0,13	5 „	— 0,03
6 „	— 0,11	—	—	6 „	— 0,13	6 „	— 0,01
10 „	— 0,12	—	—	—	—	10 „	— 0,017

Tabelle Nr. 9.

3 × n Schwefelsäure 0,06 Ampère		1/1 n H_2SO_4 0,06 Ampère		1/10 n H_2SO_4 0,06 Ampère	
Zeit	Potentialspr.	Zeit	Potentialspr.	Zeit	Potentialspr.
1 Min.	— 0,15	1 Min.	— 0,11	1 Min.	— 0,11
2 „	— 0,12	2 „	— 0,08	2 „	— 0,08
3 „	— 0,10	3 „	— 0,07	3 „	— 0,07
4 „	— 0,09	4 „	— 0,06	4 „	— 0,06
5 „	— 0,08	5 „	— 0,07	5 „	— 0,04
6 „	— 0,07	6 „	— 0,07	6 „	— 0,04
10 „	— 0,07	—	—	8 „	— 0,05

Tabelle Nr. 10.

Molybdän.

Vor jedem Versuch in Eisenchlorid passiviert: — 0,69.

ca. 1/300 n H_2SO_4 Stromstärke 0,1 A.		16% H_2SO_4 0,25 Ampère		96% H_2SO_4 0,25 Ampère	
Zeit	Potential	Zeit	Potential	Zeit	Potential
1 Min.	— 0,22	1 Min.	— 0,36	1 Min.	— 0,30
2 „	— 0,19	2 „	— 0,31	2 „	— 0,30
3 „	— 0,19	3 „	— 0,26	3 „	— 0,30
4 „	— 0,19	4 „	— 0,25	5 „	— 0,27
5 „	— 0,19	5 „	— 0,23	10 „	— 0,30
6 „	— 0,18	6 „	— 0,23	—	—
10 „	— 0,17	10 „	— 0,23	—	—

Beim Chrom erfolgt, wie oben angegeben, die Aktivierung um so energischer, je grösser die Konzentration der Säure ist. Bei Molybdän und Wolfram ist die Konzentration der Säure kaum von Einfluss. Die Erklärung dürfte nun in dem verschiedenen Verhalten dieser Metalle bei Berührung mit Säuren liegen. Das Chrom wird dabei aktiv, es wird also die durch die kathodische Polarisation erreichte Aktivität vergrössert, oder doch wenigstens nicht verringert. Bei Molybdän und Wolfram ist es umgekehrt. Die durch die kathodische Polarisation erreichte Aktivität wird verringert oder doch kompensiert durch den passivierenden Einfluss der Säure.

Uran.

Nachdem sich herausgestellt, dass Molybdän und Wolfram in Bezug auf ihr elektromotorisches Verhalten dem Chrom sehr nahe stehen, schien es uns interessant auch das Uran in dieser Richtung zu untersuchen. Es stand uns, wie schon in der Einleitung bemerkt, ein schönes, grosses, sehr reines Stück zur Verfügung. Dasselbe zeigt auf frischer Fläche gegen normale Chlorkaliumlösung einen Potentialsprung von + 0,19 Volt. Wir haben alle üblichen Mittel angewendet, um das uns zur Verfügung stehende Stück zu aktivieren, jedoch ohne jeden Erfolg. Das Potential blieb vollkommen unverändert auf derselben Höhe. Es gehört demnach das Uran zu den Elementen, deren Potentialsprung unveränderlich ist, ähnlich wie das Zink. Hittorfs Vermutung, dass das Uran besonders interessante, dem Chrom und Eisen analoge Erscheinungen zeigen würde, hat sich durch unsere Untersuchungen nicht bestätigt.

Vanadin und Niob.

Diese beiden fünfwertigen Metalle, die wir in besonders schönen und reinen Stücken zur Verfügung hatten, zeigen wiederum eine sehr grosse Veränderlichkeit in Bezug auf den Potentialsprung, wie dies aus den untenstehenden vier Tabellen zu ersehen ist.

Chrom.

Tabelle Nr. 2.

Potentialsprünge an frischen Spaltungsstücken = — 0,24; — 0,43; — 0,36 Volt.

1. Aktivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,08	Salzsäure 20%	2 Min.	+ 0,04
— 0,31	Ammoniak 10%	24 Stund.	— 0,17
— 0,87	Kalilauge 25%	16 Stund.	— 0,19
— 1,0	Kathode in Kalilauge 0,5 A	5 Min.	— 0,15
— 1,17	„ „ Salmiaklösung 0,25 A	5 Min.	+ 0,13
— 0,21	„ „ Schwefelsäure 0,5 A	10 Min.	+ 0,03
— 0,72	„ „ stark gekühlter Kalilauge 0,5 A	2 Min.	+ 0,35
—	Abgeschmirgelt	—	+ 0,15

2. Passivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
— 0,23 Volt	Eisenchloridlösung 18%	10 Min.	— 0,92 Volt
— 0,31 „	Wasserstoffsuperoxyd	24 Stund.	— 0,86 „
— 0,16 „	Rhodanwasserstoffsäure	2 Stund.	— 0,39 „
— 0,01 „	Anode in Kaliumfluorid	1 Min.	— 1,24 „
— 0,35 „	„ „ Cyankalium	10 Min.	— 1,19 „
— 1,19 „	„ „ „	15 Min.	— 1,22 „
— 0,84 „	Konz. Chromsäure	15 Stund.	— 1,29 „
— 0,39 „	Anode in Chromsäure	5 Min.	— 1,20 „
— 1,29 „	Konz. Chromsäure	5 Stund.	— 1,47 „

Von den in der Tabelle aufgeführten Potentialsprüngen interessiert besonders der höchste von + 0,35 Volt, welcher dem wahren Potentialsprung des Chroms gegen normal Chlorkaliumlösung am nächsten kommen dürfte. Derselbe wurde in folgender Weise erhalten: Konzentrierte Kalilauge wurde in einem Bechergläschen mit flüssiger Luft soweit abgekühlt, bis

eine zähe teigige Masse entstanden war, dann wurde das Chromstück und ein Platinblech hineingesteckt, hierauf etwa eine Minute lang in der Richtung vom Platin zum Chrom der Strom einer Akkumulatorenzelle hindurchgeschickt. Das Stück wurde sodann herausgenommen, das Ätzkali schnell mit kaltem Wasser vollständig abgespült. Nach dem Einbringen in die Kaliumchloridlösung umgab sich das Chromstück mit einer Eisschicht, nach deren Wegschmelzen das obige Potential abgelesen wurde. Dieses hohe Potential konnte nur deshalb zur Messung kommen, weil die Temperatur, bei welcher gearbeitet wurde, eine möglichst niedrige war; wir haben oft die Bemerkung gemacht, dass diese Temperaturen konservierend auf das Potential eines Metalles wirken, ganz gleichgiltig, ob sich dasselbe in aktivem oder passivem Zustand befindet. Wir haben uns deshalb manchmal der flüssigen Luft bedient, wenn es sich darum handelte, ein Metallstück längere Zeit in demselben Zustande zu erhalten. Dieselbe eignet sich zu diesem Zweck auch deshalb recht gut, weil sie, wie aus zahlreichen Beobachtungen hervorgeht, selbst keinen Einfluss auf das elektromotorische Verhalten der Metalle ausübt.

In der Einleitung wurde erwähnt, dass man durch mechanische Reinigung der Oberfläche die Metalle sehr häufig aktivieren kann. Dies trifft auch beim Chrom zu, wie folgender Versuch beweist.

Ein Metallstäbchen, das an einem Ende passiviert war und einen Potentialsprung von — 0,72 Volt zeigte, wurde auf einer schnell rotierenden Schmirgelscheibe abgerieben und sodann der Potentialsprung wiederum bestimmt. Derselbe war bedeutend in die Höhe gegangen und bei einer Reihe von Versuchen erreichten wir als höchsten Wert + 0,15 Volt. Dass auf diese Weise keine höheren Werte erreicht wurden, liegt einfach daran, dass die Luft auf das Metall ausserordentlich passivierend wirkt. Der in abgekühlter Kalilauge erhaltene höchste Wert von + 0,35 Volt schnellt sofort nach dem Verschwinden der Eisschicht rapide zurück und erreichte schon nach 15 Sekunden ein Potential von + 0,10 Volt, zweifellos

infolge des im Elektrolyten aufgelösten Luftsauerstoffes. Im übrigen ergeben sich aus unserer Tabelle Schlussfolgerungen, die mit denen Hittorfs übereinstimmen. Sie lassen sich kurz dahin zusammenfassen: Oxydationsmittel passivieren — Reduktionsmittel aktivieren, woraus sich ohne weiteres ergibt, dass das Metall bei der Elektrolyse kathodisch aktiviert, anodisch passiviert wird. Der Wert für den passivsten Zustand betrug — 1,47 Volt, sodass also aktives und passives Chrom in normaler Chlorkaliumlösung eine Kette mit einer elektromotorischen Kraft von 1,82 Volt liefern würde. Bestätigen konnten wir die Beobachtungen Hittorfs, dass beim Aktivieren des Chroms ein um so schwächerer Strom genügt, je höher der Gehalt der Lösung an Säure und ihre Temperatur ist (die Temperatur ist nebenbei bemerkt, von geringem Einfluss). Wir wollen hier kurz die betreffenden Zahlen anfügen. Chrom wurde 7 Minuten lang bei einem Strom von 0,5 Ampère als Kathode aktiviert, nachdem es jedesmal mit Chromsäure auf einen Potentialsprung von — 0,67 Volt passiviert wurde.

	Normal-Schwefelsäure	ergab	— 0,10 Volt
3 ×	„ „	„	— 0,01 „
	96 % „	„	+ 0,25 „

Wir fügen diese Zahlen deshalb hier an, weil Molybdän und Wolfram die entgegengesetzten Verhältnisse zeigen.

Molybdän und Wolfram.

Diese beiden Metalle stehen in Bezug auf ihr elektromotorisches Verhalten dem Chrom sehr nahe. Wir finden, wie bei diesem, ausserordentlich grosse Schwankungen in den Potentialsprüngen. Die von uns beobachteten Grenzwerte waren:

Bei Molybdän:

+ 0,46 Volt }
— 0,94 „ } Differenz 1,40 Volt.

Bei Wolfram:

+ 0,34 Volt }
— 1,16 „ } Differenz 1,50 Volt.

Es wurden von jedem Metall zwei längliche Stücke verwendet, die an den dicken Enden mit einem Platindraht armiert wurden. Die beiden Stücke zeigten im frischen Zustand folgende Potentialsprünge:

$Mo_{I} = -0,54$ Volt
$Mo_{II} = -0,26$ „
$Wo_{I} = -0,63$ „
$Wo_{II} = -0,25$ „

Die Metalle zeigten fein kristallinische Struktur und konnten Spaltungsstücke deshalb nicht hergestellt werden. An den Enden, an denen die Messungen vorgenommen wurden, haben wir die Stücke mit einer Karborundscheibe öfters anpoliert.

Das Passivieren mit oxydierenden Mitteln gelingt sehr leicht und es wirken hier, wie bei Chrom, Chromsäure, Eisenchlorid, Salpetersäure sehr energisch. Die beiden oben angeführten höchsten Werte der Passivität von -- 0,94 für Molybdän und — 1,16 für Wolfram, haben wir erhalten, indem wir die Metalle 14 Stunden lang der Einwirkung einer konzentrierten Chromsäurelösung aussetzten. Man muss, um die höchsten Werte zu erhalten, die Metalle ziemlich lange mit dem passivierenden Mittel in Berührung lassen, da das Potential des betreffenden Metalles stetig und zwar zuerst schneller, dann langsamer abnimmt bezw. steigt, um schliesslich beim äussersten Wert stehen zu bleiben. Dies ist sowohl beim Aktivieren als auch beim Passivieren zu beobachten. Dieser äusserste Wert ist verschieden für die verschiedenen Reagentien und es lässt sich der folgende, sehr wichtige Satz aufstellen:

„Die Metalle mit veränderlicher elektromotorischer Kraft stellen sich bei genügend langer Einwirkung in jedem Medium auf einen bestimmten, vom Medium abhängigen Potentialsprung ein und zwar ist dieser Potentialsprung derselbe, ganz gleichgiltig ob die Einstellung von der aktiven oder passiven Seite aus erfolgt."

Auch das Eisenchlorid wirkt energisch passivierend auf Molybdän und Wolfram ein. Wir haben die Wirkung dieses

Oxydationsmittels etwas näher studiert um zu zeigen, wie weit der erreichte Potentialsprung eine Funktion der Zeit ist.

Ähnliche Versuche haben wir mit Kalilauge gemacht, welche stark aktivierend auf Molybdän und Wolfram einwirkt und haben die Resultate in nachfolgender Tabelle zusammengestellt:

Tabelle Nr. 3.

1. Molybdän.

Aktivierung in Kalilauge (1 : 3) Ausgangspotential — 0,45		Passivierung in Eisenchloridlösung (1 : 5) Ausgangspotential + 0,21	
Zeit	Potentialsprung	Zeit	Potentialsprung
1/2 Minuten	— 0,03	1/2 Minuten	— 0,34
1 „	+ 0,03	1 „	— 0,54
2 „	+ 0,16	2 „	— 0,57
3 „	+ 0,19	3 „	— 0,65
4 „	+ 0,19	4 „	— 0,67
5 „	+ 0,20	5 „	— 0,68
6 „	+ 0,22	1,5 Stunden	— 0,71
8 „	+ 0,21	2 „	— 0,75
10 „	+ 0,21	3 „	— 0,75

Tabelle Nr. 4.

2. Wolfram.

Aktivierung in Kalilauge (1 : 3) Ausgangspotential — 0,43		Passivierung in Eisenchloridlösung (1 : 5) Ausgangspotential + 0,19	
Zeit	Potentialsprung	Zeit	Potentialsprung
1/2 Minuten	+ 0,09	1/2 Minuten	— 0,19
1 „	+ 0,17	1 „	— 0,79
2 „	+ 0,21	2 „	— 0,79
3 „	+ 0,22	3 „	— 0,97
4 „	+ 0,22	4 „	— 0,99
5 „	+ 0,22	5 „	— 0,99
8 „	+ 0,23	10 „	— 1,00
9 „	+ 0,23	30 „	— 1,01
—	—	60 „	— 1,03

Untenstehend geben wir dann weitere vier Tabellen, in welchen die verschiedenen Werte angegeben sind, welche beim Aktivieren bezw. Passivieren in den verschiedenen Reagentien

erhalten wurden. Wie man sieht, wirkt Kalilauge besonders energisch aktivierend auf beide Metalle und zwar hauptsächlich deshalb, weil Kalilauge die Oberfläche reinigt dadurch, dass die Metalle sich zu Molybdaten bezw. Wolframaten in der alkalischen Flüssigkeit auflösen. Die Menge, die in Lösung geht, ist allerdings sehr gering und auch an der Oberfläche der Metalle ist mit dem Auge eine Veränderung nicht zu bemerken. Wir stellen uns die Sache so vor, dass der Sauerstoff, welcher die Passivität des Metalles bedingt, zur Säure- bezw. Salzbildung zunächst verbraucht wird.

Tabelle Nr. 5a.

Molybdän.

1. Aktivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,41	Konz. Kalilauge	4 Stund.	+ 0,44
— 0,67	Kathode in Salmiaklösung	5 Min.	+ 0,35
— 0,57	Ammoniaklösung	24 Stund.	+ 0,03
— 0,83	Kathode in stark gekühlter Kalilauge	2 Min.	+ 0,46
— 0,61	Alkalischer Formaldehydlösung	5 Min.	— 0,03
—	Abgeschmirgelt	—	+ 0,03

Tabelle Nr. 5b.

Molybdän.

2. Passivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,06	Salpetersäure 40%	2 Min.	— 0,66
— 0,32	Anode in Cyankalium	5 „	— 0,74
— 0,44	„ „ Rhodankali	5 „	— 0,73
+ 0,44	Konzentrierter Chromsäure	14 Stund.	— 0,94
— 0,03	Rhodanwasserstoffsäure	2 „	— 0,53
— 0,22	Salzsäure 20%	14 „	— 0,57
— 0,30	Schwefelsäure 16%	14 „	— 0,54
+ 0,20	Ammonpersulfatlösung	$2^1/_2$ „	— 0,73
— 0,01	Eisenchloridlösung 16%	30 Min.	— 0,76

Tabelle Nr. 6a.

Wolfram.

1. Aktivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,49	Konzentrierter Kalilauge	4 Stund.	+ 0,30
— 0,73	Kathode in konzentr. Kalilauge	5 Min.	+ 0,01
— 0,56	„ „ Salmiaklösung	5 „	+ 0,04
— 0,28	„ „ gekühlter Kalilauge	2 „	+ 0,34
— 0,11	Alkalischer Formaldehydlösung	5 „	+ 0,08
—	Abgeschmirgelt	—	— 0,01

Tabelle Nr. 6b.

Wolfram.

2. Passivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,13	Salpetersäure 40%	2 Min.	— 0,93
— 0,25	Anode in Cyankalium	5 „	— 0,96
+ 0,01	„ „ Rhodankalium	5 „	— 0,91
+ 0,15	Konzentrierter Chromsäure	14 Stund.	— 1,16
— 0,04	Rhodanwasserstoffsäure	2 „	— 0,45
+ 0,30	Salzsäure 20%	14 „	— 0,58
+ 0,25	Schwefelsäure 16%	14 „	— 0,64
+ 0,04	Ammonpersulfatlösung	2 „	— 0,92
— 0,51	Eisenchloridlösung 16%	30 Min.	— 1,08

Zu obigen Tabellen wäre noch zu bemerken, dass der Grenzwert, der sich beim Aktivieren z. B. mit Kalilauge ergibt, immer derselbe ist, ganz gleichgiltig, ob man das Metall einfach in die Flüssigkeit eintaucht, oder ob man dasselbe mit einer fremden elektromotorischen Kraft kathodisch in derselben Flüssigkeit aktiviert. Nur verlauft in letzterem Falle der Aktivierungsprozess sehr viel schneller als in ersterem, offenbar

deshalb, weil die auf der Metalloberfläche sich entladenden Wasserstoffionen sofort mit dem die Passivität bedingenden Sauerstoff in Reaktion treten. Als auffallend muss es bezeichnet werden, dass Molybdän und Wolfram durch Salzsäure und durch verdünnte Schwefelsäure passiviert werden, während dieselben Reagentien auf das Chrom ziemlich energisch aktivierend wirken. Eine Erklärung für diese Erscheinung ist nicht leicht zu finden.

Man kann annehmen, dass der in den Säuren aufgelöste Sauerstoff energischer passivierend wirkt, als der Luftsauerstoff; in diesem Falle wären also nicht die Säuren selbst die wirkenden Agentien. Möglicherweise spielen indessen auch Verunreinigungen eine Rolle, ganz rein erhält man die Metalle ja nie und sind bei unseren, sehr schwer schmelzbaren Metallen kleine Mengen von Siliciden und vielleicht auch Nitriden niemals ganz auszuschliessen.

Wir haben nun untersucht, wie sich Molybdän und Wolfram beim kathodischen Aktivieren in einigen Säuren von verschiedener Konzentration verhalten und haben konstatieren können, dass auch hier das Verhalten ein vom Chrom vollständig abweichendes ist, wie das aus den unten folgenden vier Tabellen hervorgeht.

Tabelle Nr. 7.

Wolfram.

Vor jedem Versuch in Eisenchlorid passiviert: — 0,71.

$^1/_{10}$ n H_2SO_4 Stromstärke 0,25 A.		$^1/_1$ n H_2SO_4 Stromstärke 0.25 A.		$3 \cdot$ n H_2SO_4 Stromstärke 0,25 A.	
Zeit	Potential	Zeit	Potential	Zeit	Potential
1 Min.	— 0,08	1 Min.	— 0,07	1 Min.	— 0,12
2 „	— 0,07	2 „	— 0,07	2 „	— 0,07
3 „	— 0,06	3 „	— 0,07	3 „	— 0,051
4 „	— 0,06	4 „	— 0,07	4 „	— 0,07
5 „	— 0,05	5 „	— 0,07	5 „	— 0,07
10 „	— 0,04	—	—	10 „	— 0,07

Tabelle Nr. 8.

2 × n Zitronensäure Stromstärke 0,1 A.		1/1 n Zitronensäure 0,06 Ampère		2 × n Zitronensäure 0,06 Ampère		1/10 n Zitronensäure 0,06 Ampère	
Zeit	Potential	Zeit	Potential	Zeit	Potential	Zeit	Potential
1 Min.	— 0,21	1 Min.	— 0,17	1 Min.	— 0,2	1 Min.	— 0,12
2 „	— 0,15	2 „	— 0,10	2 „	— 0,18	2 „	— 0,07
3 „	— 0,14	3 „	— 0,03	3 „	— 0,18	3 „	— 0,06
4 „	— 0,13	4 „	— 0,07	4 „	— 0,17	4 „	— 0,05
5 „	— 0,11	5 „	— 0,08	5 „	— 0,13	5 „	— 0,03
6 „	— 0,11	—	—	6 „	— 0,13	6 „	— 0,01
10 „	— 0,12	—	—	—	—	10 „	— 0,017

Tabelle Nr. 9.

3 × n Schwefelsäure 0,06 Ampère		1/1 n H_2SO_4 0,06 Ampère		1/10 n H_2SO_4 0,06 Ampère	
Zeit	Potentialspr.	Zeit	Potentialspr.	Zeit	Potentialspr.
1 Min.	— 0,15	1 Min.	— 0,11	1 Min.	— 0,11
2 „	— 0,12	2 „	— 0,08	2 „	— 0,08
3 „	— 0,10	3 „	— 0,07	3 „	— 0,07
4 „	— 0,09	4 „	— 0,06	4 „	— 0,06
5 „	— 0,08	5 „	— 0,07	5 „	— 0,04
6 „	— 0,07	6 „	— 0,07	6 „	— 0,04
10 „	— 0,07	—	—	8 „	— 0,05

Tabelle Nr. 10.

Molybdän.

Vor jedem Versuch in Eisenchlorid passiviert: — 0,69.

ca. 1/300 n H_2SO_4 Stromstärke 0,1 A.		16 % H_2SO_4 0,25 Ampère		96 % H_2SO_4 0,25 Ampère	
Zeit	Potential	Zeit	Potential	Zeit	Potential
1 Min.	— 0,22	1 Min.	— 0,36	1 Min.	— 0,30
2 „	— 0,19	2 „	— 0,31	2 „	— 0,30
3 „	— 0,19	3 „	— 0,26	3 „	— 0,30
4 „	— 0,19	4 „	— 0,25	5 „	— 0,27
5 „	— 0,19	5 „	— 0,23	10 „	— 0,30
6 „	— 0,18	6 „	— 0,23	—	—
10 „	— 0,17	10 „	— 0,23	—	—

Beim Chrom erfolgt, wie oben angegeben, die Aktivierung um so energischer, je grösser die Konzentration der Säure ist. Bei Molybdän und Wolfram ist die Konzentration der Säure kaum von Einfluss. Die Erklärung dürfte nun in dem verschiedenen Verhalten dieser Metalle bei Berührung mit Säuren liegen. Das Chrom wird dabei aktiv, es wird also die durch die kathodische Polarisation erreichte Aktivität vergrössert, oder doch wenigstens nicht verringert. Bei Molybdän und Wolfram ist es umgekehrt. Die durch die kathodische Polarisation erreichte Aktivität wird verringert oder doch kompensiert durch den passivierenden Einfluss der Säure.

Uran.

Nachdem sich herausgestellt, dass Molybdän und Wolfram in Bezug auf ihr elektromotorisches Verhalten dem Chrom sehr nahe stehen, schien es uns interessant auch das Uran in dieser Richtung zu untersuchen. Es stand uns, wie schon in der Einleitung bemerkt, ein schönes, grosses, sehr reines Stück zur Verfügung. Dasselbe zeigt auf frischer Fläche gegen normale Chlorkaliumlösung einen Potentialsprung von + 0,19 Volt. Wir haben alle üblichen Mittel angewendet, um das uns zur Verfügung stehende Stück zu aktivieren, jedoch ohne jeden Erfolg. Das Potential blieb vollkommen unverändert auf derselben Höhe. Es gehört demnach das Uran zu den Elementen, deren Potentialsprung unveränderlich ist, ähnlich wie das Zink. Hittorfs Vermutung, dass das Uran besonders interessante, dem Chrom und Eisen analoge Erscheinungen zeigen würde, hat sich durch unsere Untersuchungen nicht bestätigt.

Vanadin und Niob.

Diese beiden fünfwertigen Metalle, die wir in besonders schönen und reinen Stücken zur Verfügung hatten, zeigen wiederum eine sehr grosse Veränderlichkeit in Bezug auf den Potentialsprung, wie dies aus den untenstehenden vier Tabellen zu ersehen ist.

Tabelle Nr. 11.

Niob.

Potentialsprung zweier frischer Stücke: — 0,13; — 0,44.

1. Aktivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,71	Kalilauge 25%	1 Min.	— 0,08
— 0,68	Ammoniak 10%	3 „	+ 0,05
— 0,96	Konzentrierter Kalilauge	10 Stund.	+ 0,77
— 0,23	Kathode in Kalilauge	3 Min.	+ 0,62
— 0,30	„ „ Salmiaklösung	3 „	+ 0,69
—	Abgeschmirgelt	—	+ 0,42

Tabelle Nr. 12.

2. Passivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,11	Salpetersäure 40%	5 Min.	— 0,96
+ 0,51	Konzentrierter Chromsäure	14 Stund.	— 1,68
+ 0,71	Überchlorsäure	1 „	— 0,34
— 0,01	Kaliumpermanganat	1 „	— 1,19
+ 0,34	Ceriammonnitrat	5 „	— 1,12
— 0,31	Rhodanwasserstoffsäure	10 Min.	— 0,77
— 0,46	Anode in Cyankalium	2 „	— 1,09
+ 0,21	„ „ Chromsäure	8 „	— 1,42
— 0,12	Schwefelsäure 16%	10 „	— 0,49
+ 0,09	Anode in Salzsäure	2 „	— 1,66

Maximale Werte $\left.\begin{matrix} +0{,}77 \\ -1{,}68 \end{matrix}\right\}$ 2,45 Volt.

Tabelle Nr. 13.

Vanadin.[1])

Potentialsprung des frischen Stückes: — 0,41 Volt.

1. Aktivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,41	Konzentrierter Kalilauge	18 Stund.	+ 0,34
— 0,56	Kathode in Salmiaklösung	2 Min.	+ 0,15
— 0,43	„ „ Zitronensäure	2 „	— 0,01
— 0,88	„ „ Kalilauge	10 „	+ 0,43
+ 0,43	„ „ „	10 „	+ **0,46**

Tabelle Nr. 14.

2. Passivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
+ 0,15	Konzentrierter Salpetersäure	2 Sek.	— 0,56
+ 0,10	Salpetersäure 60%	3 Min.	— 0,76
— 0,44	Chromsäure 20%	30 „	— 0,81
— 0,31	Schwefelsäure 16%	10 „	— 0,48
+ 0,20	Konzentrierter Chromsäure	9 Stund.	— **0,92**
+ 0,19	Anode in Chromsäure	10 Min.	— 0,88
+ 0,33	„ „ Rhodankali	5 „	— 0,54
+ 0,32	„ „ Cyankali	5 „	— 0,62
+ 0,01	„ „ Salzsäure	1 „	— 0,66

Maximale Werte $\left.\begin{matrix} +0,46 \\ -0,92 \end{matrix}\right\}$ 1,38 Volt.

---

[1]) In einer jüngst erschienenen Abhandlung hat Marino (Zeitschrift für anorg. Chemie, Bd. 39, 2) einige Potentialwerte für das Vanadin angegeben und die Behauptung aufgestellt, dass Vanadin nicht zu den passivierbaren Metallen gehöre. Die Differenz zwischen unseren Resultaten und den von Marino erhaltenen erklärt sich daraus, dass die von Marino untersuchten Stücke nicht aus Vanadin, sondern aus einem Karbid desselben bestanden. Metallisches Vanadin hat ganz andere Eigenschaften als Marino angibt, ist ausserordentlich hart, sehr schwer zu zerkleinern,

Zu obigen Tabellen möchten wir bemerken, dass beide Metalle durch chemische Agentien nur sehr schwierig angegriffen werden und eine polierte Oberfläche selbst nach öfterer Behandlung mit oxydierenden Agentien sich vollkommen glänzend erhält, nur bei Niob war nach längerer Behandlung ein eigenartig bläulicher Anflug wahrzunehmen. Dieser Überzug, der offenbar von einer Oxydhaut herrührt, beeinflusst das elektromotorische Verhalten des Metalles nicht im mindesten. Es verschwand der Anflug auch nicht beim kathodischen Aktivieren in Kalilauge. Das Niob ist deshalb besonders interessant, weil die Differenz zwischen aktivsten und passivsten Wert grösser ist, als bei irgend einem anderen der untersuchten Metalle. Wenn man zwei Stücke Niob, das eine aktiviert, das andere passiviert, mit den beiden Elektroden einer mit verdünnter Schwefelsäure beschickten Zelle verbindet und die beiden Niobstücke in Chlorkaliumlösung eintaucht, so tritt an dem mit dem aktiven Metallstück verbundenen Platinblech momentan lebhafte Wasserstoffentwicklung ein, die allerdings nach sehr kurzer Zeit aufhört.

Eine Kette $Nb \mid H_2CrO_4 \mid KOH \mid Nb$ zeigt im Moment des Stromschlusses eine Spannung von 2,4 Volt, die infolge der Polarisation ebenfalls sehr rasch zurückgeht. Entsprechend der von Nernst für Platinelektroden entwickelten Vorstellung kann man sich auch hier denken, dass das Metall im Oxydationsmittel sich mit Sauerstoff belädt und zwar unter einem für das betreffende Oxydationsmittel charakteristischen Druck. Erwähnenswert ist, dass beim Niob das Potential über das von Platin in Chromsäure beobachtete von — 1,4 Volt beträchtlich hinausgeht.

während die von Marino verwendeten Stücke fast 9% Kohlenstoff enthielten, leicht zerbröckelten und eine makrokristallinische Struktur zeigten. Es besteht deshalb für uns keine Veranlassung auf die Arbeit einzugehen, doch möchten wir darauf hinweisen, dass Marino seine Potentialwerte immer durch direkte Messung gegen die betreffenden Agentien erhalten hat und daher ein Verfahren verwendete, welches, wie wir später ausführlich zeigen werden, zur Beurteilung der Passivierbarkeit der Metalle wenig geeignet ist.

Tantal.

Ein Stückchen von metallischem Tantal, das durch Reduktion von Tantalsäure mit Mischmetall erhalten wurde, eignete sich nicht zum Studium des elektromotorischen Verhaltens, da es vollkommen von Schlacke des zusammengeschmolzenen Ceritoxydes durchsetzt war. Das Metallstückchen zeigt auf frischem Bruch gegen normale Kaliumchloridlösung einen Potentialsprung von etwa — 0,5 Volt.

Ruthenium.

Dieses Metall schliesst sich in Bezug auf das elektromotorische Verhalten an die vorher behandelten Metalle an. Es lässt sich sowohl aktivieren als auch passivieren, wenn auch die maximalen Potentialsprünge weit unter den Werten bleiben, die bei den oben beschriebenen fünf Metallen beobachtet wurden. In nachfolgender Tabelle geben wir unsere beobachteten Werte; wie man sieht, beträgt die Differenz zwischen dem aktivsten und passivsten Zustande 0,86 Volt. Ruthenium behält den einmal angenommenen Zustand ziemlich lange bei, es erfolgt auch das Einstellen auf den Mittelwert ziemlich langsam.

Tabelle Nr. 15.

1. Aktivierung.

Luftpotential — 0,663 Volt.

Potentialsprung vor dem Versuch	Art der Behandlung	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,96	Kathode in Schwefelsäure	10 Min.	— 0,72
— 0,97	„ „ Zitronensäure	10 „	— 0,53
— 0,96	„ „ „	20 „	— 0,35
— 0,72	„ „ Kalilauge	10 „	— 0,44

Tabelle Nr. 16.

2. Passivierung.

Potentialsprung vor dem Versuch	Art der Behandlung	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,72	Mit rauchender Salpetersäure	1 Min.	— **1,21**
— 0,44	„ konzentrierter „	1 „	— 0,92
— 0,79	Anode in Salpetersäure	5 „	— 1,04
— 0,80	Mit Bromwasser	2 „	— 1,02
— 0,67	Mit Chromsäure	10 „	— 0,99

Eisen, Nickel und Kobalt.

Obwohl bereits verschiedene Untersuchungen über das elektromotorische Verhalten der Metalle der Eisengruppe vorliegen, bestehen doch gerade in dieser Gruppe viele Unsicherheiten und Unklarheiten. Von keinem der drei Metalle ist das wahre Potential mit Sicherheit bekannt; zwei Messungen, welche am Kobalt ausgeführt worden sind, ergaben ganz verschiedene Resultate. Neumann[1]) fand nämlich als Potentialsprung dieses Metalles gegen eine normale Sulfatlösung desselben: — 0,019; Le Blanc[2]) dagegen fand den Wert zu etwa + 0,17. Beim Nickel haben wir nur eine Messung von Neumann, welcher das Potential Ni ($^1/_1$ n) $NiSO_4$ zu — 0,022 Volt bestimmte, dabei aber angibt, dass nur mit grosser Schwierigkeit Elektroden herzustellen seien, welche diesen Wert bei der Messung ergeben.

Wir haben gefunden, dass dieser Wert für das Nickel viel zu niedrig ist und dasselbe gilt auch vom Eisen, das uns bei sorgfältiger Messung viel höhere Werte lieferte, als die in den Lehrbüchern angeführte, von Neumann herrührende Zahl von 0,093 Volt. Der Grund für diese Unsicherheit ist der Hauptsache nach darin zu suchen, dass die genannten Metalle äusserst empfindlich sind, sowohl gegen die Luft, als auch gegen gelösten Sauerstoff und dass die wahren Potentiale,

[1]) Zeitschr. f. physik. Chemie, Bd. 14, 1894.

[2]) „ „ „ Bd. 8.

welche sorgfältig gereinigte Oberflächen im ersten Moment zeigen, bei der Einwirkung der Luft geradezu rapid zurückgehen.

Wir haben in dieser Hinsicht besonders das Nickel eingehenden Untersuchungen unterworfen und möchten zunächst die Versuche beschreiben, die wir mit diesem Metalle ausgeführt haben, weil dieselben am besten geeignet sind, ein Licht auf diese komplizierten Verhältnisse zu werfen. Ein Stab von sehr reinem Nickel zeigte zunächst einen Potentialsprung von — 0,26 gegen $NiSO_4$ von — 0,30 gegen Chlorkaliumlösung. Wir haben nun versucht diesen Stab mechanisch zu reinigen in der Weise, dass der bei der Messung in den Elektrolyten eintauchende Teil seiner Oberfläche vor der Messung auf einer schnell rotierenden Schmirgelscheibe sorgfältig abgeschliffen wurde. Es stellte sich heraus, dass nach jedesmaligem Abschleifen das Potential bedeutend in die Höhe gegangen war, allerdings konnte ein konstanter Wert nach dieser Methode nicht erhalten werden. Unsere Messungen ergaben Zahlen, die zwischen — 0,2 und einer höchsten Grenze schwankten, welche bei + 0,21 für Nickelsulfat und + 0,51 für Kaliumchlorid liegt. Bei wiederholten Versuchen bemerkten wir sehr bald, dass der Wert um so niedriger ausfiel, je längere Zeit verging zwischen dem Abreiben der Oberfläche und der Messung. Wir haben deshalb diese Zeit möglichst abgekürzt, in der Weise, dass die Drehbank direkt neben dem Messapparat aufgestellt und der Nickelstab nach dem Abschleifen mit möglichster Beschleunigung in den Elektrolyten hineingebracht wurde. Auf diese Weise erhielten wir die oben angegebenen höchsten Werte. Lässt man den frisch abgeschmirgelten Nickelstab auch nur eine halbe Minute in der Luft verweilen, so ist sein Potential sehr bedeutend gesunken und zwar im allgemeinen um etwa 0,3 Volt. Die Tatsache, welche wir beim Chrom und Niob festgestellt haben, gilt also auch für das Nickel:

Die Luft ist ein ausserordentlich energisch und rapide wirkendes Passivierungsmittel.

Eine Beobachtung, die wir bei unseren Versuchen häufig machten und noch nicht vollständig aufgeklärt ist, möchten

wir an dieser Stelle ebenfalls erwähnen. Die Geschwindigkeit, mit der die Luft passivierend wirkt, ist ausserordentlich verschieden und hängt von Umständen ab, die wir noch nicht völlig feststellen konnten. Soviel können wir indessen sagen, dass das Nickel in reiner, trockener Luft, bei hohem Barometerstand viel länger aktiv bleibt, als in feuchter Luft bei tiefem Barometerstand. Wir haben an klaren, kalten Wintertagen etwa eine Minute nach dem Abschleifen noch häufig ein Potential von über 0,2 Volt gegen Normal-Chlorkaliumlösung gemessen, während an Gewittertagen eine Aktivierung durch Abschleifen scheinbar überhaupt nicht möglich war und zwar aus dem Grunde, weil man das abgeschliffene Stück nicht schnell genug in den Elektrolyten hineinbringen kann. Wir sind zur Zeit mit Versuchen beschäftigt, die Aufklärung darüber geben sollen, inwiefern die Geschwindigkeit der Passivierung durch den Luftsauerstoff mit dem Zustande der Luft zusammenhängt.

Was wir oben vom Nickel gesagt haben, gilt unitatis mutandis auch für die beiden anderen Metalle der Gruppe. Ein sehr reines, nach der Methode von Goldschmidt dargestelltes Eisen zeigte eine überaus grosse Luftempfindlichkeit. Die Potentialwerte, die wir mit diesem Material erhielten, waren dieselben, welche an einem Stahlstab beobachtet wurden. Der Kohlenstoff des Eisens beeinflusst also nicht die Potentialwerte wohl aber die Beständigkeit derselben, was übrigens auch schon von früheren Beobachtern festgestellt wurde.[1]) Ein blanker Stahlstab zeigt nach längerem Liegen an der Luft ein Potential von + 0,01 Volt. Durch Abschleifen konnten wir dieses Potential auf + 0,25 Volt in die Höhe bringen. Diese Messungen erfolgten gegen normale Ferrosulfatlösung; da der Stahl seinen Zustand länger beibehält als das Nickel, so sind die Messungen hier leicht auszuführen.

Wir möchten vorschlagen, diejenigen Potentialsprünge, auf welche sich die Metalle beim Liegen an der Luft einstellen, die „Luftpotentiale“ zu nennen und wir werden uns dieses Aus-

[1]) Zeitschr. für Elektrochemie, Bd. IX, 1903, S. 442.

drucks auch im folgenden bedienen. Diese wichtigen Werte stellen sich übrigens nicht nur in Luft, sondern vielfach in Flüssigkeiten ein, welche Luft gelöst enthalten. Sie sind nicht völlig, doch ziemlich konstante Grössen, die mit der Oberflächenbeschaffenheit der Metalle und der Beschaffenheit der Luft etwas variieren. Die Schwankungen bei den Luftpotentialen sind natürlich um so grösser, je leichter sich die betreffenden Metalle aktivieren oder passivieren lassen. Wir werden weiter unten darauf bezügliche Zahlenwerte bringen.

Wie bei den schon beschriebenen Metallen, haben wir kein Mittel unversucht gelassen, die höchsten, also die dem wahren Lösungsdruck entsprechenden Potentialsprünge zu erhalten. Die besten Resultate erhielten wir auf folgende Weise: Es wurden Platinspitzen oder Stäbe der betreffenden Metalle in einer Sulfatlösung nach den Vorschriften der Elektroanalyse mit einer Metallschicht überzogen, dann sorgfältig abgespült und in sehr reines Wasser gehängt, in dem sich ausserdem eine Platinelektrode befand. Die Aktivierung geschah nun in der Weise, dass unter Benutzung des Metalles als Kathode und des Platins als Anode ein Strom hindurchgeschickt wurde, derart, dass soeben das Auftreten von Glasbläschen zu beobachten war. Die dazu aufgewendete Spannung betrug 60 Volt, die Stromstärke weniger als 1 Milli Ampère. Nach 30 Minuten langer Elektrolyse wurden dann die Potentialsprünge möglichst schnell gemessen. Die Verwendung reinen Wassers hat den Vorteil, dass man die Metalle nach dem Aktivieren nicht abzuspülen braucht, und dadurch der Zeitraum zwischen Aktivieren und Messen ein sehr kleiner wird. Die durch zahlreiche Versuche auf diese Weise erhaltenen höchsten Werte waren folgende:

$$Fe | FeSO_4 = + 0{,}38 \text{ Volt}$$
$$Ni | NiSO_4 = + 0{,}32 \text{ „}$$

Es liegt natürlich der Gedanke nahe, dass bei diesem Potentialwert der Wasserstoff eine Rolle spielt. Dagegen spricht jedoch, dass die Differenz zwischen diesen Werten und den durch mechanische Reinigung erhaltenen höchsten Werten bei beiden Metallen so ziemlich dieselben und nicht sehr gross sind. Würde

hingegen der Wasserstoff bei der Ausbildung dieser hohen Potentiale eine Rolle spielen, so müsste der Potentialsprung von der Natur des Metalles bis zu einem gewissen Grade unabhänging sein, was offenbar nicht der Fall ist. Doch dürfte es kaum möglich sein, durch Wasserstoffbeladung so hohe Potentiale zu erzielen, wie das bei uns der Fall war. Eine platinierte Platinspitze stellte sich bei gleicher Behandlung maximal auf ein Potential von — 0,32 Volt ein.

Fällt die Aktivierung in destilliertem Wasser aus, d. h. bringt man die frisch niedergeschlagenen Metalle sofort zur Messung, so bekommt man Zahlen, die nur wenig unter den oben angegebenen liegen. Wir haben unsere zwei Metalle in den Sulfatlösungen mit frischen Metallschichten elektrolytisch überzogen unter Anwendung einer Spannung von 8 Volt und dann sofort gegen neutrale Sulfatlösung gemessen. Die Werte waren folgende

$$Fe \mid FeSO_4 = + 0{,}34$$
$$Ni \mid NiSO_4 = + 0{,}29.$$

Diese Werte liegen also den oben angegebenen sehr nahe. Da wir durch zwei ganz unabhängige Methoden zu denselben Zahlen für die wahren Potentialsprünge von Eisen und Nickel gekommen sind, so dürften die bis jetzt angegebenen Zahlen durch unsere Potentiale zu ersetzen sein, mit dem Vorbehalt jedoch, dass jene Zahlen Minima sind und dass es nicht ausgeschlossen erscheint, dass die wahren Werte um einige hundertel Volt höher liegen.

Das Kobalt verlangt eine besondere Beschreibung, da bei diesem Metall diese Methoden zur Erreichung des höchsten Potentiales scheiterten, weil es zu empfindlich gegen die Luft ist und nach der Aktivierung bei Gegenwart von freiem Sauerstoff das wahre Potential fast momentan auf das Luftpotential zurückgeht. Nach dem Aktivieren in reinem Wasser kamen wir auf einen Potentialsprung von + 0,07 und denselben Wert erhielten wir auch, als bei einer Spannung von 8 Volt ein Kobaltstab in einer Kobaltsulfatlösung elektrolytisch überzogen und dann sofort gegen normales Kobaltsulfat gemessen wurde.

Durch Abschleifen eines Kobaltstabes, der zunächst ein Luftpotential von – 0,24 Volt zeigte, kamen wir nur zu einem Potentialsprung von — 0,01 Volt, der beim Liegen an der Luft nach wenigen Sekunden wieder auf – 0,2 Volt zurückgegangen war. Alle Werte von Kobalt sind offenbar viel zu niedrig, sie liegen unter dem von Le Blanc angegebenen von + 0,17 Volt, während unsere für Eisen und Nickel erhaltenen höchsten Werte weit über denjenigen liegen, die nach der Le Blanc'schen Methode zu erhalten sind. Wir haben um diese scheinbaren Anomalien aufzuklären auch genau nach der Vorschrift von Le Blanc gearbeitet, die bekanntlich darin besteht, dass man eine normale Sulfatlösung bei der Zersetzungsspannung eine Zeit lang elektrolysiert und sodann ohne Unterbrechung des Stromes den Potentialsprung des kathodisch niedergeschlagenen Metalles misst. Bei Eisen und Nickel erhält man auf diese Weise äusserst schwankende Werte, der beim letzten Metall erhaltene höchste Wert betrug + 0,23 Volt und bei Kobalt erhielten wir + 0,17, welch letztere Zahl mit dem Le Blanc'schen Wert übereinstimmt. Es ist auffallend, dass die Le Blanc'sche Methode, die bei anderen Metallen so vorzügliche Dienste leistet, in der Eisengruppe versagt. Der Grund dafür liegt in einer passivierenden Wirkung der Schwefelsäure, welche beim Arbeiten nach Le Blanc, immer, wenn auch nur in kleiner Menge entsteht. Wir werden darauf bald zu sprechen kommen. Bis auf weiteres ist für das Kobalt der Le Blanc'sche Wert von + 0,17 Volt als der richtigste anzunehmen, weil er der bis jetzt erreichte Maximalwert für Kobalt ist.

Dass freie Schwefelsäure den Potentialsprung der Metalle der Eisengruppe herunterdrückt, ist eine Tatsache, die wir uns nicht erklären können; dasselbe findet übrigens auch bei Molybdän, Wolfram, Vanadin und Niob statt, nur Chrom bildet eine Ausnahme. Man kann diese Wirkung der Schwefelsäure leicht in der Weise demonstrieren, dass man nach der Messung des Potentialsprunges von aktivem Nickel dem Elektrolyten einen Tropfen Schwefelsäure zusetzt. Das Potential geht dann momentan um mehrere Zehntel Volt zurück. Die Potentialsprünge

unserer Metalle gegen verdünnte Schwefelsäure tragen den Charakter von Oxydationspotentialen, wie aus folgenden Messungen hervorgeht, denen wir zum Vergleich noch die Werte hinzufügen, welche gegen denselben Elektrolyten für Mangan, Zink und Platin erhalten wurden:

Eisen	+ 0,03;	Nickel	— 0,25;	Kobalt	— 0,15
Mangan	+ 0,58;	Zink	+ 0,58;	Platin	— 1,6

gegen 16 % Schwefelsäure.

Diese Werte gewinnen an Interesse, wenn man sie vergleicht mit anderen Zahlen, die direkt gegen das betreffende Agens gemessen wurden. Wir haben eine Reihe von derartigen Messungen in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Tabelle Nr. 17 a.

Metall	KOH (1 : 3)	H_2CrO_4 30 %	H_2SO_4 10 %	HNO_3 34 %
Eisen	— 0,2	— 1,45	+ 0,03	— 0,61
Nickel	— 0,13	— 1,27	— 0,25	— 0,50
Kobalt	— 0,25	— 0,73	— 0,15	— 0,50
Mangan	— 0,25	+ 0,29	+ 0,58	+ 0,27
Kupfer	— 0,08	— 0,86	—	—
Aluminium	+ 1,17	— 0,36	—	—
Zink	+ 1,03	+ 0,14	+ 0,51	+ 0,37
Platin	+ 0,04	— 1,49	— 1,6	—

Tabelle Nr. 17 b.

Metalle	Anodisch gegen KCg (4 Volt)	Anodisch gegen KSN (4 Volt)	Anode in HCl
Eisen	— 1,52	— 0,23	— 1,25
Nickel	— 1,66	— 0,68	— 0,60
Kobalt	— 1,56	— 0,46	— 0,62
Mangan	—	+ 0,32	—
Zink	+ 0,03	+ 0,03	—

Diese Messungen wurden hauptsächlich deshalb ausgeführt, weil von Fredenhagen vorgeschlagen worden ist, bei der Beurteilung der Passivierbarkeit direkt gegen die betreffenden Agentien zu messen. Es hat sich aber herausgestellt, dass diese Methode nicht gestattet Schlüsse über den Grad der Passivierbarkeit zu ziehen, ja, dass sie sogar manchmal in rein qualitativer Hinsicht versagt. Wir möchten bei dieser Gelegenheit hervorheben, dass das Charakteristikum des passiven und aktiven Zustandes darin liegt, dass derselbe eine Zeit lang andauert und darüber geben Messungen nach Fredenhagens Vorschlag naturgemäss keinen Aufschluss. Auch Metalle von unveränderlichem Potential, wie das Zink, zeigen selbstverständlich gegen verschiedene Agentien ganz verschiedene Werte, weil die Oxydations- bezw. Reduktionspotentiale hier mit in die Erscheinung treten. Wir haben, wie man sieht, auch das Mangan mit in die Tabelle aufgenommen, das uns in einem sehr reinen Stück zur Verfügung stand. Dasselbe verhält sich im Allgemeinen dem Zink analog, es gehört zu den Metallen von unveränderlichem Potential und sein Potentialsprung gegen normal Manganchlorid beträgt + 0,82 Volt. In den nachfolgenden Tabellen endlich geben wir eine Reihe von Potentialmessungen, welche nach der Behandlung mit verschiedenen Agentien gegen Normallösungen der betreffenden Metallsulfate erhalten wurden.

Tabelle Nr. 18.

Eisen | Eisensulfat. Luftpotential = + 0,01.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
+ 0,01	Kathode in Kalilauge	10 Min.	— 0,06
— 0,06	Konzentrierter Chromsäure	3 Tage	— 0,03
+ 0,01	Anode in Rhodankali	5 Min.	— 0,01
— 0,03	„ „ Cyankali	5 „	— 0,06
+ 0,01	Kalilauge 25 %	20 „	— 0,06
+ 0,35	Elektrolytisch überzogenes Fe Anode in KOH	5 „	— 0,06
—	„ „ destill. H_2O (60 Volt)	30 „	— 0,16

Tabelle Nr. 19.

Nickel | Nickelsulfat. Luftpotential — 0,26.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,26	Kathode in Kalilauge	4 Min.	— 0,13
— 0,13	Konzentrierter Chromsäure	18 Stund.	— 0,62
— 0,14	Anode in Rhodankali	3 Min.	— 0,20
— 0,20	„ „ Cyankali	3 „	— 0,21
—	Elektrolyt. überzogenes Nickel Anode in dest. Wasser (60 Volt)	30 „	— 1,43

Tabelle Nr. 20.

Kobalt | Kobaltsulfat. Luftpotential — 0,24.

Potentialsprung vor dem Versuch	Behandelt mit	Zeit	Potentialsprung nach dem Versuch
Volt			Volt
— 0,24	Kathode in Kalilauge	4 Min.	— 0,04
— 0,22	Konzentrierter Chromsäure	18 Stund.	— 0,35
— 0,29	Anode in Rhodankali	3 Min.	— 0,17
— 0,30	„ „ Cyankali	3 „	— 0,20
— 0,23	„ „ dest. Wasser (60 Volt)	30 „	— 0,20 } elektrolyt. gefälltes Kobalt
— 0,25	„ „ Kalilauge	30 „	— 1,02 } elektrolyt. gefälltes Kobalt

Zu diesen Tabellen ist wenig zu bemerken. Die anodische Behandlung in Kalilauge hat zur Folge, dass die Metalle sehr niedere Potentiale annehmen. Auf das anodische Verhalten in destilliertem Wasser werden wir weiter unten zurückkommen.

Überblicken wir die oben geschilderten Beobachtungen, so kommen wir zunächst zu dem Schluss, dass eine Passivierung nur dann stattfindet, wenn in irgendwelcher Form Sauerstoff zugegen ist und als besonders wertvolle Erkenntnis betrachten wir die Tatsache, dass auch der zweiatomige Sauerstoff, sowohl in gasförmigem Zustande als auch in gelöster Form passivierend wirkt. Zweifellos muss man demnach den Sauerstoff als die

Ursache der Passivität der Metalle betrachten und es fragt sich nur noch, in welcher Weise dieses Element die besprochenen eigentümlichen Erscheinungen hervorruft. Die älteste Hypothese, welche eine schützende Oxydhaut annimmt, ist ohne weiteres zu verwerfen. Eine solche Oxydhaut müsste, wie schon eingangs bemerkt, höchst merkwürdige Eigenschaften besitzen. Ein Umstand, der die Annahme einer Oxydhaut direkt widerlegt, ist das Verhalten der Metalle gegen Luft. Ein passives Metall stellt sich an der Luft auf einen mittleren Wert, d. h. auf sein Luftpotential ein; man müsste also annehmen, dass jene hypothetische Oxydhaut durch den Luftsauerstoff teilweise reduziert würde oder auf irgend eine andere Weise ihre Eigenschaften teilweise einbüssen müsste, was doch im höchsten Grade unwahrscheinlich ist. Auch Hittorf hat schon eine Reihe von Gründen angeführt, die gegen die Annahme einer Oxydhaut sprechen.

Fredenhagen hat das Problem der Passivität des Eisens auf dasjenige der Ausbildung von Gasbeladungen an angreifbaren Elektroden zurückzuführen versucht. Er hat eine Eisenspitze in Schwefelsäure, ferner auch in Salpetersäure anodisch polarisiert unter Einschaltung steigender Polarisationsspannungen und gleichzeitiger Messung der Stromstärke zwischen Eisenanode und platinierter Platinkathode sowie der Potentialsprünge der polarisierten Eisenanode gegenüber der Kalomelelektrode. Er fand dabei sehr interessante Kurvenbilder und konnte feststellen, dass von einem gewissen Potential der Eisenelektrode (von — 0,28 Volt) ab, die Stromstärke ziemlich plötzlich auf 0 herabsinkt und der noch bestehende Reststrom allein durch Abscheidung von Anionen der Säure erhalten wird. Eisenionen gehen nicht mehr in Lösung, die Elektrode ist unangreifbar geworden durch die anodische Polarisation.

Fredenhagen kommt also zu dem Schluss, dass es sich bei der Passivität um eine Gasbeladung handelt (in der verdünnten Schwefelsäure um eine Sauerstoffbeladung). Er konstatiert auch für das Wesen des passiven Zustandes in Salpetersäure eine Gasbeladung und zwar schloss er auf Beladung mit Stickoxyden

und erklärte sich daraus das verschiedene Verhalten von in Schwefelsäure und in Salpetersäure passiviertem Eisen. Heathcote zeigte, dass in Salpetersäure passiviertes Eisen diesen Zustand längere Zeit behält. Fredenhagen stellte fest, dass eine passive Eisenanode in dem Moment, wo sie aus der Schwefelsäure genommen wird, in den aktiven Zustand übergeht und folgerte hieraus, dass die in Salpetersäure bezw. Schwefelsäure erzielte Passivität wesentlich verschieden ist. — Dieses momentane Aktivwerden der passiven Eisenanode beim Herausnehmen aus der Schwefelsäure rührt aber nach unseren Untersuchungen von der aktivierenden Wirkung der hängenbleibenden Schwefelsäure her, die man nicht schnell genug wegspülen kann. Ein in Salpetersäure passiviertes Eisen verliert seine Passivität ebenso schnell, wenn es einen Moment in verdünnte Schwefelsäure gebracht wird. Die Natur der Passivität ist in beiden Fällen sicher die gleiche, wenn auch der Grad und die Beständigkeit etwas verschieden sein mögen.

Die Vorstellung, welche wir uns über die Rolle machen, die der Sauerstoff bei der Passivierung spielt, kommt derjenigen Fredenhagens sehr nahe; doch möchten wir dieselbe mit Rücksicht auf die passivierenden Eigenschaften der Luft etwas modifizieren. Man kommt einer plausiblen Erklärung wohl am nächsten, wenn man annimmt, dass der Sauerstoff sich in dem passiven Metall direkt auflöst, so dass man also ein passives Metall zu betrachten hätte als eine Auflösung von Sauerstoff in dem betreffenden Metall. Es lässt sich für diese Ansicht sehr vieles anführen. Der Grad der Passivität muss abhängen von der Menge des Sauerstoffes, welcher im Metall gelöst ist und diese wiederum ist eine Funktion des Druckes, unter dem der Sauerstoff in das Metall hineingetrieben wird. Daraus erklärt sich ungezwungen das verschiedenartige Verhalten ein und desselben Metalles gegen verschiedene Oxydationsmittel, die ja nach Nernsts Vorstellung den Sauerstoff unter sehr verschiedenen Drucken auf andere Substanzen übertragen. Der in Metall gelöste Sauerstoff verhindert das Austreten der Metallionen in den Elektrolyten, wirkt also dem Lösungsdruck ent-

gegen. Man kann sich den Sauerstoff in gewöhnlicher Form oder ionisiert im Metall denken und kann schliesslich das Potential des passiven Metalles betrachten als ein Legierungspotential, das bei gewissen Konzentrationen dem Potential des reinen Sauerstoffes sehr nahe kommen muss. Solche Sauerstoff-Metalllegierungen sind mit den Superoxyden zu vergleichen, die auch ein sehr niedriges Potential zeigen; die Kette passives Niob | Elektrolyt | aktives Niob zeigt in ihrem Verhalten grosse Ähnlichkeit mit der Kette Bleisuperoxyd | Elektrolyt | Blei. Wir wollen uns auf nähere Erklärungen nicht einlassen, weil Versuche im Gange sind, die Aufklärung geben sollen. Man könnte zu der Annahme hinneigen, dass der aktive Zustand der Metalle durch eine Wasserstoffbeladung, ganz ähnlich wie der passive Zustand durch den Sauerstoff bedingt wird. Dem widerspricht aber der Umstand, dass die durch Abschmirgeln gereinigten Metalloberflächen Potentiale zeigen, welche nur wenig verschieden sind von den durch kathodische Polarisation erreichten höchsten Werten. Es bilden sich zwar in letzterem Falle Wasserstoffbeladungen auf der Metalloberfläche aus, die aber das Potential weder bedingen noch beeinflussen. Nur der Sauerstoff scheint befähigt zu sein, modifizierend auf das Potential der untersuchten Metalle einzuwirken. Die von Hittorf hervorgehobene Tatsache, dass im passiven Zustande beim Lösungsprozess die Metalle ihre höchste Oxydationsstufe bilden, dürfte auch mit der Aufnahmefähigkeit derselben für den Sauerstoff zusammenhängen. Schliesslich erklärt diese Hypothese auch die Beobachtung, dass die Metalle vom aktiven Zustand aus sich viel schneller auf das Luftpotential oder auf den „mittleren Wert“, wie Hittorf sich ausdrückt, einstellen, als vom passiven Zustand aus. Die Bildung einer Metallsauerstofflegierung erfolgt an der Luft sehr schnell, während der durch ein Oxydationsmittel unter hohem Druck in das Metall hineingepresste Sauerstoff nur langsam wieder abgegeben wird.

Interessante Zahlen erhielten wir dadurch, dass wir unsere Metalle kathodisch und anodisch in destilliertem Wasser bei einer Spannung von 60 Volt behandelten. In untenstehenden

zwei Tabellen sind die Potentialwerte aufgeführt, welche sich nach einer Behandlungsdauer von 30 Minuten ausgebildet hatten.

Tabelle Nr. 21.

Gemessen gegen normal Chlorkalium.

Kathodisch		Anodisch	
Chrom	= + 0,02	Chrom	= — 1,26
Wolfram	= + 0,42	Wolfram	= — 0,97
Molybdän	= + 0,36	Molybdän	= — 0,76
Niob	= + 0,49	Niob	= — 1,01
Vanadin	= + 0,43	Vanadin	= - 0,67

Tabelle Nr. 22.

Gemessen gegen die normalen Sulfatlösungen.

Kathodisch		Anodisch	
Eisen	= + 0,38	Eisen	= — 0,16
Nickel	= + 0,32	Nickel	= — 1,43
Kobalt	= + 0,07	Kobalt	= - 0,20

Wie man sieht, erreicht man durch die kathodische Behandlung in allen Fällen sehr hohe Potentiale; die anodische hat energische Passivierung zufolge, ausgenommen indessen bei Kobalt, dessen Luftpotential auf diese Weise kaum heruntergedrückt werden kann. Der Grund dafür lässt sich darin suchen, dass das Kobalt bei dieser Behandlung als Hydroxyd gelöst wird. Der Sauerstoff, der sich anodisch abscheidet, wird nicht vom Metall gelöst, sondern tritt sofort in Reaktion. Man erhält beim Kobalt durch anodische Behandlung in destilliertem Wasser keine Sauerstoffbeladung. Ganz anders verhält sich das Kobalt merkwürdigerweise gegen Kalilauge. Polarisiert man elektrolytisch überzogenes Kobalt anodisch in Kalilauge mit einer Spannung von etwa 4 Volt, spült sorgfältig ab und misst dann gegen normale Kobaltsulfatlösung, so kann man beim raschen Arbeiten eine Spannung von — 1,02 Volt messen, also ein Potential erhalten, das vom tiefsten Potential des Nickels

nur wenig verschieden ist. Eine sichere Erklärung für dieses verschiedenartige Verhalten des Kobalt gegen Wasser und Kalilauge fehlt uns vorläufig noch. Eisen und Nickel verhalten sich gegen beide Elektrolyten vollständig gleichartig.

Zum Schlusse möchten wir noch in einigen Tabellen die wichtigsten der erhaltenen Resultate übersichtlich zusammenstellen, sowie die von uns gefundenen Resultate in kurzen Worten zusammenfassen.

In Tabelle Nr. 23 und 24 haben wir die Luftpotentiale, sowie die höchsten und tiefsten Potentiale der untersuchten neun Metalle zusammengestellt. Tabelle Nr. 25 endlich enthält Anhaltspunkte über die Geschwindigkeit, mit der einige der beschriebenen Metalle ihr Potential beim Liegen an der Luft verändern.

Tabelle Nr. 23.

Gemessen gegen normale Chlorkaliumlösung.

Metalle	Luft-potential	maxim. aktives Potential	Art der Behandlung	maxim. passives Potential	Art der Behandlung
Chrom	— 0,24 — 0,43 — 0,36	+ 0,35	Kathode in stark gekühlt. Kalilauge	— 1,47	Konzentr. Chromsäure
Molybdän	— 0,54 — 0,26	+ 0,46	Kathode in stark gekühlt. Kalilauge	— 0,94	Konzentr. Chromsäure
Wolfram	— 0,63 — 0,25	+ 0,42	Kathode in reinem Wasser	— 1,16	Konzentr. Chromsäure
Niob	— 0,13 — 0,44	+ 0,77	Konzentr. Kalilauge	— 1,68	Konzentr. Chromsäure
Vanadin	— 0,41	+ 0,46	Kathode in Kalilauge	— 0,92	Anode in Chromsäure
Ruthenium	— 0,66	— 0,35	Kathode in Zitronensäure	— 1,21	Rauchende Salpetersäure

Tabelle Nr. 24.

Gemessen gegen die normalen Sulfatlösungen.

Metalle	Luft-potential	maxim. aktives Potential	Art der Behandlung	maxim. passives Potential	Art der Behandlung
Eisen	+ 0,01	+ 0,38	Kathode in destill. H_2O	— 0,16	Anode in destill. Wasser
Nickel	— 0,26	+ 0,32	Kathode in destill. Wasser	— 1,43	Anode in destill. Wasser
Kobalt	— 0,24	+ 0,17	nach Le Blanc	— 1,02	Anode in Kalilauge

Tabelle Nr. 25.

Metalle	Potential	Behandelt mit	Zeit	Potential
	Volt			Volt
Molybdän	— 0,07	Luft	45 Min.	— 0,24
Wolfram	— 1,01	„	2 Tage	— 0,91
Chrom	— 0,86	„	2 „	— 0,39
Ruthenium	— 1,21	„	14 „	— 0,82
Niob	+ 0,05	„	2 „	— 0.07
Niob	+ 0,12	„	14 Std.	— 0,38
Molybdän	+ 0,22	Äther	14 „	— 0,20
Molybdän	— 0,65	„	20 „	— 0,45
Wolfram	+ 0,29	Chloroform	14 „	— 0,19
Chrom	— 1,24	Kupferchloridlösung	5 „	— 1,00
Molybdän	— 0,74	„	5 „	— 0,71
Wolfram	— 0,96	„	5 „	— 0,92
Wolfram	+ 0,34	Flüssiger Luft	4 „	+ 0,2
Wolfram	+ 0,2	Luft	1 „	— 0,15
Chrom (abgeschmirgelt)	+ 0,15	„	2 Min.	— 0,10
Niob „	+ 0,42	„	½ „	+ 0,05
Nickel „	+ 0,21	„	2 „	— 0,25
Nickel (Kathode in H_2O)	+ 0,32	„	5 „	+ 0,02
Nickel (frisch gefällt)	+ 0,29	„	2 Std.	— 0,18
Kobalt „ „	+ 0,07	„	2 „	— 0,13
Eisen „ „	+ 0,34	„	2 „	+ 0,01
Kobalt	— 1,02	„	15 Min.	— 0,49
Vanadin	— 0,56	Wasser von 100°	½ „	— 0,32
Molybdän	+ 0,28	„ „ „	½ Std.	— 0,36
Wolfram	— 0,91	Bromkaliumlösung	40 „	— 0,43
Chrom	+ 0,35	Luft	5 Min.	— 0,03

Zusammenfassung der Resultate.

1. Zu den passivierbaren Metallen gehören, ausser den schon bekannten Eisen, Nickel, Kobalt, Chrom noch die Metalle Molybdän, Wolfram, Vanadin, Niob und Ruthenium. Nicht passivierbar sind Uran und Mangan.

2. Luftsauerstoff wirkt passivierend, wenn auch nicht in dem Grade, wie starke Oxydationsmittel. Alle passivierbaren Metalle nehmen beim Liegen an der Luft Mittelwerte an, die wir Luftpotentiale nennen.

3. Die Passivität ist wahrscheinlich bedingt durch in dem betreffenden Metall aufgelösten Sauerstoff.

4. Die höchsten aktiven Potentialwerte erhält man durch Messen an Metalloberflächen, die durch mechanisches Abschleifen oder durch chemische Mittel von Sauerstoff möglichst befreit worden sind. Diese höchsten Werte liegen also dem wahren Potential des Metalls am nächsten.

5. Eine Wasserstoffbeladung wirkt konservierend auf das aktive Potential, ohne dasselbe zu bedingen oder zu beeinflussen.



Öffentliche Sitzung

zur Feier des 145. Stiftungstages

am 14. März 1904.

Der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. Karl Th. v. Heigel, eröffnete die Sitzung mit einer Rede „zum Andenken an Karl v. Zittel", welche in einer besonderen Schrift der Akademie erschienen ist.

Sodann machte der Präsident folgende geschäftliche Mitteilungen:

Aus unseren Stiftungen konnten eine Reihe wissenschaftlicher Unternehmungen unterstützt und angeregt werden.

So wurden aus der Cramer-Klett-Stiftung und der Münchener Bürgerstiftung bewilligt:

1. 2500 M. für eine Informations- und Sammelreise des Garteninspektors Bernhard Othmer nach Westindien;

2. 2500 M. für eine zoologische Studienreise des zweiten Konservators der zoologischen Staatssammlungen Dr. Doflein in das Gebiet des nördlichen und mittleren Stillen Ozeans. Zu den Kosten dieser Reise hat ihm ausserdem Se. Kgl. Hoheit der Prinz-Regent allergnädigst einen erheblichen Beitrag bewilligt. Ferner haben die Herren Direktoren der Ludwigshafener Farbwerke, Kommerzienräte Brunck und Glaser, Geh. Kommerzienrat R. Siegle in Stuttgart, Reichsrat Graf Moy in München durch Zeichnung von namhaften Summen sich beteiligt; auch sind noch weitere Zuwendungen zu erwarten.

Aus der Königs-Stiftung für chemische Forschungen wurden zu Studienzwecken verliehen:

1. dem Privatdozenten an der Technischen Hochschule Dr. Emil Baur (München) zu Untersuchungen über die Bildung der Tiefengesteine und der kontaktmetamorphen Gesteine 500 M.;

2. Professor Dr. Oskar Piloty (München) zur Fortsetzung der Untersuchungen über das Murexid und andere Harnsäurederivate sowie über Derivate des vierwertigen Stickstoffs 300 M.;

3. Professor Dr. Karl Hofmann (München) zur Anschaffung von Präparaten aus Pechblende 100 M.

Der Sekretär der mathematisch-physikalischen Klasse, Herr C. v. Voit teilt mit, dass die mathematisch-physikalische Klasse (am 5. Januar 1904) ihr ordentliches Mitglied Karl Alfred v. Zittel durch den Tod verloren hat; seine Verdienste um die Wissenschaft werden in einer besonderen Gedächtnisrede gewürdiget werden.

Von den korrespondierenden Mitgliedern der Klasse sind im vergangenen Jahre vier gestorben:

der Physiker Josiah Willard Gibbs in New-Haven, am 28. April 1903;

der Mathematiker Luigi Cremona in Rom, am 10. Juni 1903;

der Anatom Karl Gegenbaur in Heidelberg, am 14. Juni 1903;

und der Physiologe Alexander Rollett in Graz, am 1. Oktober 1903.

Hierauf hielt das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse, Herr Professor Dr. Alfred Pringsheim, die Festrede: „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.“

Josiah Willard Gibbs.[1])

Dem am 28. April 1903 im Alter von 65 Jahren gestorbenen Professor der mathematischen Physik an der Yale Universität in New Haven, Josiah Willard Gibbs, verdankt die Wissenschaft Entdeckungen ersten Ranges in der theoretischen Physik und auch in der reinen Mathematik; er galt darin nach dem Urteile amerikanischer Gelehrter als der Höchststehende von allen lebenden Amerikanern.

Er war am 11. Februar 1839 in New Haven als der Sohn des ausgezeichneten Professors der Theologie an der Yale Universität Willard Gibbs geboren. Den ersten Unterricht empfing er an der Hopkins Grammar School in New Haven; dann am Gymnasium, an dem er wegen seiner Tüchtigkeit vielfach durch Preise belohnt wurde. Im Jahre 1863 erwarb er den Doktorgrad an der Yale Universität und verblieb dann bis zum Jahre 1866 in New Haven, woselbst er Lehrer am Yale Kollege wurde und sich zugleich emsig mit mathematischen und anderen Studien beschäftigte. Er besuchte darauf die Universitäten zu Paris, Berlin und Heidelberg, um sich noch weiter in der Physik und auch in der Mathematik auszubilden. Nach einem Aufenthalte von $3^1/_2$ Jahren in Europa kehrte er mit allem Wissen in seinem Fache ausgerüstet in die Heimat zurück.

Man erkannte dorten den Wert des jungen Gelehrten und wählte ihn 1871 zum Professor der mathematischen Physik an der Yale Universität zu New Haven; als solcher hat er die Wissenschaft mit seinen hervorragenden Untersuchungen bereichert.

---

[1]) Mit Benutzung des Nachrufs im Yale Alumni Weekly, 1903. 12. Nr. 31; deutsch in Zeitschrift für physikalische Chemie 1903, Bd. 44, S. 1.

Am meisten bekannt ist er durch seine meisterhaften Arbeiten in der Thermodynamik geworden, worin er in der Tat Werke von unvergänglichem Werte geschaffen hat.

Schon seine erste Abhandlung über graphische Methoden in der Thermodynamik der Flüssigkeiten (1873), mit der er seinen ersten Beitrag zur mechanischen Wärmetheorie lieferte, erwies sein ungewöhnliches Vermögen der Verallgemeinerung. Die zweite gleich darauf folgende Abhandlung: „Eine Methode zur geometrischen Darstellung der thermodynamischen Eigenschaften der Stoffe mittelst Flächen" rief das grösste Interesse der Fachgenossen hervor. Die bedeutendste ist die berühmt gewordene dritte grosse Monographie über „Das Gleichgewicht heterogener Stoffe", welche in zwei Teilen in den Jahren 1876 und 1878 in den Transactions of the Connecticut-Academy erschien. In dieser Arbeit sind die Prinzipien der Thermodynamik in allgemeiner und umfassender Weise auf die Gleichgewichtsbedingungen chemischer Verbindungen und physikalischer Mischungen in analytischer Form angewendet. Dieselbe ist der Ausgangspunkt der jetzigen, so viel betriebenen physikalischen Chemie geworden und sie bildet noch immer mit ihrer Fülle von Ergebnissen eine Fundgrube neuer Gesichtspunkte für den theoretischen und experimentellen Physiker; so manche in den letzten Dezennien von verschiedenen Forschern gefundene wichtige thermodynamische Beziehung auf physikalisch-chemischem und rein physikalischem Gebiete ist bereits in jener, früher etwas schwer zugänglichen und deshalb weniger bekannten Schrift teils explizite, teils implizite zu finden. Man kann sagen, dass Gibbs darin einen guten Teil der heutigen physikalischen Chemie durch seinen scharfen Verstand und seine wissenschaftliche Divinitionsgabe vorauserkannte. Die drei thermodynamischen Abhandlungen sind von Ostwald in Leipzig als „thermodynamische Studien" ins Deutsche übertragen worden; sie sichern Gibbs einen Ehrenplatz für alle Zeiten in der Thermodynamik.

Gibbs wandte sich nun noch einem anderen Gebiete zu, dem der reinen Mathematik, in welchem er nicht mindere Er-

folge erzielte wie in der Thermodynamik. Es handelte sich dabei insbesondere um das Problem der multiplen Algebra, welches vorher schon von anderen Mathematikern behandelt worden war. Gibbs verfolgte dasselbe weiter und kam dabei zu seiner berühmten und fruchtbaren Vektoranalysis. Nachdem er (1878) die Grundlage dieser Lehre entwickelt hatte, wendete er dieselbe mit grossem Geschick auf andere Gegenstände an. Er benützte sie zunächst für die Bahnberechnung der Planeten und Kometen, indem er die früheren Verfahren durch eine Methode ersetzte, welche bei ausserordentlicher Genauigkeit rechnerisch viel einfacher ist und einer weitreichenden Verallgemeinerung sich fähig erweist; die Abhandlung wurde von dem Astronomen Klinkerfuss in Göttingen ins Deutsche übersetzt. — In den Jahren 1882—1889 schrieb er ferner vier Abhandlungen, in denen die Vektoranalysis auf die elektromagnetische Theorie des Lichtes von Maxwell Verwertung fand. Er schuf dadurch der letzteren Theorie eine sichere Grundlage, fand damit eine Erklärung der Farbenzerstreuung und zeigte, dass nach derselben die Lichtbrechung in kristallisierten Körpern der Konstruktion von Fresnel folgen müsste, was später durch genaue Messungen bestätigt wurde; auch gab er eine lehrreiche Vergleichung der elektromagnetischen Theorie des Lichtes mit den älteren Theorien desselben. Es folgten dann noch weitere Anwendungen auf die Kristallographie, auf die Störungsrechnung und auf die Theorie der Bivektoren und deren Benützung für die Darstellung der harmonischen Bewegungen. In einer Rede über die multiple Algebra, die er 1886 als Vizepräsident der amerikanischen Association for the Advancement of Science hielt, ist seine Lehre hierüber zusammengefasst.

Sein letztes grösseres Werk war das über die „Elemente der statistischen Mechanik", welches in den Festschriften zur 200 jährigen Feier der Yale Universität enthalten ist. Er gibt darin eine Darlegung der Methoden bei der Untersuchung dynamischer Systeme mit einer sehr grossen Anzahl von Freiheiten; indem er, wie schon andere Forscher, solche Methoden gebrauchte,

um die Thermodynamik auf Mechanik zurückzuführen, eröffnete er zugleich der mathematischen Physik ein neues, fruchtbares Gebiet.

Gibbs begründete (1877) den für die Entwicklung der Mathematik in Nordamerika so erfolgreich wirkenden Yale Mathematical Club, in dem er seine Forschungen zuerst mitteilte; bei dem 20jährigen Jubiläum des Klubs hielt er eine geistreiche Rede „Über Werte“, worin er seine Anschauungen über das Ideal des wissenschaftlichen Forschers darlegte.

Gibbs war ein solches Ideal, soweit es ein Mensch sein kann; die schwierigsten Gegenstände handhabte er mit der grössten Einfachheit und Leichtigkeit und bei der Klarheit seines Denkens traf er immer das Wesen der Sache; stets war er bestrebt bei seinen Arbeiten die Hypothesen auf eine möglichst geringe Anzahl zu reduzieren.

Mit grosser Pflichttreue nahm er sich öffentlichen Institutionen an, so z. B. der Hopkins Grammar School, bei deren Verwaltung er während 22 Jahren tätig war. Für seine älteren Schüler wirkte er durch die ausserordentliche Anschaulichkeit seines Unterrichts in hohem Grade anregend. Er war ausserdem von grosser Anspruchslosigkeit, gegen Jedermann freundlich und hilfsbereit und von edler Gesinnung. Der Yale Universität wird Gibbs, welcher ohne Zweifel einer der geistvollsten Vertreter seiner Wissenschaft gewesen ist, immerdar zum Ruhme und Segen gereichen.

Luigi Cremona.[1])

Von Aurel Voss.

Mit dem am 10. Juni 1903 verstorbenen italienischen Mathematiker Luigi Cremona, der seit 1878 unserer Akademie als auswärtiges Mitglied angehörte, ist ein Forscher dahingegangen, dessen wissenschaftliche Tätigkeit gerade in die Blütezeit der Geometrie fiel, welche durch Poncelet, Chasles, Steiner, Plücker, Möbius und andere vorbereitet, in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch die vereinigten Forschungen der deutschen und englischen Geometer Hesse, Clebsch, Sturm, Nöther, Salmon und Cayley hervorgerufen wurde.

Cremona hat nicht allein mit einzelnen hervorragenden Arbeiten in diese Entwickelung selbst mit eingegriffen; seinem nachhaltigen Einflusse und seiner Individualität ist es auch vorzugsweise zu verdanken, dass gegenwärtig das Studium der projektiven Geometrie auf der umfassendsten wissenschaftlichen Grundlage gerade in Italien zu fruchtbarster Ausbildung gelangt ist.

Cremona, geboren den 7. Dezember 1830 in Pavia, nahm kaum 18jährig schon als begeisterter Anhänger der Erhebung von 1848 an der Verteidigung Venedigs teil. An die Universität Pavia zurückgekehrt, bestand er 1853 das Examen als ingegnere architetto, bald darauf dasjenige für das Lehramt in der Mathematik und Physik. Schon 1860 erhielt er die Professur für höhere Geometrie an der Universität Bologna. Hier entstanden alsbald auch seine bedeutendsten Forschungen.

---

[1]) Benutzt wurden bei der Abfassung dieses Nachrufes ausser der Commemorazione von G. Veronese (Acc. dei Lincei Rend. XII, 5, fasc. 12, 1904) und der dort erwähnten Literatur auch die Druckbogen des durch die Redaktion der Mathematischen Annalen freundlichst überlassenen Berichtes über Cremona von M. Nöther.

Zunächst schloss er sich, doch mit vorwiegend analytischer Tendenz, an die Altmeister der synthetischen Geometrie Chasles und Steiner an; seine ersten Arbeiten beziehen sich auf die Eigenschaften der Raumkurven 3. und 4. Ordnung in ihrer Verbindung mit der Theorie der Büschel und Netze vor Flächen zweiter Ordnung. Inzwischen aber erstreckten seine Studien sich bereits weit tiefer; dies zeigt das 1861 entstandene bekannte und weit verbreitete Werk Introduzione ad una teorica geometrica delle curve piane. Cremona unternimmt es hier, eine einheitliche Darstellung der Theorie der algebraischen Kurven zu geben, soweit dies mittelst des damaligen, vorzugsweise auf Chasles und Jonquières, sowie auf Steiner fussenden Standpunktes möglich war. Den leitenden Faden fand er in der Polarentheorie Steiners und Plückers, und die Art, wie er sein Programm bis ins Einzelne durchführte, ist von der grössten Wichtigkeit für die Entwickelung der projektiven Geometrie selbst geworden. 1866 entstand sein zweites Hauptwerk, die preliminari ad una teoria geometrica delle superficie, welches das scheinbar schwierige Gebiet, auf dem bis dahin fast nur Analytiker ersten Ranges wie Jacobi, Hesse, Clebsch mit Erfolg gearbeitet hatten, meisterhaft zu bewältigen und durchsichtig zu machen versteht. Es gibt, so äussert sich Nöther in seinem in den Mathematischen Annalen erscheinenden Bericht über Cremonas Wirken, kein zusammenfassendes rein geometrisches Werk, das einen grösseren Einfluss auf die Ausbildung und Handhabung der geometrischen Methoden ausgeübt hätte, als Cremonas Schriften über die ebenen Kurven und Flächen.

In dieselbe Zeit fällt nun auch die Arbeit, die mit Cremonas Namen in der Geschichte der Wissenschaft unzertrennlich verbunden bleiben wird: die Lehre von den allgemeinen eindeutig umkehrbaren algebraischen Transformationen zweier Ebenen, dann auch zweier Räume, in einander. Einzelne derselben, wie z. B. die Kollineation, die zu Steiners quadratischer Verwandtschaft erweiterte Theorie der reziproken Radien u. a. m. waren schon länger bekannt; 1859 hatte Jonquières die nach ihm benannte Transformation zur Konstruktion von Raumkurven verwandt;

auch Magnus hatte schon gelegentlich aus quadratischen Transformationen höhere abgeleitet. Aber erst Cremona stellt sich die umfassende Aufgabe, die Eigenschaften dieser Transformationen überhaupt zu erforschen und ihre Bildung aus allgemeinen Gesetzen herzuleiten. Seiner grundlegenden Arbeit aus dem Jahre 1864 folgt dann unter Verwendung zum Teil erweiterter Prinzipien die grosse Untersuchung über die Geometrie auf den Flächen dritten Grades, für die ihm mit R. Sturm zugleich der Steiner'sche Preis der Berliner Akademie zu Teil wurde. So tritt nun Cremona mit den deutschen Mathematikern, namentlich mit A. Clebsch, dessen algebraische Kunst die analytisch-synthetischen Methoden gleichzeitig zur grössten formalen Eleganz ausbildete, in die engste Verbindung; in der Tat begegnen sich häufig die Arbeiten beider in gegenseitiger Ergänzung, so z. B. bei den Untersuchungen über die Abbildung der algebraischen Flächen (1872), und in den Abhandlungen über eindeutige Raumtransformationen (1871/72) sehen wir Cremonas Ideen in Wechselwirkung mit den Arbeiten Cayleys und den bis auf 1869 zurückgehenden Nöthers.

Cremona wirkte seit 1866 mit seinem früheren Lehrer F. Brioschi und F. Casorati an dem Istituto tecnico zu Mailand. Mit Brioschi zusammen führte er auch von 1866—1877 die Redaktion der annali di matematica, bis die Fülle der Arbeit eine erweiterte Redaktion erforderte.

Im Jahre 1873 wurde er als Direktor der Scuola d' ingegneri nach Rom berufen. Infolge der umfassenden Arbeit, die er hier als Organisator, dann auch als Staatsmann fand, tritt seine wissenschaftliche Produktion, die in der Zeit von 1860—72 eine so überaus fruchtbare gewesen war, mehr und mehr zurück. Wir erwähnen noch seine bekannten Lehrbücher, die Elementi di geometria projettiva, Mailand 1873, die Elementi di calcolo grafico, Turin 1874, denen sich 1879 die Abhandlung über die reziproken Figuren in der graphischen Statik anreiht.

Mit dem Jahre 1884 endet die Reihe seiner wissenschaftlichen Veröffentlichungen. An äusseren Ehren hat es Cremona

nicht gefehlt. Er war Mitglied vieler Akademieen, Ehrendoktor von Dublin, Edinburg, Christiania, Ritter des Ordens pour le mérite etc. etc. Auch in seinem Vaterlande wurden ihm die höchsten Auszeichnungen zu Teil. 1879 zum Senatore del regno ernannt, seit 1897 Vizepräsident des Senates, wirkte er als Organisator und Förderer des Unterrichtswesens mit ebensoviel Hingebung als Erfolg. Seiner mit unermüdlichem Eifer inmitten aller dieser Geschäfte verfolgten Lehrtätigkeit nicht zum wenigsten verdankt Italiens geometrische Produktion die führende Stellung, welche sie gegenwärtig einzunehmen berufen erscheint.

Bis in die letzte Zeit seines Lebens blieb er, getreu dem hochherzigen unerschütterlichen Charakter, mit dem er als Jüngling zu den Fahnen des nach Freiheit ringenden Vaterlandes eilte, auf seinem Posten; auch die deutsche Wissenschaft, der er besonders nahe stand, wird seiner stets dankbar gedenken.

Karl Gegenbaur.[1])

Der am 14. Juni 1903 im Alter von nahezu 77 Jahren verstorbene Professor der Anatomie an der Universität Heidelberg, Karl Gegenbaur, wird mit Recht als der bedeutendste Morphologe unserer Zeit, der den grössten Anteil an dem tieferen Verständnis der mannigfaltigen Gestaltungen der Tierwelt gehabt hat, bezeichnet.

Karl Gegenbaur wurde am 21. August 1826 zu Würzburg geboren. Der Vater, ein Beamter von strengen Grundsätzen und grosser Pflichttreue, war zuletzt Rentamtmann in Würzburg; die Mutter, die sich ganz der Erziehung ihrer Kinder hingab, hatte einen lebhaften Sinn für die Natur, namentlich

---

[1]) Mit Benutzung des Nekrologs von Max Fürbringer in der Festschrift der Universität Heidelberg zur Zentennarfeier ihrer Erneuerung durch Karl Friedrich, Bd. II, 1903; der Selbstbiographie von Gegenbaur; und der Biographie in der Münchener medizinischen Wochenschrift, 1896, Nr. 33, S. 775.

besass sie eine nicht gewöhnliche Kenntnis der einheimischen Pflanzen; der Sohn blieb ihr stets voll Dankbarkeit zugetan.

In Würzburg besuchte er die Volksschule und das Gymnasium, in dem damals jede freie Geistesregung unterdrückt wurde. Schon frühe sammelte er auf Anregung der Mutter Tiere, Pflanzen und Steine, zeichnete viel und zergliederte Tiere.

Der Vater wünschte, der Sohn möchte die Laufbahn eines Beamten oder allenfalls eines Arztes erwählen, aber dieser hatte sich von Anfang an mit aller Bestimmtheit für die Naturwissenschaften entschieden. Mit 19 Jahren bezog er die Universität Würzburg, in deren medizinische Fakultät er eintrat, um im Notfalle als Arzt ein Auskommen zu finden. In den Beginn seines medizinischen Studiums fiel die so ungemein glückliche Neugestaltung der medizinischen Fakultät durch die Berufung von ausgezeichneten frischen Kräften, was insbesondere der Energie und der klaren Erkenntnis Rineckers zu verdanken war. Zuerst wurde der junge Albert Kölliker, ein Schüler des berühmten Anatomen J. Henle, aus Zürich berufen, der sich schon als ein Meister in der Mikroskopie und Histologie bekannt gemacht hatte; mit erstaunlicher Arbeitskraft bereicherte er seine Wissenschaft mit neuen Beobachtungen und hielt höchst anregende anatomische, histologische, entwicklungsgeschichtliche und physiologische Vorlesungen und Übungen. Dazu kam dann die Berufung von Rudolf Virchow aus Berlin für die pathologische Anatomie, welcher seine bedeutendsten Arbeiten in Würzburg ausführte oder vorbereitete und durch seine geistvollen Vorträge die Schüler mit fortriss; der mächtige Einfluss, den er auf die wissenschaftliche Medizin ausübte, kam zunächst Würzburg zu Gute. Auch Joseph Scherer ist zu nennen, ein früherer Arzt und dann Schüler Liebigs in Giessen, der als einer der ersten medizinische Chemie las und die Chemie zur Erforschung der Zusammensetzung des Körpers anwandte. Diesen schlossen sich bald einheimische jüngere Forscher an: Franz Leydig, der Prosektor am anatomischen Institut und Privatdozent für mikroskopische Anatomie, ein äusserst feiner Beobachter, und Heinrich Müller, dem wir

ausgezeichnete Untersuchungen über die Netzhaut und das Sehen verdanken. Das war eine herrliche Zeit und Jedem, der das Glück hatte, sie mitzuerleben, wird sie unvergesslich bleiben; es war ein Eifer ohne Gleichen, ein gemeinsames frohes Arbeiten von für die Wissenschaft begeisterten Lehrern und Schülern, und die Zeit der höchsten Blüte für die Würzburger medizinische Fakultät. Eine grosse Anzahl von jungen talentvollen Forschern, die ihre ersten wissenschaftlichen Arbeiten bei ihren Lehrern machten, fanden sich zusammen. Auch Gegenbaur empfing diese Anregung und er betrieb, seiner Neigung entsprechend, emsig Anatomie und Zoologie. Bald fing auch er an wissenschaftlich tätig zu sein; noch während seiner Studentenzeit kamen Abhandlungen über den Schädel des merkwürdigen Kiemenmolchs der mexikanischen Seen, des Axolotl, über Tasthaare und über die Entwicklung der zu den Mollusken gehörigen Gastropoden zur Veröffentlichung. Aber er musste, um Doktor der Medizin zu werden, auch klinische Fächer betreiben und die medizinischen Prüfungen bestehen; zu diesem Zwecke nahm er für zwei Jahre eine Stelle als Assistent bei dem erblindeten internen Kliniker K. Fr. Marcus neben Nikolaus Friedreich, dem späteren Heidelberger Kliniker, und Klinger an; er hielt sogar Kurse über Auskultation und Perkussion, wobei ich ihn kennen lernte. Obwohl er durchaus keine Neigung zu der Tätigkeit eines praktischen Arztes hatte, so waren ihm doch später die Kenntnisse in der Medizin von Nutzen für den Unterricht der Mediziner. Im Jahre 1851 promovierte er als Doktor der Medizin mit einer Dissertation: „de limacis evolutione“.

Nun entschloss er sich definitiv, sich ganz der Naturforschung, speziell der Anatomie und Zoologie, zu widmen. Er trat zunächst zu seiner weiteren naturwissenschaftlichen Ausbildung eine grössere Reise nach Norddeutschland an; vor Allem war es hier Johannes Müller in Berlin, der als erster Physiologe seiner Zeit durch seine Werke und seine Vorlesungen auf Jeden einen unauslöschbaren Eindruck machte. Die von seinem mächtigen Geiste ausgehende Bewegung wirkt

noch in unsere Tage fort. Er war auch der Schöpfer der vergleichenden Anatomie der niederen Tiere und damals lebhaft mit solchen Untersuchungen beschäftiget. Auf sein Anraten besuchte Gegenbaur die Insel Helgoland, um die niederen Seetiere kennen zu lernen.

Besonders förderlich für seine weitere Entwickelung war eine mit Kölliker und Heinrich Müller (1852) unternommene wissenschaftliche Reise nach Süditalien und Sizilien zum Studium der reichhaltigen Meeresfauna. Durch die namentlich in Messina während eines Jahres mit dem grössten Fleisse ausgeführten fruchtbringenden Untersuchungen erhielt er die reichste Anregung und das Material zu weiteren Arbeiten; eine Anzahl von wertvollen Schriften über niedere Seetiere enthielten die nächste Ausbeute dieses für ihn so wichtigen Aufenthaltes. Er war vorzüglich die Veranlassung, dass er nicht wie die meisten damaligen Anatomen der Ausbildung der Zell- und Protoplasmatheorie nachging, sondern ganz unbekümmert um die herrschenden Strömungen seinen eigenen Weg einschlug und den grossen Traditionen der vergleichend-anatomischen Forschung von Cuvier, Meckel und Johannes Müller folgte.

Nach Würzburg zurückgekehrt habilitierte er sich (1854) für Anatomie und Physiologie mit einer ausgezeichneten Abhandlung: Zur Lehre vom Generationswechsel und der Fortpflanzung bei Medusen und Polypen, durch welche er viel zur Aufklärung dieser durch Steenstrup entdeckten merkwürdigen Fortpflanzungsweise beitrug.

Es folgte eine arbeitsfreudige Zeit, in der viele bedeutsame Beiträge zur Kenntnis des Baues und der Entwicklung wirbelloser Tiere entstanden, aus denen die Untersuchungen über die Anatomie und die Entwicklungsgeschichte der im Tiefmeer vorkommenden Schneckenordnungen der Pteropoden und Heteropoden hervorzuheben sind.

Gegenbaur hatte sich eben um die zootomische Prosektur an der anatomischen Anstalt an Leydigs Stelle beworben, als (1855) ein Ruf als ausserordentlicher Professor der Zoologie bei der medizinischen Fakultät der Universität Jena an Oskar

Schultzes Stelle an ihn erging. Man hätte keine bessere Wahl treffen und Gegenbaur keinen besseren Ort für seine Tätigkeit erhalten können als das liebliche Jena, wo er volle geistige Freiheit der Forschung, den Einfluss alter grosser Traditionen und den Umgang mit bedeutenden Menschen fand. Es war für ihn wohl die glücklichste Periode seines Lebens, voll von Schaffenslust und von Erfolgen.

Nachdem er drei Jahre in dieser Stellung Vorlesungen über Zoologie, vergleichende Anatomie, allgemeine Anatomie und Entwicklungsgeschichte sowie zootomische und histologische Übungen gehalten hatte, wurde er nach dem Tode von Huschke (1858) zum ordentlichen Professor der Anatomie und Zoologie gewählt; die Physiologie wurde damals auf den Wunsch Gegenbaurs von der Anatomie abgetrennt, da das Gebiet für den akademischen Lehrer zu gross geworden war und er nicht mehr die nötigen physikalischen und chemischen Kenntnisse zu besitzen glaubte.

Seine bemerkenswerte Eintrittsrede in die Fakultät hatte den Titel: de animalium plantarumque regni terminis et differentiis.

Die neue Stellung als deskriptiver Anatom mit ihren vielen Verpflichtungen als Lehrer veranlassten ihn seine wissenschaftliche Tätigkeit mehr der Erforschung der Wirbeltiere zuzuwenden und die Untersuchung der Wirbellosen aufzugeben. Damit schloss die erste Periode seiner wissenschaftlichen Tätigkeit (1851—1862), in der er sich als einen der hervorragendsten Förderer der vergleichenden Anatomie erwiesen hatte, ab. Aber die neue Richtung zeitigte erst die reifsten Früchte seiner Forschung; er begann seine berühmten Lehrbücher herauszugeben sowie seine Arbeiten auf dem Gebiete der Entwicklungsgeschichte und Gewebelehre der Wirbeltiere auszuführen, insbesondere die zur vergleichenden Anatomie des Skelets, welche ihn unbestritten zum ersten deutschen Morphologen erhoben.

Ein glückliches Geschick liess ihn mit Ernst Haeckel bekannt werden. Die beiden hatten sich in Würzburg kennen gelernt, als Gegenbaur eben von seiner sizilianischen Reise

zurückgekehrt war und der $7^1/_2$ Jahre jüngere Haeckel in Würzburg Medizin studierte, und gegenseitig tiefen Eindruck aufeinander gemacht; später trafen sie sich wieder in Jena, wohin Haeckel, erfüllt von seinem Aufenthalt bei Johannes Müller, gekommen war. Auf Zureden Gegenbaurs habilitierte sich Haeckel in Jena für Zoologie, von wo ab beide eine innige, für beide Teile gleich fruchtbare Freundschaft verband. Auf der einen Seite der ernste erfahrene Forscher, der seine Schlüsse auf die möglichst feste Basis von Beobachtungen aufbaute, auf der anderen Seite der feurige, begeisterte Denker mit öfter allzu kühnem Ideenfluge, der allerdings später in seinem Streite um die Weltanschauungen die strengen Bahnen der Naturforschung verliess.

Gegenbaur nahm im Jahre 1873, nachdem er ein Jahr vorher einen Ruf nach Strassburg abgelehnt hatte, einen solchen an die Universität Heidelberg an. Mit schwerem Herzen trennte er sich von dem geliebten Jena. Er sollte aber in Heidelberg, woselbst er eine ungemein produktive Tätigkeit als Forscher und als akademischer Lehrer entfaltete, den Höhepunkt seines Schaffens erreichen; aus seiner Schule gingen daselbst zahlreiche talentvolle Schüler, die er zu selbständigem Denken anzuleiten wusste, hervor.

Vier Dezennien hindurch (seit 1861) beschäftigte ihn die Aufhellung des Baues, der vergleichenden Anatomie und der Entwicklungsgeschichte der Wirbeltiere sowie die so vielfach diskutierte Auffassung ihrer einzelnen Teile. Es sind zunächst histologische Fragen z. B. über den Bau und die Entwicklung der Wirbeltiereier, dann über die Bildung des Knochengewebes, über primäre und sekundäre Knochenbildung mit besonderer Beziehung auf die Lehre vom Primordialschädel, welche zu den grössten Leistungen der Histogenese gehören.

Die zahlreichen Arbeiten Gegenbaurs über die Genese des Skeletsystems der Wirbeltiere, das Rumpf-, Kopf- und Gliedmassenskelet, enthalten seine hervorragendsten Leistungen; die Schlussfolgerungen, die er aus seinen Beobachtungen unter meisterhafter Verbindung der vergleichend-anatomischen und

entwicklungsgeschichtlichen Betrachtung zog, haben diesem Teil der Morphologie eine ganz neue Richtung gewiesen.

Es dienten ihm dabei vorzüglich die Selachier, eine Fischordnung, zu der der Haifisch gehört, als Objekte für die Erkenntnis der Skelettformen der höheren Wirbeltiere. In seinen Abhandlungen über das Kopfskelett der Selachier und über die Metamerie des Kopfes und die Wirbeltheorie des Kopfskelettes betrat er das berühmte Problem der Wirbeltheorie des Schädels. Nachdem zuvor Huxley die Unhaltbarkeit der von Göthe und Oken gegebenen Formulierung dieser Theorie nachgewiesen hatte, benützte Gegenbaur ein neues Mittel, nämlich die Zahl der Visceralbogen und die Art der Kopfnervenverteilung, um die Zahl der im Schädel enthaltenen Wirbel zu bestimmen.

Über das Rumpfskelett berichtet vorzüglich seine Arbeit über die Entwicklung der Wirbelsäule bei den Amphibien und Reptilien, über das Gliedmassenskelett die bahnbrechenden Abhandlungen über die Bildung des Fussskeletts der Vögel und des Brustgürtels der Fische, über den Carpus und Tarsus, den Schulter- und Beckengürtel der Wirbeltiere und die Brustflossen der Fische. Indem er von der Ontogenese ausgehend bis zu den höchsten Entwicklungsformen der Gliedmassen vordrang, kam er zu seiner noch bestrittenen Archipterygiumtheorie, die es ermöglichte, die mannigfachen Formen des Extremitätenskeletts bei den Wirbeltieren auf eine gemeinsame Grundform zurückzuführen.

In seinen Abhandlungen über die Stellung und Bedeutung der Morphologie, über Caenogenese sowie über Ontogenie und Anatomie in ihren Wechselbeziehungen betrachtet wird die Methodik seiner Forschung dargelegt.

Im Jahre 1875 begründete er das reichhaltige morphologische Jahrbuch, eine Zeitschrift für Anatomie und Entwicklungsgeschichte, von der er 29 Bände herausgab.

Schliesslich müssen auch seine ausgezeichneten Lehrbücher Erwähnung finden. Zuerst erschienen die Grundzüge der vergleichenden Anatomie in 2 Auflagen, dann der weit verbreitete

Grundriss der vergleichenden Anatomie ebenfalls in 2 Auflagen, in denen er die Wirbellosen und die Wirbeltiere behandelte und die Lehre von der Descendenz und Selektion zur vollen Geltung brachte. Hierauf folgte die grosse zweibändige vergleichende Anatomie der Wirbeltiere mit Berücksichtigung der Wirbellosen, die reife Frucht zwanzigjähriger Arbeit; er gibt darin eine genealogische Darstellung der Organe von ihren ersten Anfängen bis zu ihren höchsten, in der Zuchtauslese mehr und mehr vervollkommneten Entwicklungsstufen. Das Lehrbuch der Anatomie des Menschen, welches 7 Auflagen erlebte, ist keine trockene Aufzählung und Beschreibung der Teile, es brachte vielmehr die fertigen anatomischen Formen des Menschen in innigen Zusammenhang mit denen der übrigen Tiere, sowie mit ihrer Entwicklung und ihren physiologischen Leistungen, so dass ihre morphologische und physiologische Bedeutung klar hervortritt. So entstand ein lebensvolles Bild des Werdens des Menschen und seiner Verwandtschaft mit den anderen Organismen, durch das die descriptive Anatomie als eine erklärende Wissenschaft sich darstellt.

Gegenbaur hat nach dem Gesagten die Morphologie mit einer grossen Anzahl wichtiger Tatsachen bereichert und durch seine grossen Erfahrungen und sein tiefes Denken der vergleichenden Forschung neue fruchtbare Probleme eröffnet sowie ihr die nächsten Wege und Ziele gewiesen. Er war eine ernste, nur seiner Wissenschaft dienende Natur, eine vornehme, imponierende Persönlichkeit und trotz aller Ehrungen und Anerkennungen, denen er abhold war, ein von jeder Eitelkeit freier, zielbewusster, wahrheitsliebender Naturforscher, der für die von ihm klar erkannte Aufgabe alle seine Kräfte einsetzte. Auch als Mensch war er durch seine Zuverlässigkeit und die Reinheit seines Charakters ein leuchtendes Vorbild.

Alexander Rollett.[1])

Am 1. Oktober 1903 ist der Professor der Physiologie und mikroskopischen Anatomie an der Universität zu Graz, Alexander Rollett, im Alter von 69 Jahren gestorben. Mit ihm ist wieder einer der älteren Vertreter seiner Wissenschaft, welche den Jüngeren die Wege geebnet haben, dahin gegangen. Er hat als Histologe die feinere Struktur der Gebilde des Tierkörpers und als Physiologe die verwickelten Erscheinungen des Lebens mit grösster Gewissenhaftigkeit, Scharfsinn und Ausdauer durch Beobachtungen und Versuche zu erforschen und die Ergebnisse nüchtern und vorurteilsfrei zu deuten gesucht; er hat dadurch der Histologie und Physiologie in mehreren wichtigen Gebieten sichere Grundlagen geschaffen.

Alexander Rollett wurde als der Sohn eines angesehenen Arztes zu Baden bei Wien am 14. Juli 1834 geboren; auch der Grossvater war Arzt. Vater und Grossvater hatten, wie früher so viele Ärzte, lebhaftes Interesse für die umgebende Natur; sie legten reiche naturhistorische und anthropologische Sammlungen an, welche sie der Stadt Baden zum Geschenke machten, woselbst sie in dem Rollett-Museum aufgestellt sind. Von ihnen hatte der junge Rollett die Liebe zur Naturwissenschaft und die Befähigung zu scharfer Beobachtung erhalten, so dass er als Mediziner die damaligen grossen Lehrer der Wiener Schule: Hyrtl, Rokitansky, Scoda, Oppolzer, Arlt, Schuh mit vollem Verständnis auf sich wirken lassen konnte. Neben der Medizin betrieb er eifrig Botanik bei Unger, sowie

---

1) Mit Benutzung der Nekrologe von O. Zoth, Archiv für die gesamte Physiologie, 1904, Bd. 101; von v. Ebner, Wiener klinische Wochenschrift, 1903, Nr. 48; Klemensiewicz, Mitteilungen des Vereines der Ärzte in Steiermark, 1904, Nr. 1. — Klemensiewicz, Festrede aus der Grazer Tagespost, 1893, Nr. 333.

Chemie bei Schrötter und Redtenbacher. Das war noch die gute alte Zeit, in welcher der Mediziner an den Naturwissenschaften denken und den Sinn für Beobachtung schärfen lernte, gegenüber der hastigen Gegenwart, in der so Viele ohne eine sichere Grundlage und ohne genügendes Verständnis der Vorgänge des Lebens ans Krankenbett zu kommen trachten, um nützliche Regeln für ihr praktisches Handeln zu erlernen. Schon als Student fing Rollett an im physiologischen Laboratorium bei Ernst Brücke zu arbeiten, der dadurch auf den talentvollen Jüngling aufmerksam wurde und ihn alsbald nach Vollendung der medizinischen Studien zum Assistenten erwählte. Nun begann eine Zeit emsiger Arbeit, besonders angeregt durch seine Lehrer Brücke und Carl Ludwig und den Umgang mit deren reiferen Schülern. Wie hoch ihn seine Lehrer schätzten und wie viel sie sich von ihm versprachen, das beweist, dass sie ihn dringend für die Professur der Physiologie und mikroskopischen Anatomie an der Universität Graz, die damals durch Errichtung einer medizinischen Fakultät vervollständigt worden war, empfohlen. So wurde der junge Dr. Rollett im Alter von 29 Jahren ordentlicher Professor. Er hat seine Gönner nicht getäuscht; mit ihm zog der Geist strenger naturwissenschaftlicher Forschung in die medizinische Fakultät ein. Bald hatte er sich durch seine wissenschaftliche Tätigkeit, in einem vorläufig notdürftig eingerichteten Laboratorium, zu einem der vortrefflichsten und angesehendsten Physiologen aufgeschwungen; es sammelten sich zahlreiche Schüler um ihn und die Universität Graz, der er 40 Jahre getreu angehörte, pries ihn als eine ihrer ersten Kräfte. Später wurde ihm ein neues Institut gebaut, das mit allen Hilfsmitteln für den Unterricht und die Forschung versehen war und das dadurch als eines der besten seiner Zeit galt.

Rollett war noch ein allseitig ausgebildeter Physiologe, er verstand es alle Hilfsmittel zur Untersuchung der Lebensvorgänge: die Lehren und Methoden der Physik, der Chemie und der mikroskopischen Anatomie, welche letztere damals noch zu den Aufgaben des Physiologen gehörte, mit Meister-

schaft anzuwenden. Als solcher war er einer der letzten Abkömmlinge der durch Johannes Müller inaugurierten grossen deutschen physiologischen Schule in der Mitte des vorigen Jahrhunderts, welche durch das Experiment die Vorgänge des Lebens zu ergründen suchte. In dieser Blütezeit der Physiologie, wo jedes Eindringen reiche Ernte gab, glaubte man viele dieser Vorgänge auf einfache physikalische und chemische Prinzipien zurückgeführt und erklärt zu haben; aber es zeigte sich bei weiterer Verfolgung, dass die Vorgänge doch viel verwickelter sind als man sich dies bei der ersten Inangriffnahme gedacht hatte. Die Nachfolger hatten es ungleich schwieriger mit dem weiteren Ausbau der Lehre, so dass man sogar zu zweifeln begann, ob man mit den physikalischen und chemischen Kräften ausreiche und glaubte, noch unbekannte Kräfte zu Hilfe nehmen zu müssen, wie zur Zeit der Naturphilosophie. Dies verführte auch so Manche dazu, sich in gewagten Spekulationen über das Geschehen im Organismus zu ergehen. Es ist allerdings verlockender in kurzer Zeit durch überraschende Hypothesen zu glänzen oder bestehende Anschauungen auf ungenügende Versuche hin zu bezweifeln, als Jahre lang der strengen Arbeit des Experiments zu obliegen und nur Schritt für Schritt vorwärts zu kommen. Ein solcher echter Naturforscher letzterer Art war Rollett. Mit ausgebreiteten Kenntnissen und Erfahrungen in fast allen Gebieten der Physiologie ausgerüstet, hatte er sich das Vermögen scharfer Beobachtung erworben, durch die er alsbald das Wesentliche einer Erscheinung erkannte; von unermüdlicher Ausdauer und Lust zum Arbeiten ruhte er nicht eher bis er durch zahlreiche mit peinlicher Sorgfalt und mit feinster Methodik angestellte Beobachtungen und Versuche das vorgesteckte Ziel so weit als möglich erreicht hatte. Er war wohl auch ein tiefer Denker, der die Möglichkeiten bei Erklärung der Erscheinungen erwog, dieselben aber nur benützte, um sie durch weitere Untersuchungen zur Entscheidung zu bringen. Er hielt daran fest, dass bei dem jetzigen Stande der Physiologie die Ermittelung von Kenntnissen das Wichtigste und Notwendigste sei. Dadurch

waren seine Arbeiten Muster der Zuverlässigkeit und sie bereicherten die Wissenschaft mit Erkenntnissen, die wertvolle Bausteine zu der Lehre vom Leben bilden. Er konnte zwar ein recht scharfer Kämpfer gegen unberechtigte Einwände und Angriffe sein, aber von dem persönlichen Ton, wie er sich jetzt leider öfters in der Wissenschaft findet, hielt er sich frei; seine Polemik bestand meist darin, durch erneute Beobachtungen den Gegner zu überzeugen.

Vitalistischen Anschauungen war er von Grund aus abgeneigt. Wenn er auch zugab, dass wir mit unseren heutigen physikalischen und chemischen Kenntnissen nicht ausreichen, um die Lebenserscheinungen zu erklären, so war er doch überzeugt, dass ausser diesen Kräften keine anderen wirksam sind und wir nur noch zu wenig von ihnen wissen.

Die wertvollsten und zahlreichsten Arbeiten von Rollett, die ihn während 25 Jahren beschäftigten, sind die über die feinere Struktur und die Physiologie des quergestreiften Muskels. Bei seinen Lehrern Brücke und Ludwig hatte er das Mikroskop als Hilfsmittel für die Lösung physiologischer Fragen zu gebrauchen gelernt; man hatte früher vorzüglich nur die toten Gebilde betrachtet, bis man einsah, dass die Beobachtung der Gebilde in ihrer lebendigen Tätigkeit, im überlebenden Zustande, die wichtigsten Aufschlüsse für das Geschehen in ihnen gibt. Rollett war es, der durch seine mikroskopischen Beobachtungen viel zu dieser Erkenntnis beigetragen hat. Es war hauptsächlich das seit langer Zeit die Forschung beschäftigende merkwürdige Problem der Muskelkontraktion, welches ihn dazu führte; durch drei grosse histologische Untersuchungen hat er eine feste Grundlage für eine einstige Theorie der Muskelkontraktion geschaffen, jedoch konnte er sich nicht entschliessen, eine neue Hypothese zu den vielen vorhandenen über das Zustandekommen der Muskelkontraktion aufzustellen. Zahllose Arbeiten der Histologen lagen damals hierüber vor, jedoch mit den widersprechendsten Resultaten und Ansichten; Rollet gelang es durch eiserne Ausdauer, durch Einführung neuer wertvoller Untersuchsmethoden z. B. der Vergoldungsmethode, des Polari-

spektromikroskops oder des Spektropolarisators, zu dessen Herstellung er eingehende physikalische Studien über die Farben der Newton'schen Ringsysteme und die Farbenordnung dünner Blättchen von Newton gemacht hatte, ferner durch Beobachtung der Muskeln vieler Tiere, namentlich niederer Tiere wie der Käfer, Wespen, Ameisen, Fliegen, Grillen, Krebse, der Seepferdchen und der Fledermäuse eine Fülle von Tatsachen über den sehr verwickelten feineren Bau der Muskeln aufzufinden. Er lehrte uns die kleinsten Teilchen kennen, aus denen die Muskelfasern zusammengesetzt sind, ihr merkwürdiges Verhalten zum polarisierten Lichte, die Lageveränderungen derselben und die Änderung der doppelbrechenden und einfach brechenden Substanz bei der Kontraktion. Es wurde dadurch der Grund der grossen Verschiedenheit in der Struktur der Muskeln verschiedener Tiere aufgehellt.

Darnach kamen Arbeiten zur Physiologie der Muskeln.

In einer interessanten Untersuchung über die verschiedene Erregbarkeit funktionell verschiedener Nervmuskelpräparate (1870—1875) wurde die zuerst von Ritter gemachte Beobachtung mit Sicherheit bestätigt, dass bei elektrischer Erregung der motorischen Nerven des Frosches die Beugemuskeln der Beine bei geringerer Reizstärke antworten als die Streckmuskeln und sich kräftiger zusammenziehen; dass sich bei wachsender Reizstärke die beiden das Gleichgewicht halten, bei grosser Reizstärke aber die Strecker überwiegen. Er erklärte dies anfangs durch die Annahme, dass schwache Reize in jedem Massenelement der Beuger eine grössere Summe lebendiger Kraft auslösen als in jedem Massenelement der Strecker, und dass bei zunehmender Reizstärke das Maximum der lebendigen Kräfte bei den Beugern früher erreicht wird als bei den Streckern; oder dass die Nervenfasern für die Beuger eine höhere Erregbarkeit haben als die für die Strecker; später schloss er sich Grützner an, nach dem in den funktionell verschiedenen Muskeln flinke und träge Fasern in ungleichem Verhältnis sich vorfinden. Bei diesen Versuchen bediente er

sich mit Vorteil des von ihm erfundenen Antagonistographen und des rotierenden Quecksilberschlüssels.

An die drei grossen anatomischen Untersuchungen über den feineren Bau des Muskels schloss sich (1887) eine umfassende Arbeit zur Physiologie der Käfermuskeln an. An den kleinen Schenkelmuskeln dieser Tiere machte er mit Hilfe des Marey'schen Myographen, dessen Angaben er einer eingehenden mathematischen Analyse unterworfen hatte, seine subtilen Experimente über den Zuckungsverlauf; er zeigte, dass die Muskeln von Dytiscus, eines fleischfressenden Schwimmkäfers, äusserst flinke und energische, aber rasch sich erschöpfende Bewegungen machen, während die des pflanzenfressenden Schwimmkäfers Hydrophilus, träge und ausdauernde Kontraktionen ausführen; der dem Dytiscus nahestehende Cybister hat flinke Muskeln, der Hirschkäfer, die Laufkäfer, der Maikäfer dagegen träge wie der Hydrophilus. Auch bei den Muskeln höherer Tiere zeigten sich ähnliche Verschiedenheiten des Zuckungsverlaufes. Die der Fledermäuse sind träger als die der Frösche, so träge wie die trägsten Käfermuskeln von $^1/_2$ Sekunde Zuckungsdauer; noch viel träger als weisse Kaninchenmuskeln, jedoch flinker als rote Kaninchenmuskeln und Schildkrötenmuskeln.

Weiterhin untersuchte er das von besonderen Bedingungen abhängige, oft Stunden lang andauernde merkwürdige Wellenspiel an überlebenden Insektenmuskeln, das er an durchsichtigen Mückenlarven (corethra plumicornis) oder an frisch ausgeschnittenen Insektenmuskeln mit dem Mikroskop beobachtete. Es sind freiwillige teils blitzschnelle, energische totale Zusammenziehungen eines Muskelbündels noch lebenskräftiger Tiere, teils sehr langsam ablaufende kurze Knoten bei absterbenden Muskeln. Es wurde die Verschiedenheit dieser Welle von der viel rascher sich fortpflanzenden langen Kontraktionswelle am Froschmuskel nachgewiesen, sowie von der langsamen und kurzen Welle, welche sich nach mechanischer Reizung des Muskels bei Wirbeltieren nach beiden Seiten hin fortpflanzt. Die weissen Wirbeltiermuskeln zeigen eine grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit und grössere Veränderlichkeit als die

roten. Es kam auch die Beziehung der Kontraktionswellen zu der Einzelzuckung der quergestreiften Muskelwellen in Betracht.

Die zweitgrösste Arbeit Rolletts zur Muskelphysiologie (1896) handelt von der Veränderlichkeit des Zuckungsverlaufes quergestreifter Muskeln bei fortgesetzter periodischer Erregung und bei der Erholung nach derselben. Die Versuche wurden an Froschmuskeln, wiederum mit dem Marey'schen Myographen und dem rotierenden Quecksilberschlüssel angestellt. Es gelang ihm an Muskelpräparaten mit erhaltenem Kreislauf Reihen bis zu 3600 Einzelzuckungen in genau bestimmten Intervallen und nach verschieden langen Erholungspausen zu erhalten. Später wiederholte er diese Versuche an Säugetiermuskeln, wobei er die physiologische Verschiedenheit der quergestreiften Muskeln der Kalt- und Warmblüter fand; für letztere verwendete er den Abziehermuskel seines eigenen kleinen Fingers. Er zeigte, dass beim Warmblütermuskel die Zuckungsdauer in Reihen von Einzelzuckungen erhalten bleibt, während sie bei Kaltblütermuskeln eine sehr grosse und zunehmende Dehnung erfährt.

Eine zweite wichtige Reihe von Arbeiten Rolletts, die sich auf die Jahre 1861—1881 erstreckt, befasst sich mit dem Blute. Es waren mikroskopische, physikalische und physiologisch-chemische Untersuchungen über die roten Blutkörperchen und den in ihnen enthaltenen merkwürdigen roten eiweissartigen Farbstoff, der bei der Aufnahme des Sauerstoffs in den Körper eine so grosse Rolle spielt. Er gab zunächst viele Aufschlüsse über die Struktur der roten Blutkörperchen; im Anschluss an die Lehren Brückes waren sie ihm Zellen mit einem elastischen membranlosen hyalinen Stroma von wabigem Bau, in dessen Maschen das formlose Endosoma des Farbstoffs liegt. Indem er die Blutkörperchen in Leimgallerte einschloss, konnte er durch Druck auf feine Schnittchen die grosse Dehnbarkeit derselben schlagend dartun, während er ihre Kontraktilität widerstritt. Er studierte ferner die Wirkung von allerlei Einflüssen auf die Blutkörperchen mit dem Mikroskop; die von Salz- und

Zuckerlösungen, die des Gefrierens, insbesondere aber die der Elektrizität. Es wurden zuerst konstante elektrische Ströme angewendet, welche elektrolytisch wirken und die Blutkörperchen verändern; indem er die Ströme durch dünne Schichten Bluts leitete, vermochte er an der Aufhellung die Stromverteilung objektiv darzustellen. Dann wurde der elektrische Leitungswiderstand des Blutes ermittelt und gezeigt, dass die Blutkörperchen sich dabei wie Isolatoren verhalten, während die Blutflüssigkeit den elektrischen Strom leitet. Die Kondensatorentladungen der Leydener Flasche haben andere Wirkungen; sie bringen ebenfalls allerlei Formveränderungen der Blutkörperchen hervor, indem die Zellen hier nicht mehr Isolatoren sind, sondern durchbrochen werden, wodurch sie sekundären Veränderungen verfallen. Ludimar Hermann hatte bei Versuchen mit Induktionswechselströmen wahrgenommen, dass dabei die Aufhellung des Blutes durch Wärmewirkung stattfindet und vermutet, dass bei den von Rollett angewandten Kondensatorentladungen das Gleiche stattfindet. Rollett tat dagegen dar, dass bei seinen Kondensatorentladungen keine merkliche Erwärmung des Blutes eintritt; auch zeigt das durch Kondensatorentladungen lackfarben gewordene Blut herabgesetzte elektrische Leitfähigkeit, das durch Wärme lackfarbene dagegen erhöhte. In letzter Zeit hat Max Cremer dargetan, dass möglicher Weise doch eine Wärmewirkung vorliegt, wenn man annimmt, dass das schlechte Leitvermögen der Blutkörperchen von einer sehr dünnen Oberflächenschicht herrührt.

Weiterhin beschäftigte sich Rollett mit dem physikalischen und chemischen Verhalten des in den Zellen eingelagerten Farbstoffs, des Hämoglobins. Mit Viktor Lang wurden die Kristalle dieses komplizierten Eiweissstoffes einer genauen kristallographischen und optischen Analyse unterworfen und gezeigt, dass sie alle in verschiedener Form des rhombischen Systemes kristallisieren mit Ausnahme des im hexagonalen System kristallisierenden Eichhörnchenblutes, woraus hervorgeht, dass es verschiedene Arten von Hämoglobin geben muss. Die Hämoglobin- und Hämin-Kristalle lassen nach ihm den soge-

nannten Pleochroismus erkennen. Er stellte ferner grosse Kristalle von reduziertem und Kohlenoxyd-Hämoglobin dar, deren optische Eigenschaften er untersuchte, ebenso die reinen Kristalle des Säurehämins, auch zeigte er die Reduktion des Sauerstoffhämoglobins ausser durch Eisenfeile oder Zinn etc. durch die Gewebsteile. Diese Erfahrungen führten ihn zu ihren Anwendungen für den forensen Nachweis kleiner Blutmengen, worin er sich eine ausserordentliche Übung erworben hatte; namentlich benützte er dabei mit Vorteil das Kaliumhydroxyd.

Aus den übrigen zahlreichen Arbeiten Rolletts in anderen Gebieten der Physiologie erwähne ich noch die wertvollen zur physiologischen Optik. Hierher gehören die über das binokuläre Sehen mit der einfachen Demonstration des Einflusses der Konvergenz der Augen auf die Schätzung der Grösse und der Entfernung der Gegenstände durch seine Konvergenzplatten; die Versuche über das Sehen in der dritten Dimension und das stereoskopische Sehen. Dann seine schönen Versuche über das Abklingen der Farben und die subjektiven Kontrastfarben, die er mit Hilfe des Projektionsapparates Jedem leicht sichtbar darstellte; er sprach sich dabei gegen die Erklärung dieser subjektiven Farbenerscheinungen durch die von Helmholtz angenommene Urteilstäuschung aus; er suchte nach einer physiologischen Erklärung, indem er das Prinzip der Gegenwirkung gleicher Qualitäten einführte.

Endlich seien noch genannt einige bedeutungsvolle histologische Untersuchungen: über die Struktur des Bindegewebes, dessen Fibrillen er durch übermangansaures Kali isolieren lehrte, über die Hornhaut des Auges, an deren Zellen er die Eigenschaft der Kontraktilität und Reizbarkeit nachwies, und die sehr wichtige über den feineren Bau der Magendrüsen, an welchen er gleichzeitig mit Heidenhain durch differentielle Färbungen zwei verschiedene Zellenformen von verschiedener Funktion, die von ihm sogenannten delomorphen und adelomorphen Zellen, erkannte.

Chemische Arbeiten liegen von ihm vor über die Eiweisskörper des Bindegewebes, über die Acidalbuminate und Alkali-

albuminate, und über Lösungsgemenge aus Alkalialbuminat und phosphorsauren Alkalisalzen, die dabei die Eigenschaften des Caseins der Milch erhalten.

Auch eine experimentell-physiologische Untersuchung über die Veränderungen, welche nach einseitiger Durchschneidung des Nervus trigeminus in der Mundhöhle auftreten, war von Bedeutung; es handelte sich namentlich um die Veränderungen der Kieferknochen der gesunden Seite, die er auf rein mechanische Einwirkungen zurückführte, während er trophische Einflüsse leugnete.

Endlich mögen noch angeführt werden die Beiträge zur Physiologie des Geruchs, des Geschmacks, der Hautsinne und der Sinne im Allgemeinen. Dieselben gründen sich grösstenteils auf Selbstbeobachtungen; die höchst interessanten über den Geruch sind von ihm angestellt worden, als er den Geruchsinn nach einer Vergiftung mit Gymnomasäure verloren hatte, indem er die einzelnen Geruchsqualitäten während der Vergiftung und bei der allmählichen Wiederkehr der Empfindung prüfte.

Als Lehrer bei den Vorlesungen übte Rollett eine höchst segensreiche Wirksamkeit aus; er wollte seinen Schülern naturwissenschaftliches Denken beibringen, indem er ihnen einige bevorzugte Kapitel der Physiologie ausführlich in ihrer historischen Entwicklung vorführte; er suchte weniger das fertige Wissen, das man aus jedem Lehrbuch erfahren kann, zu bieten, sondern vielmehr die Wege zu zeigen, auf denen die Forschung zu den Erkenntnissen gelangt ist. Nachdem vor ihm in den physiologischen Vorlesungen kaum experimentiert worden war, war Rollett einer der ersten, der in ausgedehnter Weise und in richtiger Auswahl den demonstrativen Unterricht einführte.

Im Laboratorium wirkte er auf die vorgerückteren Schüler weniger durch direkte Mitarbeit, als durch sein Beispiel in der Freude am Schaffen und in der umsichtigen Art seiner Forschung; er hat dadurch eine grosse Anzahl von wissenschaftlich tätigen jungen Forschern um sich versammelt, deren Unter-

suchungen in 3 Heften aus dem Grazer Institut für Physiologie und Histologie erschienen sind.

Durch seine ideale Auffassung von den Aufgaben der Universität sowie der akademischen Freiheit war er bei den deutschen Studierenden der Universität Graz äusserst beliebt und wie ein sorgender Vater verehrt; nur die klerikalen und antideutschen waren ihm abgeneigt. — Die medizinische Fakultät und die Universität erblickten in ihm ihre festeste Stütze in allen sie fördernden Angelegenheiten; für ihre Rechte und ihre Interessen ist er stets mit allem Mut eingetreten. Viermal war er Rektor der Universität und öfters war er auswärts bei besonderen Gelegenheiten ihr Vertreter.

Daneben übte er eine ausgedehnte öffentliche Wirksamkeit aus. Ohne Parteimann zu sein, nahm er den regsten Anteil an dem politischen Leben des Deutschtums in Österreich und an seiner freiheitlichen Gestaltung. Bei allen gemeinnützigen, der Allgemeinheit dienenden Unternehmungen war er an der Spitze: im Gemeinderate der Stadt, im steiermärkischen Volksbildungsverein, bei dem volkstümlichen Hochschulunterricht etc. Er wurde dadurch zu einer der bekanntesten und beliebtesten Persönlichkeiten der Stadt Graz. Gerne machte er sein Wissen in wissenschaftlichen und gemeinverständlichen Vorträgen nutzbringend; in dieser Weise wirkte er in vielen gedankenreichen Reden und Aufsätzen allgemeinen Inhalts.

Im medizinischen Leben von Steiermark nahm er eine führende Stelle ein; er kannte die hohe Bedeutung des ärztlichen Standes und die Wichtigkeit einer wissenschaftlichen Ausbildung desselben. Als Organisator und beständiger Präsident der Ärztekammer für Steiermark war er der Vorkämpfer für die Interessen der Ärzte; den Naturheilpfuschern war er ein unerbittlicher und mächtiger Gegner.

Wegen dieser seiner Verdienste wurden ihm oft und von allen Seiten Ehrungen und Huldigungen zu Teil, insbesondere bei dem 30 jährigen Jubiläum seiner Wirksamkeit in Graz, obgleich er als bescheidener Mann nicht nach äusseren Ehren strebte. Er wollte nur ein einfacher Mitarbeiter an dem grossen

Werke der menschlichen Erkenntnis sein und seine Befriedigung in dem Bewusstsein finden seinen Teil zur Mehrung der idealen Güter der Menschheit beigetragen zu haben. Dass er nicht nur ein einseitiger Naturforscher war, sondern von Jugend an einen regen Sinn für alles Gute und Schöne dieser Erde besass, erfuhr ich aus einem Briefe, den er mir nach seiner Wahl zum korrespondierenden Mitgliede unserer Akademie schrieb; er sagt darin, er habe als Knabe von 15 Jahren seine Verwandten mütterlicherseits in Regensburg und München besucht, „wobei alle die Herrlichkeiten, mit welchen König Ludwig I. von Bayern diese Städte ausgestattet hatte, in die leicht empfängliche Seele des Jünglings fielen, um immer lebendig zu bleiben.“

Berichtigung

zu Prof. Günthers Abh. „Das Pothenot'sche Problem auf der Kugelfläche.“

S. 117, Z. 7 v. u. muss es statt XX heissen XIX.
S. 117, Z. 19 v. o. lies Maupertuis statt Maupertius.
S. 119, Z. 10 v. o. ist zu streichen [1]).
S. 122, Z. 9 v. u. ist zu streichen $\sin^2 \gamma$.



Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 5. November 1904.

1. Herr A. Rothpletz legt den Bericht des Herrn Dr. phil. Gottfried Merzbacher: „Über seine Forschungsreise im Tian-Schan" vor.

Durch die Ergebnisse dieser Reise werden die bisherigen Vorstellungen über Bau und Entwickelungsgeschichte dieses gewaltigen Gebirges in vieler Hinsicht verändert und erweitert.

2. Herr A. Rothpletz macht eine Mitteilung: „Über die fossilen oberoligocänen Wellenfurchen des Peissenberges und ihre Bedeutung für den dortigen Bergbau."

Derselbe besprach die fossilen Wellenfurchen und die auf denselben sichtbaren Kriechspuren und Trockenrisse, durch die der sichere Nachweis geführt werden kann, dass die ältere Vermutung Gümbels zu Recht besteht und die Kohlenflötze im Peissenberg wirklich überkippt liegen, was zu wissen für den Bergbau von grösster Wichtigkeit ist.

3. Herr A. Föppl hält einen Vortrag: „Über absolute und relative Bewegung."

Wenn man die Annahme eines absoluten Raumes verwirft und nur relative Bewegungen zulässt, wird man zur Aufstellung

einer Bedingung genötigt, der das von dem Trägheitsgesetze geforderte Inertialsystem genügen muss. Eine solche Bedingung wird auf grund des Satzes von Coriolis über die Ergänzungskräfte der Rotativbewegung ausgesprochen und hieraus der Schluss gezogen, dass zwischen je zwei Weltkörpern ausser den Gravitationskräften auch noch Kräfte anzunehmen sind, die von den Geschwindigkeiten gegen das Inertialsystem abhängen. Auf die verschiedenen Möglichkeiten, das Wirkungsgesetz dieser Kräfte auf Grund von Versuchen zu erforschen, wird hingewiesen und dabei auch die von Koch kürzlich beobachtete zeitliche Änderung der Schwerkraft besprochen.

4. Herr Siegmund Günther legt einen Aufsatz vor: „Erdpyramiden und Büsserschnee als gleichartige Erosionsgebilde."

Auf grund eines grösseren Belegmateriales wurde die schon bei früherer Gelegenheit berührte Tatsache bewiesen, dass Erdpfeiler in Ansammlungen nur dann zustande kommen, wenn die Masse, aus welcher sie durch vertikale Erosion herauspräpariert werden, zuvor in isolierte Kämme zerteilt war. Die stets wahrnehmbare lineare Anordnung der Basisflächen macht sich nach Hauthals neuesten Forschungen ganz ebenso bei den als „Büsserschnee" (nieve penitentes) bekannten Eisprotuberanzen der südamerikanischen Anden bemerklich, so dass die vollkommene Analogie der Entstehung zweier stofflich ganz verschiedenen Bodenformen als gesichert gelten kann.

5. Herr Richard Hertwig legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Otto Maas, Professor an der Universität: „Bemerkungen zum System der Medusen" vor.

Auf grund von Medusenmaterial, besonders der holländischen Tiefseeexpedition, werden Veränderungen der Systematik angegeben. Die Gruppe der Cannotiden wird aufgelöst; die Formen mit gefiederten Radiärkanälen werden abgetrennt von den mit verzweigten Radiärkanälen. Unter letzteren werden

ferner zwei ganz verschiedene Gruppen unterschieden, nach Lage der Geschlechtsorgane und nach den hydroiden Entwicklungsstadien. Die einen verbleiben als Bereniciden bei den Leptomedusen, die andern werden als Williaden zu den Anthomedusen gestellt, mit denen sie durch eine neu aufzustellende Gruppe, Bythotiariden, verbunden erscheinen.

6. Herr Aurel Voss überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. E. v. Weber, Professor an der Universität: „Das Imaginäre in der Geometrie der konfokalen Flächen 2. Ordnung.“

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode entwickelt, um die komplexen Raumgebilde, die in der algebraisch-geometrischen Theorie der konfokalen Flächen 2. Ordnung eine Rolle spielen, mit Hilfe der geradlinigen Erzeugenden der im konfokalen System enthaltenen einschaligen Hyperboloide reellgeometrisch zu repräsentieren und der elementaren Konstruktion zugänglich zu machen. Auf diesem Wege ergibt sich eine neue Kategorie von Sätzen über Linienkongruenzen, über Flächen 2. Ordnung und über Kegelschnitte, insbesondere deren Krümmungskreise.



Forschungsreise im Tian-Schan.

Von **Gottfried Merzbacher.**

(Eingelaufen 5. November.)

Schon in das Jahr 1892 fielen meine ersten, vorbereitenden Reisen in den Zentralteil des Tian-Schan-Gebirges, die mich mit den Vorketten und den Zugängen zu diesem Hochgebirge vertraut machten. Wider Erwarten konnte ich erst 10 Jahre später die damals geplante, eingehende Forschungsreise in das wenig bekannte Hochgebirge antreten. Von seiten der Kaiserl. Russischen Geographischen Gesellschaft wurde mir die erforderliche moralische Unterstützung hiezu in reichem Masse zuteil. Da die höchsten, eisbedeckten, bisher grösstenteils unerforschten Teile des Gebirges mein Hauptarbeitsfeld bilden sollten, deren mir auf der vorbereitenden Reise schon bekannt gewordene schwere Zugänglichkeit voraussehen liess, dass ein Sommer für ihre Erforschung nicht genügen könne, wurde die Reisedauer von Beginn an auf mindestens zwei Jahre festgesetzt. Für die topographischen Arbeiten und zur Begehung der weiten Eisregionen und ihrer hohen Umrandung hatte ich mir, wenigstens für den ersten Sommer, die Teilnahme des bekannten Alpinisten und Ingenieurs Hans Pfann aus München gesichert und für die geologischen Forschungen und zur Anlage von paläontologischen Sammlungen jene des Geologen Hans Keidel aus Freiburg im Breisgau gewonnen. Ausserdem begleitete mich ein junger Tiroler Bergführer, zu dem sich im zweiten Forschungsjahre noch ein weiterer aus dem Salzburgischen gesellte. In beiden Jahren war die Expedition von einem zoologischen Präparator und Sammler begleitet.

In diesem sofort nach Beendigung der Expedition niedergeschriebenen, summarischen Berichte können natürlich die während der zweijährigen Expeditionsdauer gemachten wissenschaftlichen Beobachtungen kaum gestreift, geschweige denn eingehend besprochen werden. Der für eine Mitteilung in den Sitzungsberichten der Akademie zur Verfügung stehende Raum gestattet höchstens die Angabe des Itinerars und flüchtigen Hinweis auf eine Reihe bisher ungenügend oder gar nicht bekannter Tatsachen, an welche Folgerungen erst in späterer Zeit, nach systematischer Bearbeitung der heimgebrachten, umfangreichen Sammlungen geknüpft werden können.

Wir verliessen München am 15. Mai 1902. Die Reise zum Nordfusse des Tian-Schan führte über das Schwarze Meer und den kaukasischen Isthmus, über das Kaspische Meer und durch Turkestan nach Taschkent; von dort ging es, der Postroute folgend, durch die Steppen des südöstlichen Turkestan, längs des Nordfusses der Alexanderkette, zu deren höchstem Teil ein kurzer Ausflug gemacht wurde, zum Issyk-kul-See und an dessen Nordufer entlang zum Städtchen Prschewalsk (Karakol). Durch missliche Umstände aufgehalten, konnte sich die Karawane erst am 2. Juli in Bewegung setzen, um eines der grössten, am Nordfusse des zentralen Tian-Schan von Osten nach Westen sich erstreckenden Längstäler, das Tekes-Tal, aufzusuchen. Es wird vom Becken der Issyk-kul-Senkung durch einen beiläufig meridional verlaufenden, die latitudinalen Ketten des zentralen Tian-Schan mit den gleicher Richtung folgenden, gegen das Ili-Becken abdachenden Vorketten verbindenden Zwischenzug getrennt, der — ein im Tian-Schan nicht seltenes Vorkommen — dennoch keine vollkommene Wasserscheide zwischen den beiden Hauptentwässerungsgebieten bildet.

Dieser Zwischenzug wurde über den durch Semenow und Sewerzow bekannt gewordenen San-tasch-Pass (ca. 2150 m) überschritten, wobei sich Gelegenheit ergab, unsere ersten, dem Oberkarbon angehörigen Fossilien im Tian-Schan zu sammeln. Schon beim Abstiege vom Passe, der durch ausgedehnte Tertiärablagerungen führt, stösst man auf die ersten Zeichen einstiger

Vergletscherung dieses Gebietes, auf Syenit- und Porphyrblöcke, die aus den Hängen des Kungei-Tau und des Kuuluk-Tau vom Eise hieher gefrachtet wurden. Bald nachher, beim Abstiege von den tertiären Sandsteinhöhen bei Taldü-bulak, erblickt man in der Tiefe den weiten, begrünten, alten Seeboden von Karkara (ca. 2000 m), den im Süden eine lange, vielgipflige, kleine Gletscher tragende Kalkkette (Basch-oglü-tagh) umfasst und um etwa 1200 m überragt. An ihrem Rande sind die alten Seeterrassen (sog. Hanhai-Ablagerungen) gut erhalten. Im Norden und Nordwesten umschliessen das weit ausgedehnte Becken niedere, stumpfe Tertiärrücken (Sandstein und Konglomerate) der Hanhai-Serie, Ausläufer des Tschul-adür-Gebirges, hinter welchen die weit bedeutenderen Höhen des Ketmen-Tau hie und da vorblicken. Am Südostrande dieses Beckens hatte Herr Keidel das seltene Glück, in diesen, bisher als völlig fossilienleer geltenden Tertiärablagerungen eine kleine Fauna sammeln zu können, welche für den Charakter und die Altersbestimmung, wenigstens eines Teiles dieser Niederschläge, von grosser Bedeutung sein kann. In dem sonst einsamen, weiten Becken von Karkara wird in den Monaten Mai bis September ein für die Kirgisenbevölkerung dieser ausgedehnten Gebirgsgebiete bedeutungsvoller Jahrmarkt abgehalten, während welcher Zeit die Behörden dort ihren Sitz nehmen.

Ich hatte mit ihrer Hilfe hier die Karawane zusammenzustellen und für die Gebirgsreise zu organisieren, wodurch ich bis zum 7. Juli festgehalten wurde. Die Weiterreise zu der hart an der chinesischen Grenze gelegenen Kosakenstaniza Narynkol (Ochotnitschi) führte durch eine Landschaft, deren Relief durchaus der Wirkung einstiger Eistätigkeit seine Entstehung verdankt. Die Gipfel der am Südrande ragenden Ketten Basch-oglü und Kapül werden durch weite, trogförmige Hochmulden getrennt, in deren jeder ein kleines Firnfeld und ein kurzer Gletscher liegen. Wie man deutlich zu sehen vermag, sind dies nur Reste ehemaliger, in einer Glazialepoche sehr ausgedehnt gewesener Eisströme, deren Verlauf man an den nun begrünten, intakt gebliebenen Grund-, Seiten- und Stirn-Moränen

gut verfolgen kann. Alle Oberflächenformen, welche eine vom Eise verlassene Landschaft charakterisieren, auch Drumlins, können hier beobachtet werden. Bei einem zweiten Besuche der Gegend, ein Jahr später, führte mich der Weg in ein grosses Seitental (Basch-kara-bulak), wo ich Gelegenheit hatte, diese typischen Formen einer entschwundenen, bisher für den Tian-Schan nicht festgestellten Glazialepoche genauer zu untersuchen und bis in die karartigen Weitungen des Gebirges zu verfolgen, wo einstens grosse Firmassen lagerten. Nach Sarydschass-tute wird das Flussbett des Tschalkodü-su verlassen und durch den Einschnitt des Seitentales Tute in das Tekes-Tal eingetreten. Beim Anblicke der Gebirgsumwallung drängt sich dem Beobachter schon auf diesem Wege eine Erscheinung auf, die typisch für die zentralasiatischen Gebirge und besonders für den Tian-Schan ist: Die Mündungen der grossen Quertäler älterer Entstehung sind stets weit geöffnet und ihr Boden liegt dort im gleichen Niveau mit dem des Haupttales, eine Folge der ungeheuren Aufschüttung im Gebiete schwachen Abflusses, wodurch der Fuss des Gebirgsrandes verhüllt wird. Der Weg nach Narynkol bewegt sich fast nur im Gebiete des Tertiärs, alter See- und Flussablagerungen und nur im erwähnten Engtale des Tute wird eine Zone von Quarzporphyren und Hornsteinporphyren quer durchschnitten, an deren Fusse wieder das Tertiär liegt.

Am 9. Juli traf die Expedition in dem nahe am Nordfusse des zentralen Tian-Schan gelegenen Narynkol (ca. 1900 m) ein, dem Orte, der nun für längere Zeit als Stützpunkt für die Forschungen im Hochgebirge diente. Während Herr Keidel sich mit der Untersuchung des Tertiärs der Tekes-Ebene und der dahinter im Süden aufragenden Ketten karbonischer Kalke beschäftigte, reiste ich das Tekes-Tal beiläufig 20 Werst abwärts nach Osten, zur Mündung eines nach Süden in das Gebirge einschneidenden Quertales: Mukur-Mutu. Zwischen den grossen Quertälern des Grossen und des Kleinen Musart-Flusses, die in beiläufig südlicher Richtung in den Nordrand der Hauptkette einschneiden, wird diese hauptsächlich nur durch drei kurze

Quertäler geteilt, die Mukur-mutu-Täler, die schon nach kurzem Laufe auf einem ausgedehnten Plateau enden. Die kalmakische Bevölkerung des Tekes-Tales versteht übrigens unter dem Namen Mukur-mutu überhaupt den ganzen Abhang des Gebirges zwischen Grossem und Kleinem Musart, also das Gebiet, welches im Osten und Westen von den genannten grossen Tälern, im Süden und Südosten von den Tälern Maraltö und Dondukol, im Südwesten vom Ürtentö-Tal begrenzt wird, Täler, von welchen im Laufe der Ausführungen vielfach die Rede sein wird. Die Erosion hat in dem hohen Plateaugebiete, auf dem die Mukur-mutu-Täler ihren Ursprung nehmen, nur breite Rinnen von geringer Tiefe ausgearbeitet. Die gipfelreichen Ketten, welche das Gebiet aller obengenannten Täler umwallen, bilden zu gleicher Zeit die Begrenzung, den Rand der Plateaumasse, welche ihrerseits nur zu kuppenartigen Höhen anschwillt. Nach der 40 Werstkarte scheint es, dass sich in der südlichen Umwallung des Plateaus der Khan-Tengri erhebe, und hierüber Gewissheit zu erlangen, war die Veranlassung zu dieser Wanderung, als deren Ergebnis sich herausstellte, dass alle russischen Karten in diesem Kardinalpunkte unrichtig sind, und dass der kulminierende Tian-Schan-Gipfel an anderer Stelle zu suchen ist. Die Decke des Hochgebietes der Mukur-mutu-Täler ist alter Moränenboden, auf abradierte, steil gestellte Schiefer- und Kalkschichten abgelagert; heute ist er mit dichten Wäldern und einer Alpenflora von nie gesehener Üppigkeit bestanden. In den dunklen, fossilienführenden Kalken, welche die Hauptmasse dieses Gebietes bilden, sind Granite eingefaltet, welche über die abradierten Sedimente in Klippen hoch hinausragen. Die Kalke haben, ohne stark kristallinisch geworden zu sein, ungeheure Pressung erfahren, und die in einzelnen Bänken eingeschlossenen Fossilien wurden durch den Druck stark verändert. Nichtsdestoweniger konnte dort eine kleine, bestimmbare Fauna gesammelt werden. Bei einem zweiten Besuche des Tales im folgenden Jahre glückte es sogar, an einer anderen Stelle weit besseres Material zu sammeln und hiedurch das Alter der Kalke als unterkarbonisch zu bestimmen.

Diese Serie folgt dem Streichen der Granite durchschnittlich N. 35°,0, denen weiter im Süden wieder Kalke folgen; sie variiert jedoch weiterhin und geht in eine fast entgegengesetzte Richtung über. Brüche durchsetzen das Gebiet, und ein Teil der das Plateau bildenden Kalkmasse ist auf bedeutende Länge nach Süden gegen eine grabenartige Senkung niedergegangen, deren Achse das quer durch das Plateau ziehende Hochtal Maraltö folgt. Eine genauere Schilderung dieses interessanten Gebietes zu entwerfen, ist bei der Knappheit des zur Verfügung stehenden Raumes hier nicht möglich.

Nachdem wir beim Ersteigen einer bedeutenden Höhe die beiläufige Richtung der Lage des Khan-Tengri festgestellt hatten, galt es, die wirkliche Stellung des Gipfels zu erkunden, wozu wir uns in das grosse Quertal Bayumkol begaben, das in seinem Schlusse in zwei Ästen gabelt, einem nach Süden und Südwesten, und einem nach Südosten ausgreifenden, beide sind von bedeutenden Gletschern erfüllt und werden von einer total vergletscherten Kette umwallt, deren Gipfel mit zu den höchsten des zentralen Tian-Schan gehören, also bis zu 6000 m und darüber ansteigen. Diese Ketten bilden einen Teil des zentralen, wasserscheidenden Tian-Schan-Hauptkammes. Der dem Tale entströmende, wasserreiche Fluss nimmt bei seinem Austritt aus dem Gebirge in das ungemein breite Tekes-Tal zunächst östliche Richtung, wo er die ausgedehnten Becken zweier ehemaliger Randseen durchfliesst. Sobald man das eine, beiläufig 8 Werst lange Seebecken durch eine enge Pforte in seiner Umwallung verlassen hat, betritt man ein anderes, ebenfalls sehr umfangreiches Becken, dessen Nordumrandung ein mässig hoher Kalkzug bildet. Die terrassenförmigen Ränder des eben verlassenen, alten Beckens (Sandstein und Konglomerate) setzen sich am Fusse des Kalkzuges entlang fort. In diesem Kalkwalle bemerkt man gerade gegenüber der Mündung des Bayumkol-Tales am Nordrande des Seebeckens eine torartige Bresche, durch welche jetzt nur ein unbedeutendes Flüsschen (Ukurtschö) geradewegs hinaus nach Norden gegen den Tekes fliesst. Der Bayumkol-Fluss hingegen biegt unmittelbar

bei seinem Austritt aus dem Gebirge, statt seinen Nordlauf fortzusetzen, wo ihn hier in der breiten Ebene nichts hindern würde, das Felsentor im Norden zu erreichen und direkt dem Tekes-Tale zuzuströmen, plötzlich nach Osten um und trifft sofort auf eine ihm im Wege stehende Kalkklippe (Tas-tube), die er durchbrechen muss; er sägt sein Bett tief in die Kalkfelsen am Rande des Gebirges ein, um seinen Weiterlauf nach Osten, Nordosten und Norden fortsetzen zu können, bis er endlich den Tekes erreicht. Was konnte den Fluss zu diesem komplizierten Wege veranlassen? Offenbar hatte er früher die Richtung gerade nach Norden über die Ebene und durch die einst von ihm selbst geschaffene Bresche genommen, bis ihm in der Glazialzeit entweder Eismassen, oder späterhin Geröllablagerungen diesen Weg verlegten und ihn in die Ostrichtung zwangen.

Für die Bedeutung der einstigen Vergletscherung legen alte Moränenmassen im Tekes-Tale Zeugnis ab, an deren Form und Anordnung ich zu erkennen vermochte, dass die aus dem Gebirge vordringenden Eismassen die Kammhöhe der ersten Randkette einst überflutet hatten. Die Mündung des Bayumkol-Tales ist fast 2 Werst breit geöffnet, die Sohle liegt im gleichen Niveau mit dem Haupttale (ca. 2100 m) und steigt, da ungeheure Aufschüttungsmassen das alte Bodenrelief verhüllen, nur ganz mässig an (35 m pro Werst). Das Tal ist in beckenartige, bis zu $1^1/_2$ Werst Breite erreichende Weitungen gegliedert, die durch Zusammenschnürungen bis zu 350 m voneinander getrennt sind. Von diesen Weitungen enthielten die meisten Seen, durch alte Stirnmoränen aufgestaut, die in der Rückzugsperiode des gewaltigen, früheren Talgletschers hintereinander aufgeworfen wurden. Nur bei zweien dieser Weitungen konnte ich andere Ursachen für ihre Entstehung erkunden. Eine in der Nähe der Mündung des Tales Ak-kul ist zweifellos durch seitliche Erosion des Talflusses gebildet oder doch ausgestaltet worden, eine andere, bei der Mündung des Tales Törascha, entstand infolge einer Verwerfung zwischen Kalken und chloritischen Schiefern. Von den alten Moränenablagerungen

im Tale ist vieles vorzüglich erhalten geblieben. Am Eingange des Bayumkol-Tales bildet Granit die Umwallung, an den sich bald fossilienleere Kalke und Kalkschiefer, sowie dunkle Tonschiefer und phyllitische Schiefer anschliessen, worauf wieder Granite und zwar solche sehr verschiedenartiger Ausbildung folgen. Kalke, Kalkschiefer, Tonschiefer, Gneis und andere kristallinische Schiefer bilden weiterhin den geologischen Bestand und wechseln der ganzen Länge des Tales nach in unausgesetzter Reihenfolge und zwar in sehr eigenartigen Lagerungsverhältnissen, auf welche indessen hier nicht weiter eingegangen werden kann. Ein durch Herrn Keidel aufgenommenes geologisches Profil wird in dieser Hinsicht Aufklärungen geben, die auch für andere der nördlichen Quertäler als typisch angesehen werden dürfen. Hervorgehoben sei nur, dass Granit und Gneis vorherrschend am Baue der Umwallung beteiligt sind, dass die Sedimente immer wieder eingepresst zwischen den Graniten und zwar ohne Kontaktbildung erscheinen, und dass die Granite Merkmale starker Auswalzung zeigen, was auf Faltungsprozesse hindeutet, die beide Arten von Gesteinen gemeinschaftlich betroffen haben. Ferner sei der Einlagerung diabasischer Gesteine, besonders diabasischer Schiefer gedacht. Endlich möge schon jetzt auf die wichtige Tatsache hingewiesen werden, die hier im Bayumkol-Tale zuerst festgestellt wurde und ihre Bestätigung dann in sämtlichen, von der Expedition besuchten, zum Hauptkamme hinleitenden Tian-Schan-Tälern fand: die kristallinischen Gesteine reichen stets nur in mehr oder weniger grosse Nähe des wasserscheidenden Hauptkammes. Dieser selbst, also der höchste Teil des Gebirges, ist ausschliesslich aus Sedimenten aufgebaut, die durch dynamo-metamorphische Prozesse, zum Teil auch infolge Durchbruchs diabasischer Gesteine, starke Umwandlungen erfuhren. Am Baue der zentralsten und höchsten Region des zentralen Tian-Schan beteiligen sich nur Kalke verschiedener Art, vorzugsweise dichte, dann dunkle Tonschiefer sehr verschiedenartiger Ausbildung, doch überwiegend dunkle mit Tafelschiefercharakter und Marmore von verschiedener Färbung, meist weisse oder hell gebänderte.

Kurz vor der Mündung des Nebentales Aschu-tör sieht man plötzlich hinter einem quer über das Haupttal laufenden Waldgürtel die grossartige Pyramide des Khan-Tengri auftauchen. Der Berg erscheint so genähert, dass man den täuschenden Eindruck empfängt, er stehe im Hintergrunde des Bayumkol-Tales, als nehme das Tal an seiner Nordflanke den Ursprung. Indessen fanden wir dort zwar einen grossartig vergletscherten Talschluss, einen Kranz vom Fusse bis zum Scheitel in Eis gehüllter, sehr hoher Berge, allein der Khan-Tengri befand sich nicht unter ihnen. Bei dem Umstande, dass der Berg keinen ebenbürtigen Rivalen besitzt, dass er die höchsten Gipfel der nahe an ihm gelegenen Ketten noch immer um beiläufig 1000 m überragt, wird er eben von allen Seiten, sobald man sich in entsprechender Entfernung von ihm befindet, sichtbar. Seine Lage zu erkunden, sollte neben der geologischen Erforschung der Talumrandung und topographischen Aufnahme der Bayumkol-Gletscher die Aufgabe der nächsten Zeit bilden.

Diese Arbeiten konnten indes wegen der ausserordentlichen Unbeständigkeit der Witterung in einem Zeitraume von zwei Wochen nicht zu Ende geführt werden, sondern erst bei einem späteren, wiederholten Besuche des Tales.

Der Sommer 1902 zeichnete sich überhaupt durch unbeständige Witterung aus, doch wird diese in den Hochtälern des zentralen Tian-Schan ausserdem durch lokale Verhältnisse in erheblicher Weise beeinflusst. Wie es sich im Verlaufe der Reise erwies und durch die mit Regelmässigkeit zweimal täglich ausgeführten meteorologischen Beobachtungen festgestellt werden konnte, ist jedem Tal sein besonderer Witterungscharakter zu eigen, der im wesentlichen von dessen Achsenrichtung abhängt. Für das Bayumkol-Tal ist massgebend, dass es, nach Norden breit geöffnet, unmittelbar in die Weitung der Tekes-Ebene mündet. Die dort während der Nacht stagnierenden und stark abgekühlten Luftschichten werden gegen Mittag durch die ungemein kräftige Insolation des Steppenbodens bedeutend aufgelockert, nehmen einen stürmischen Verlauf

gegen das Gebirge hin und dringen durch die breiten Lücken des Bayumkol-Tales zu dessen hochgelegenen Teilen empor, wo sie an den gegen Norden und Nordosten gerichteten, verhältnismässig kühlen Gehängen, an Temperatur rasch abnehmend, ihren Dampfgehalt kondensieren. Die Witterung im Hochtale war gewöhnlich vormittags gut, aber die Gewalt des mit Regelmässigkeit in den Mittagsstunden von der Ebene aufsteigenden Luftstromes ist so gross, dass sie die bis dahin im Hochtal herrschende Windströmung verdrängt, welche erst gegen Abend wieder in ihre mit Aufklärung verbundenen Rechte tritt. Mit grosser Regelmässigkeit trübte sich die Atmosphäre täglich gegen Mittag um 2 oder 3 Uhr; es begannen Regengüsse oder Schneestürme, worauf abends oder nachts wieder klares Wetter herrschte. Diese Winde kondensieren übrigens ihre Feuchtigkeit schon in den mittleren Höhen und die höchsten Kämme empfangen nur wenig hievon. Im Hauptlager (ca. 3200 m) war die Witterung stets schlechter als auf den um 1000 bis 2000 m höheren Lagen, wo wir gerade beschäftigt waren, die Niederschläge also andauernder und ergiebiger. Die trockene und konsistenzlose Beschaffenheit des Schnees auf den extremen Höhen des Tian-Schan, wovon noch mehr die Rede sein wird, findet zum Teil schon hiedurch eine Erklärung, wenn allerdings auch noch andere Umstände hierauf von Einfluss sind.

Der Hintergrund des Bayumkol-Tales besteht aus zwei, von grossen Gletschern erfüllten Aesten, von denen der eine nach Südwest, der andere nach Südost gabelt. In der Umrandung des Südostgletschers fiel uns ein gewaltiger, breitmassiger Berg auf, von dessen schneeiger Schulter, wenig unterhalb seines Gipfelkammes, eine fast 2000 m hohe, senkrechte Wand direkt zu Tale setzt; sie besteht aus weissem und gebändertem Marmor, weshalb wir den Berg zunächst „die Marmorwand“ tauften. Neben dem Khan-Tengri ist dieser gewaltige Berg ein Wahrzeichen des zentralen Tian-Schan, ein Orientierungspunkt. Man erblickt ihn wegen seiner bedeutenden Höhe, und da er gerade im Schnittpunkte der Hauptkammverzweigungen aufragt, von weit und breit, von allen hochgelegenen Punkten aus. Auch

aus der Tekes-Ebene erkennt man ihn sofort an seiner merkwürdigen Gestalt und an seiner firnentblössten Absturzwand. Es sollte sich jedoch erst später herausstellen, welch wichtige Rolle ihm im Baue des Tian-Schan zukommt.

Der Versuch einer Ersteigung dieses Gipfels musste infolge unüberwindlicher, misslicher Umstände aufgegeben werden, nachdem uns die Überschreitung von mehreren, ca. 5000 m hohen, vorgelagerten Firnkuppen bis zum Fusse des Gipfelgrates geführt hatte. Bei dieser Gelegenheit wurden wichtige telephotographische Aufnahmen gemacht, die für die Feststellung des komplizierten, auf allen vorhandenen Karten unrichtig dargestellten Baues der Täler und Kämme des zentralen Tian-Schan von besonderem Werte sind. Auch führte dieser Versuch zur Entdeckung eines bisher unbekannten, gänzlich mit Gletschereis ausgefüllten Tales, das bei einer beiläufigen Ausdehnung von 40 Werst von der „Marmorwand" weg zuerst nach Nordosten, dann nach Osten zieht und, endlich Südostrichtung annehmend, nahe am Musart-Passe ausmündet. Die dieses Tal an seinem Südrande begrenzende, völlig überfirnte Kette, deren mittlere Höhe ca. 5000 m beträgt, deren höchste Gipfel aber ca. 6000 m erreichen, bildet einen Teil des wasserscheidenden Hauptkammes zwischen Nord- und Südabhang des zentralen Tian-Schan. Die Erwartung, in ihr den Khan-Tengri aufragen zu sehen, wurde getäuscht, und nur soviel konnte festgestellt werden, dass da, wo den russischen Karten zufolge der Khan-Tengri sich erheben müsste, in Wirklichkeit die „Marmorwand" sich findet.

Die breiten Massen des von Osten nach Westen ziehenden Gebirges erscheinen hier nur von wenigen, tiefen Tallinien durchschnitten und in einzelne Massive zerlegt, deren Decken jedoch in überwiegender Weise nur durch Hochmulden oder nicht stark eingetiefte Rinnen zerteilt sind. Die Mündungen jener, kleine Gletscher bergenden Hochtäler, liegen stets hoch über den Sohlen der Haupttalzüge. Dies deutet darauf hin, dass zur Zeit, als die Rinnen der Haupttäler noch hoch hinauf mit Eis erfüllt waren, die kleineren in diesen Hochtälern liegenden Zuflussgletscher im Eisniveau der Haupttalgletscher mündeten.

Als die Gletscher unten und oben sich zurückzogen, wobei die Seitengletscher natürlich rascher zurückgingen, als die Hauptgletscher, konnte bei der rasch zunehmenden Trockenheit des Klimas die Erosion durch fliessendes Wasser nicht mehr in erheblicher Weise zur Ausbildung jener jüngeren, hochgelegenen Täler beitragen, während anderseits, infolge verstärkter Abtragung der Gebirgskämme, die Auffüllung der Hohlräume mit Gebirgsschutt bedeutende Dimensionen annahm. Wir haben in dem Relief der Decken dieser Massive demnach das Ergebnis einer nur zu schwacher Wirkung gelangten Erosion und Ausräumung zu sehen, während in den tiefen Sammelrinnen beide energisch fortwirkten und auch jetzt noch kräftig weiterarbeiten. (Übertiefung.)

Um die wirkliche Lage des kulminierenden Tian-Schan-Gipfels zu erkunden, wurde beschlossen, eines der grössten Längstäler des zentralen Tian-Schan aufzusuchen, das Sary-dschass-Tal, das einen beiläufig latitudinalen Verlauf nimmt, und von dem russische Forscher bisher angenommen hatten, es nähme seine Entstehung am Westabhange des Khan-Tengri. Der Weg zu ihm führte die Expedition durch ein Seitental des Bayumkol-Tales, das Aschu-tör-Tal, nach Südsüdwesten und über einen ca. 3900 m hohen, vergletscherten Pass in das Karakol-Tal, durch welches, da es nach Südwesten hinausziehend, in das Sary-dschass-Tal mündet, letzteres erreicht wurde. Auch im Aschu-tör-Tale konnte Ineinanderfaltung kristallinischer Massen und umgewandelter Sedimente: Schiefer, Marmor, Kalke festgestellt werden. Ganz besonders auffällig ist jedoch in diesem Tale, wie in dem erwähnten Karakol-Tale, die unverkennbare Tatsache, dass ihre heutige Form zum überwiegenden Teile den Wirkungen einer einst ungeheuer mächtigen Vergletscherung zu danken ist, von welcher die heute noch vorhandenen Gletscherzungen und Firnbecken nur mehr verhältnismässig unbedeutende Reste sind.

Der Unterlauf des Karakol-Tales, schon infolge von Brüchen namhaft erweitert, ist durch die konvergierende Tätigkeit der zahlreichen, ehemals aus den Lücken der Umrandung vorbrechenden,

konzentrisch einmündenden Nebengletscher, sowie der des Hauptgletschers kesselförmig korradiert worden, ein wahres Lehrbeispiel für die Korrasionsarbeit des Eises. Dort bietet sich auch infolge der Brüche, sowie der mittelbar zerreibenden Stosskraft des Eises und der, wegen seiner nach Süden und Westen geöffneten Lage des Tales, besonders kräftig wirkenden Verwitterung ein Bild derartig vorgeschrittener Zerstörung der Bergwände, wie ich es selbst in dem an derartigen Erscheinungen reichen Tian-Schan selten vor Augen hatte. Diese Süd- und Westexposition, welche eine ausserordentliche Erwärmung der dunklen Felswände begünstigt, sowie starke Rückstrahlung sind auch die Ursache eines weit bedeutenderen Rückganges des Karakol-Gletschers und seiner Nebengletscher, als ich ihn in irgend einem anderen, gleich hoch gelegenen Teile des Tian-Schan beobachtet habe.

Der Karakol-Gletscher mündete einst 12 Werst unterhalb seines jetzigen Endes zu dem ehemals das Sary-dschass-Tal ausfüllenden Riesengletscher ein. Jetzt ist dieser Sary-dschass-Gletscher zwar auf den Oberlauf des Tales beschränkt, gehört jedoch immerhin auch jetzt noch zu den bedeutendsten Eisströmen des Tian-Schan und wurde dem berühmten ersten Erforscher des Tian-Schan-Gebirges zu Ehren „Semenow-Gletscher" genannt.

Auch im Sary-dschass-Tale erblickt man, selbst von hochgelegenen Punkten der Umrandung des mittleren Tallaufes aus, den Khan-Tengri in solcher Stellung, dass man glauben möchte, er erhebe sich im Hintergrunde dieses Tales, was die eben erwähnte Annahme russischer Forscher erklärlich macht. Allerdings hätte die gewundene Form des Tallaufes zur Vorsicht in dieser Beziehung mahnen sollen.

Die Lage des Tales im Herzen des zentralen Tian-Schan, die Übersichtlichkeit der Uferketten mehrerer, bisher unbekannter Parallel- und Seitentäler liess es geboten erscheinen, als Hilfsmittel zur Feststellung der unaufgeklärten Topographie des zentralen Tian-Schan, hier Gebrauch von der Telephotographie zu machen. Von einem ca. 4200 m hohen Standpunkte aus wurde die gesamte, hier sichtbare Gebirgswelt in einem Tele-

panorama von zwölf Blättern grossen Formates aufgenommen. Unterhalb dieser Stelle wurde eine längere Basis abgesteckt, und von ihr aus Lage und Höhe des Khan-Tengri und der bedeutendsten Gipfel des zentralen Tian-Schan bestimmt. Daran schloss sich später die Vermessung des Tales und seines Gletschers mittels Triangulation.

Über die vertikale Entwickelung des zentralen Tian-Schan lässt sich hier sagen, dass die höchsten Erhebungen in der Umrandung des Bayumkol-Tales, und zwar zwischen diesem und dem Semenow-Gletscher stehen, denen einige der grossartigen Eisgipfel am Südrande des Adür-tör oder Muschketow-Gletschers mehr als ebenbürtig sein dürften, dass aber sie alle noch überragt werden von den Bergen am Südrande des Inyltschek-Gletschers und dass jedenfalls die mittlere Kamm- und mittlere Gipfelhöhe dieser letzteren Kette als die höchste Scheitelhöhe des Tian-Schan anzusehen ist, worauf sich wieder allmähliche Abdachung nach Süden geltend macht.

Für die Richtigkeit unserer früheren Entdeckung, dass nämlich nicht, wie bisher angenommen wurde, der Khan-Tengri der Scharungspunkt der bedeutendsten, divergierenden Ketten des zentralen Tian-Schan sei, sondern dass diese Rolle der „Marmorwand“ zukomme, und dass sie an dem gleichen Punkte sich erhebe, an dem den russischen Karten zufolge der Khan-Tengri sich erheben müsste, boten sich auch hier genügende Beweise. Doch war noch immer keine Sicherheit zu gewinnen über das Tal und seinen Verlauf, aus dem die Gipfelpyramide des Khan-Tengri ansteigt. Eine Begehung des Semenow-Gletschers und die Erklimmung einiger, 4—5000 m hoher Gipfel in seiner Umrandung führte nur zur Feststellung, dass der gesuchte Kulminationspunkt des Tian-Schan sich auch im Sary-dschass-Tale nicht erhebt und dass die bisherigen Vorstellungen hievon unrichtig sind.

Das Sary-dschass-Tal ist das ausgedehnteste und deshalb das wichtigste aller Täler des zentralen Tian-Schan, weil ihm in seiner Eigenschaft als durchgreifendes Tal die Rolle zukommt, für die Entwässerung und Ableitung der Gewässer nach Süden

zum Tarim den grossen Sammelkanal zu bilden. Auf seine heutige Ausgestaltung ist zweifellos eine Glazialperiode von Einfluss gewesen. Die Bedeutung der im Tale vorhandenen Glazialablagerungen hat zwar P. P. Semenow schon gewürdigt; indessen ist deren Verbreitung doch eine weit mächtigere, als selbst dieser Forscher angenommen hat. Ich konnte solche Ablagerungen und andere Merkmale der Eiswirkung im Hauptfale (Mittellauf) und seinen Nebentälern bis zu 500 m über das heutige Flussniveau verfolgen, bis zu einer Höhe, dass man auf eine ehemalige, nahezu gänzliche Ausfüllung des Tales mit Gletschereis schliessen darf. Im Vergleich zu dieser einstigen Mächtigkeit sind die heute noch im Haupttale und in den ihm tributären Tälern vorhandenen Firn- und Eislager nur unbedeutend; dennoch sind sie, wie durch die Ergebnisse meiner Forschungen erwiesen wird, jedenfalls weit belangreicher, als man bisher angenommen hat.

Der grösste Gletscher des Gebietes, der Semenow-Gletscher, galt bisher als der ausgedehnteste des Tian-Schan. Es glückte mir indes, im Laufe der Expedition den Nachweis zu führen, dass er von anderen Eisströmen an Länge wesentlich, von einem um mehr als das Doppelte übertroffen wird. Nach Jgnatiew, der 1886 den Semenow-Gletscher besuchte, betrüge seine Länge 10 Werst, was gerade um das Dreifache zu gering geschätzt ist. Von seiner Breitenausdehnung und der seiner ihm tributären Gletscher hatte man bis jetzt überhaupt keine, nur annähernd zutreffende Vorstellung. Aus verschiedenen Ursachen, zum Teil auch als Folge der nach Westen gerichteten Achse des Sary-dschass-Oberlaufes, macht sich zunächst die Erscheinung geltend, dass der Hauptgletscher sich mehr zurückgezogen hat, als die heute noch vorhandenen Seitengletscher, welche, wenigstens die im obersten Tallaufe einmündenden, ihre frühere horizontale Ausdehnung, wenn auch nicht ihre ehemalige Mächtigkeit nahezu beibehalten haben. Dies trifft jedoch nur auf die am orographisch linken Ufer einmündenden zu, weil deren Achse nach Norden gerichtet ist. Die Zungenenden hängen dort als Eislappen an den Mündungen auf Grundmoränenschutt, 2—300 m

über der heutigen Sohle des Haupttales, soweit dieses von Eis frei ist. Von denjenigen Nebengletschern, welche schon im Gebiete des heute noch vorhandenen Hauptgletschers enden, erreichen die Endzungen der ersten drei diesen auch nicht mehr, schweben vielmehr 100–150 m über dessen Eisniveau. Alle weiter nach Osten zu in den Hauptgletscher einmündenden, zum Teil sehr ausgedehnten Nebengletscher vereinen sich jedoch mit dem Hauptstrome und ihr Gesamt-Sohlenniveau liegt in einer Ebene mit dem des letzteren. Die ungemein geringe Neigung aller dieser Eisströme — sie beträgt im Mittel- und Oberlaufe des Hauptgletschers nur 25 m pro Werst — dürfte auf bedeutende Aufschüttung der Talrinnen mit Gebirgsschutt in einer Zeit hinweisen, als sie noch nicht vom Eise bedeckt waren. Die am rechten Ufer mündenden Quertäler, wenigstens die im jetzt eisfreien Teile des Haupttales mündenden, besitzen, da ihre Achse nach Süden gerichtet ist, heute keine Talgletscher mehr. Nur am Schlusse einiger von ihnen sieht man noch kleinere Firnfelder in Karen lagern. Die Mündungen dieser Seitentäler liegen 2—300 m über der Sohle des Haupttales. Man steigt zu ihnen über steile, begrünte, sumpfige, alte Grundmoränen empor. Während die linke Uferkette durch zahlreiche Quertäler zerschnitten ist, deren eigene Umwallungen wiederum tief geschartet, in viele schroffe, mannigfaltig geformte Gipfel aufgelöst erscheinen, wird die rechte Uferkette verhältnismässig selten durch Quertäler zerteilt, deren umgrenzende Wälle überdies weit weniger gebrochene Kammlinien, sondern plateauartige Decken (Destruktionsflächen) mit aufgesetzten Kuppen zeigen. Die heute noch wirksamen, gebirgsformenden Kräfte vermögen diese Tatsachen nicht zu erklären, welche vielmehr darauf schliessen lassen, dass schon vor Eintritt der jetzigen Eisbedeckung des Gebirges die Erosion am Nordabhange kräftiger gewirkt haben muss, als in dem nach Süden exponierten. Mithin dürften schon damals ähnliche, wenn auch vielleicht weniger scharf akzentuierte klimatische Verhältnisse bestanden haben, als jetzt. Die nördliche Talumwallung, vermutlich schon zu jener Zeit auf ihren, gegen Süden geneigten Kammböschungen von Eis

wiederholt auf längere Zeiträume entblösst, musste bei der steilen Stellung der sie aufbauenden Schieferschichten der Zerstörung, Abtragung und Abflachung ihres Reliefs weit mehr ausgesetzt sein, als die südliche, mit ihrer Böschung gegen Norden gerichteten Talumwallung.

Auf den klimatischen Unterschied zwischen Nord- und Südufer ist es auch zurückzuführen, dass die Endzunge des Gletschers auf mehr als 1 Werst Länge als schmaler Eisarm dem Südufer entlang läuft, während das nördliche Ufer dort eisfrei bleibt. Die gleiche Erscheinung konnte ich in der Folge an anderen, ähnlich exponierten Tian-Schan-Gletschern beobachten. Die Eiszunge des Semenow-Gletschers endigt bei ca. 3600 m (Beobachtungen in zwei aufeinander folgenden Jahren). Auch im Unterlaufe des Gletschers äussert sich der klimatische Unterschied zwischen beiden Ufern noch sehr stark und zwar hier insoferne, als die nach Süden gekehrte Uferkette lediglich auf ihrer nur schwach gegliederten Scheitelhöhe Firn und Eis trägt, während die schroffen, felsigen Abstürze nur in Schluchten und Rinnen solches bergen. Dagegen ist die nach Norden gewendete Uferkette in einen, nur selten eine Lücke zeigenden Mantel von Firn und Eis gekleidet. Vielfältig gegliedert dehnt sie sich als unabsehbare Reihe überfirnter Kegelberge, hornförmiger Gipfel und schroffer Eiswände nach Osten, einen grossartigen Anblick darbietend. Im Mittel- und Oberlaufe des Gletschers, wo dessen Achse mehr nach Nordosten gerichtet ist, erscheint auch der rechte Uferwall in sehr erheblichem Masse von Eis umhüllt, wenn er auch weder in dieser, noch in anderer Hinsicht und auch in Bezug auf Formenreichtum nicht die linke Uferkette erreicht, welche überdies wesentlich höher ist. Dieser letztere Umstand, sowie die Tatsache, dass der Gletscherboden gegen das nördliche Ufer hin abdacht, ist darauf zurückzuführen, dass die gesamte Gebirgsmasse nach Süden hin allmählich ansteigt. Infolge der Neigung des Eisbodens nach Norden haben die Schmelzwasser das Bestreben, nach dem rechten Ufer zu fliessen, und der Hauptbach entspringt deshalb nicht im Zungenende, sondern in einer Höhlung im

rechtsufrigen Eisabsturze der Zunge, mehrere Werst oberhalb des Zungenendes.

Gleiche Erscheinung, der gleichen Ursache zu danken, konnte ich an den anderen, nach Süden hin folgenden, grossen Gletschern beobachten. Der Gletscher hat nahe am Zungenende eine Breite von ca. $1^1/_2$ Werst, erweitert sich jedoch zusehends und erreicht im Mittellaufe eine solche von mehr als 3 Werst. Infolge seiner gewaltigen Ausdehnung und sehr geringen Neigung ist der Semenow-Gletscher ziemlich konstant. Ich habe ihn in zwei aufeinander folgenden Sommern besucht, nach allen Richtungen durchstreift und im ganzen über zwei Wochen auf seiner Eisdecke zugebracht, konnte aber, weder am Zungenende, noch an den Seitenwänden, Anzeichen einer, in neuerer Zeit stattgehabten Schrumpfung bemerken. Was unter den gegenwärtig dort herrschenden klimatischen Verhältnissen im Laufe eines kurzen Tian-Schan-Sommers abschmelzen kann, wird durch ausserordentlich bedeutende Zufuhren von Firn und Eis, die der Semenow-Gletscher besonders von den sehr grossen Nebentälern seines Oberlaufes empfängt, reichlich ersetzt. Solange überhaupt solch ungeheure Schneevorräte, wie ich sie in den ausgedehnten innersten Teilen des zentralen Tian-Schan gesehen habe, vorhanden sind, die sowohl wegen der dem Hochschnee dort eigenen, trockenen Beschaffenheit — hievon später mehr —, als wegen der niedrigen Lufttemperatur auf den extremen Höhen, nur sehr geringe Abschmelzung oder Verdunstung, hingegen viel Vermehrung durch neue Niederschläge erfahren, und solange deren durch eigene Schwere in tiefere Lage geführten Massen fortgesetzt für neue Firnbildung reiches Material liefern, besteht meines Erachtens keine Gefahr für Austrocknung des Tian-Schan.

Von allen grossen Gletschern des zentralen Tian-Schan, die ich besuchte, zeigt überhaupt der Semenow-Gletscher in seinem ganzen Habitus noch verhältnismässig am meisten Ähnlichkeit mit den grossen Gletschern der europäischen Alpen. Nur in einem Punkte unterscheidet er sich wesentlich von ihnen: in Bezug auf den grossen Reichtum an Eisseen; die

meisten haben trichterförmige Gestalt und sind in etwas unregelmässiger Anordnung an beiden Ufern des unteren und mittleren Tallaufes verteilt, doch zahlreicher am rechten Ufer. Manche haben bedeutende Ausdehnung (2—300 m) und bieten einen prachtvollen Anblick, wenn in ihren grünen oder blauen Fluten sich die Eisriesen der Gletscherumrandung spiegeln. Dieser Unterschied in der Färbung — die einen haben grünes, die anderen blaues Wasser — ist eine höchst eigentümliche Erscheinung. Im Oberlaufe des Gletschers finden sich keine Eisseen, aber in der rechten Ufermoräne zahlreiche, nicht unbedeutende Moränenseen eingebettet. Den obersten, nordöstlichen Teil des Gletschers bildet ein in zwei Stufen ansteigendes, sonst nur geringes Gefälle besitzendes, etwa 1 1/2 Werst breites ovales, muldenförmiges Firnbecken, eine Art Firnsee. An seinem Ende zeigt sich in dem Gebirgswall ein tiefer Einschnitt, den ich „Semenow-Pass" benenne. Die ganze Länge des Semenow-Gletschers vom Zungenende bis zu diesem Passe beträgt etwa 30 Werst. Die vom Gletscher transportierten Massen Gebirgsschuttes sind verhältnismässig gering. Die Seitenmoränen sind zu Ufermoränen geworden, die Mittelmoränen — deren sind es bloss zwei — empfangen nur wenig Material, wenn auch die grossen Seitentäler, von denen eines, bei einer durchschnittlichen Breite von 1 Werst, eine beiläufige Länge von 10 Werst hat, von grossartigen Gebirgsketten umwallt sind; deren prachtvolle Firn- und Eishüllen zeigen nämlich nur selten eine felsige Lücke. Im vorderen Teile der Seitenmoränen sind Granit und Kalk im allgemeinen mächtiger vertreten, als chloritische Schiefer und Tonschiefer; jedoch finden sich Kalke überhaupt nur in der linken Ufermoräne, weil dort ein Ausstreichen der aus Nordosten heranstreichenden Kalke stattfindet, die den rechten Uferwall nicht mehr erreichen. Die Mittelmoränen bestehen zunächst fast nur aus Graniten verschiedener Art, (Pegmatit und Syenit kommen vor) mit etwas Tonschiefer. Je mehr man sich jedoch dem Oberlaufe des Gletschers nähert, desto mehr werden sie von letzteren, dann stark veränderten Kalken, verschiedenartigen Schiefern, sowie Fragmenten von Diabas und diabasi-

schen Schiefern verdrängt Dies lässt darauf schliessen, dass die innerste Umwallung nur aus dieser Gesteinsserie besteht. Die dichte Firnbedeckung verhindert jedoch dort jeglichen Einblick in die Lagerungsverhältnisse. Auf die Einzelheiten der Forschungen näher einzugehen, die von der Expedition auf dem Semenow-Gletscher gemacht wurden, verbietet der diesem Bericht zur Verfügung stehende, knappe Raum.

Die Erklimmung hoher Aussichtswarten an den Gletscherrändern wurde nicht nur durch die Ungunst der Witterungsverhältnisse vielfach erschwert, und ihr Zweck dadurch beeinträchtigt, sondern auch durch die ungünstige Beschaffenheit der Schneedecke, die sich im Tian-Schan allenthalben zeigt, sobald man die Höhengrenze von beiläufig 4000 m überschritten hat. Auf eine Ursache dieser Erscheinung habe ich schon S. 286 hingewiesen. Der auf den extremen Höhen des Tian-Schan zum Niederschlage gelangende Schnee besitzt eigentümliche Kristallisationsform und ist pulverig trocken. Die Luftschichten dieser Höhen sind ungemein feuchtigkeitsarm, bewirken aber in so geartetem Schnee keine Verdunstung. Auch unter dem Einflusse der Insolation kommt es, bei beständiger Bewegung der oberen Luftschichten und ihrer niederen Temperatur, auf diesen Höhen zu keinem Auftauen der oberen Schichte bei Tag und demgemäss auch zu keinem Gefrieren in Form einer Kruste bei Nacht. Höchstens finden solche Vorgänge, wenn auch nur in schwachem Masse, an den gegen Süden und Westen gerichteten Hängen statt, an den Nord- und Osthängen hingegen in der Regel nicht. Dort machen im Gegenteil die starken Nachtfröste den Schnee nur noch trockener. Dieses verhindert ein Zusammenballen, und man tritt metertief in das Schneemehl ein. Liegt der pulvrige Schnee aber einer Schichte alten Schnees auf, die durch die erwähnten Prozesse an einzelnen, günstige Bedingungen hiefür bietenden Stellen eine eisige Oberfläche angenommen hat, oder durch den Druck der sie überlagernden Schichten allmählich gefestigt wurde, dann ist die Gefahr gross, dass die lockere, obere Schichte an steilem Gehänge, wenn man sie betritt, sich

loslöst und mit den auf ihr sich gerade befindlichen Menschen zur Tiefe gleitet. Schon bald sollte sich dies bewahrheiten.

Bei der Ersteigung eines ca. 5300 m hohen, gänzlich überfirnten Gipfels, der im Oberlaufe des Adür-tör oder Muschketow-Gletschers an dessen Südrand sich erhebt, — dieser 20 Werst lange Gletscher zieht beiläufig parallel mit dem Semenow-Gletscher und entspringt einem beiden Gletschern gemeinsamen Nährbassin, — kam die ganze Gesellschaft, nur mehr ca. 120 m unter der Gipfelhöhe, infolge Bruches und Abrutschens der Schneedecke in das Gleiten und wäre verloren gewesen, wenn sie nicht durch eine etwa 200 m tiefer aus der Bergflanke vorspringende, kleine Stufe glücklicherweise noch aufgehalten worden wäre. Es war dies um so bedauerlicher, als die Erreichung des Gipfels, wenn sie geglückt wäre, schon um ein Jahr früher zur Entdeckung der wirklichen Lage des Khan-Tengri geführt hätte, als es tatsächlich der Fall war. Da wir diesen Berg auch im Sary-dschass-Tale nicht entdecken konnten, verliessen wir es nach mehrwöchentlicher Arbeit, die auch der Untersuchung des geologischen Baues der Talumrandung und der Einsammlung karbonischer Fossilien gewidmet war.

Das nächste, grosse Längstal, das Inyltschek-Tal, sollte nun aufgesucht werden. Wir wanderten etwa 35 Werst im Sary-dschass-Tale abwärts. Die weiten, grünen Gefilde dieses Tales — durchschnittliche Talbreite 1 1/2 Werst, jedoch Erweiterungen bis zu 3 Werst — mit dem Charakter der baum- und strauchlosen Hochsteppe, tragen sanfte, gerundete Formen zur Schau, eine Folge der die Talwände umhüllenden, alten Moränenablagerungen. Solche Reste von Ufermoränen begleiten, links gut erhalten, in zwei Stufen streckenweise den Oberlauf des Tales. Am rechten Ufer findet man sogar auf den plateauförmigen Kämmen noch erratische Blöcke und Moränenschutt, sowie an beiden Ufern hoch an den Felswänden Gletscherschliffe. Den Talboden füllt alte Grundmoräne, sumpfige Wiesen mit kleinen Seen, den Relikten der die beckenförmigen Weitungen ehemals füllenden, durch Endmoränen eingedämmt gewesenen, grossen Seen. Aus einer breiten Lücke des niederen

Kalkzuges am linken Ufer fliesst, ca. 10 Werst unterhalb der Adür-tör-Mündung, dem Sary-dschass der wasserreiche Tüs-aschu-Bach zu, der ein vielverzweigtes Talgebiet entwässert. In den Karten ist es nicht berücksichtigt. Diese Talgruppe liegt in einem nach Nordwesten abdachenden Gebirgskomplex, eingeschlossen zwischen der das linke Ufer des Adür-tör-Tales bildenden, hohen Kette, die nach Nordwesten streicht und der nach Südwesten streichenden, am rechten Ufer des Inyltschek-Tales ragenden Kette. In dem flachen Winkel, der durch das kräftige Auseinandertreten der beiden Ketten entsteht, liegt plateauförmig ein ausgedehntes, sanft geneigtes Firngebiet, in den beiden divergierenden Ketten zu flach zeltförmigen Firngipfeln anschwellend. Aus den Lücken dieser, einen weiten Kranz bildenden Erhebungen, ziehen flache, muldenförmige, mit Firn gefüllte Talfurchen hinab, in radialem Verlauf die ganz allmählich gegen das Sary-dschass-Tal abdachende, breite Landscholle zerlegend. Durch einen hohen, von der Erosion verschont gebliebenen Plateaurücken (Tur) wird dieser Talkomplex in zwei Gruppen gegliedert: die der Kusgun-ya-Täler, von denen später die Rede sein wird und die der Tüs-aschu-Täler. (Tüs-aschu bedeutet Verzweigung eines flachen Ortes.) Die in den weiten, flachen Hochmulden der Quelltäler liegenden Firnfelder sind jetzt durch Rippen beträchtlicher Mengen Moränenschuttes voneinander getrennt. Nur zwei von ihnen zeigen noch ansehnliche Gletscherzungen, die jedoch auch schon bald auf Grundmoränenschutt auslaufen. Der ganzen Anordnung nach fällt es sofort in die Augen, dass alles, was hier jetzt von isolierten Firnfeldern vorhanden ist, nur die Reste einer einst zusammenhängenden, sehr ausgedehnten Firndecke bilde. Ein grosser Gletscher hat sich ehedem aus diesen Firnmassen entwickelt, die tiefer gelegenen Teile des Landstriches überflutet und sich mit dem früheren, gewaltigen Sary-dschass-Gletscher vereint. Das ganze breite Tüs-aschu-Tal, das zu den bevorzugten Weideplätzen der Kirgisen gehört, stellt eine grossartige Moränenlandschaft dar, wie man sie typischer selten irgendwo zu sehen bekommt. Auch die Felswände sind hoch hinauf

vom Eise abgeschliffen. Ich konnte später von hochgelegenen Standpunkten aus feststellen, dass der grosse Gletscher, dem sie zu danken ist, aus der Vereinigung der Eismassen der südlichen Randkette des Muschketow-Gletschers mit denen der nördlichen Uferkette des Inyltschek-Gletschers sich gebildet hatte. In der trogförmigen Senkung des Tüs-aschu-Gebietes sind die Gebirge in Moränenschutt — jetzt mit sumpfigen Alpenwiesen bedeckt — förmlich begraben, so dass nur an wenigen Stellen das Gestein zutage tritt: Kalk, in enge, nach Norden verlaufende Falten gelegt, Granit, phyllitische Schiefer. In dem Scheidewalle zwischen Tüs-aschu und Inyltschek ist ein vergletscherter Pass (ca. 4050 m) eingetieft, den ich als den kürzesten Zugang zum Inyltsckek-Tale mit der Karawane überschritt, nicht ohne Schwierigkeit. Ich nenne ihn „Tüs-aschu-Pass".

Man bewegt sich beim Aufstiege zum Passe zwischen Ostnordost streichenden Kalken und Kalkschiefern, die in der Nähe des Passes nach Norden überschobene Falten bilden, an deren Rand Granit sich erhebt. Infolge der engen Berührung mit dem Granit ist von dem grossen Fossilienreichtum dieser karbonischen Kalke nur sehr wenig erhalten. Immerhin gelang es, bei späterer, wiederholter Überschreitung des Passes einiges Bestimmbares zu sammeln. Auf seiner Südseite sind die Kalke rot gebrannt, gefrittet und stark zerrüttet. Konglomerate und Reibungs-Breccien finden sich vor, den Durchbruch von Eruptivgesteinen verkündend, deren Ausbruchsstelle ich erst später auf der Nordseite des Passes, im nahen Kusgun-ya-Tale fand. Wendet man sich aus dem torartigen Passeinschnitte nach Süden und Osten, so erblickt man ca. 1000 m tiefer den geröllbedeckten Boden der breiten Furche des Inyltschek-Tales, umwallt von vielgipfligen, überfirnten Hochgebirgen, deren mittlere Kammlinie schon 2500 m über der Sohle liegt, während die Gipfel 800—1000 m höher ragen. Ein um eine Stufe höher liegendes, ausserordentlich ausgedehntes Eisfeld zieht in gleicher Umwallung weit gegen Osten hin. Mag das Auge des Beschauers auch durch den Anblick der höchsten Anschwellungen der Erdoberfläche an gewaltige Verhältnisse gewöhnt sein, so wird die erste Erscheinung der

ungemein steil abfallenden südlichen Randkette des Inyltschek-Tales dennoch den Eindruck des Erstaunens und der Bewunderung hervorrufen. Die grossartigste Erhebung des Tian-Schan entfaltet sich hier: eine Riesenkette der schroffsten und wildesten Felsgipfel, in den mannigfaltigsten Formen, welche gipfelbildende Kräfte je ausgemeisselt haben, sieht man in einer Länge von 75 Werst sich nach Osten dehnen — eines der grossartigsten Gebirgsbilder der Erde. In dieser stolzen Phalanx ist ein gegenüber dem Passe sich erhebender Berg, derselbe, den man auch im Tüs-aschu-Tale schon zum Teil sehen kann, der herrlichste. Es ist schwer, sich eine zutreffende Vorstellung von dem weit ausgreifenden, gewaltigen Baue dieses Berges, von der Wildheit seiner vielfach gebrochenen Kämme, der Pracht seiner mit tausendfältigen Brüchen geschmückten, mannigfach gegliedert herabhängenden Gletscher zu machen. Erst in der mittleren Kammhöhe (5500 m) dieser Ostnordost streichenden Kette und nicht, wie man bisher annahm, in der Südkette des Semenow-Gletschers erreicht der zentrale Tian-Schan seine höchste Kammanschwellung. Von hier aus findet, wie schon hervorgehoben, nach Süden hin allmähliche Abdachung statt. Die höchste Erhebung des Tian-Schan jedoch, den Khan-Tengri, erblickte ich wider Erwarten auch in dieser Kette nicht, und die Frage, wo seine Basis liege, wurde immer rätselhafter.

Der Inyltschek-Gletscher macht, vom Passe aus gesehen, schon gewaltigen Eindruck, wiewohl sein Unterlauf auf viele Werst weit gänzlich mit Schutt bedeckt, keinem Eisfelde gleicht, und obgleich man wegen der Achsenkrümmung des Tales seinen Verlauf nicht ganz überblicken kann. Dennoch fiel auf, dass die Schätzung des russischen Reisenden Ignatiew (12 Werst Länge) um vieles hinter der Wirklichkeit zurückstehe. Freilich, die ganze ungeheure Ausdehnung des Eisstromes klärten erst die Forschungen des folgenden Jahres auf. Die Sohle des Tales hat äusserst geringes Gefälle und ist in seinem ganzen Oberlaufe ein durchschnittlich $1^1/_2$ Werst breiter, durch Aufschüttung gänzlich eingeebneter, wüster Geröllboden, in welchem der mächtige Strom sich vielfach unregelmässig verzweigt. Die

Vegetation ist im Oberlaufe des Tales mit Ausnahme einer Schuttflora aus dem Talboden verbannt und auf die beiderseitigen Gehänge beschränkt, jedoch hauptsächlich auf die nach Norden exponierten Südgehänge. Dort sind die Alpenwiesen dicht benarbt, Fichtenwälder sind auf Moränenboden und Schuttkegeln angesiedelt, und ein grüner Gürtel zieht am Fusse der Bergwände in das Gletschereis auf eine Länge von beiläufig 18 Werst hinein. Kurzes Alpengras, reiche Alpenflora und unter anderem Buschwerk, waldartig dicht auftretende Caragana-Sträucher setzen diese, in die Region der Erstarrung hineinragende Zone zusammen, die an alten Ufermoränenschutt gebunden ist. Merkwürdigerweise auf die gleiche Länge, ca. 18 Werst, ist der Gletscher in seiner ganzen, ca. 3 Werst betragenden Breite von einem Gebirge von Moränenschutt und grossen Blöcken bedeckt, dessen Mächtigkeit mindestens 100 m beträgt. Diese Hülle ist durch atmosphärische Einflüsse, wie durch Erosion von Gewässern und durch die Gletscherbewegung in Ketten, Gipfel der verschiedenartigsten Formen, Täler, Mulden, Kessel etc., kurz in das Relief eines wirklichen Gebirges zerlegt. Das Material hiezu haben zum grossen Teil die am Unterlaufe des Eisstromes bis zu beträchtlicher Höhe eisfreien Abhänge der Talketten und ihre schluchtartigen Seitentäler geliefert; die Zerstörung des Gesteins ist infolge der in diesem weit nach Süden vorgeschobenen Tale, ausserordentlich starken thermalen Gegensätze ungemein vorgeschritten und das gebirgsbildende Material, hier vorzugsweise Schiefer, leistet nur geringen Widerstand. Dennoch hätten die klimatischen Einflüsse allein keine so starke Wirkung hervorrufen können, wenn ihnen nicht die Zerrüttung des Gebirgsbaues zu Hilfe gekommen wäre. Wir befinden uns hier im Gebiete der stärksten und mannigfaltigsten Dislokationen, die an beiden, den Unterlauf des Gletschers begleitenden Talwänden vielfach aufgeschlossen erscheinen.

Dass die Bodenbewegungen übrigens in diesem Gebiete bis heute noch nicht zum Abschlusse gelangt sind, bewies ein Erdbeben am Morgen des 22. August 1902, das etwa 1/4 Minute

währte und sich in drei von unten nach oben wirkenden, sehr heftigen Stössen äusserte. Ein unvergessliches, furchtbares Schauspiel war es, als sich, in unmittelbarer Folge der Erschütterung von einem schroffen Hängegletscher des beschriebenen grossartigen Berges, an dessen Fusse das Hauptlager errichtet war, kolossale Eismassen ablösten und mit furchtbarem Getöse in die Schluchten des ungeheuren Felsgerüstes hinabfielen, von wo sodann Schnee- und Eisstaub wieder in mächtigen Säulen bis zur Höhe der Firnkämme des Gebirges emporstieg.

Das auf der Eisdecke aufgetürmte Schuttgebirge ist so lückenlos, dass nur an den Rändern Eis zutage tritt, und die Gletscherzunge, die übrigens tiefer hinabreicht als die des Semenow-Gletschers, wird daher, ungeachtet ihres Hineinragens in ein südliches Klima vor Abschmelzung geschützt. Als Niveau des Zungenendes wurde beim Besuche des Gletschers in zwei aufeinander folgenden Jahren der Wert von ca. 3100 m ermittelt. Für einen neuerlichen Rückzug des Eises fanden sich keinerlei Anzeichen vor. Seine ungeheure Ausdehnung, das geringe Gefälle — nur ca. 26 m pro Werst —, und seine geschlossene Schuttbedeckung, die übrigens auch im Zusammenhange mit dem geringen Gefälle steht, erklären zur Genüge seine Stabilität. Diese Schuttdecke macht die Begehung des unteren Gletscherteiles zu einer äusserst mühsamen und langwierigen. Man kann im Laufe eines Tages nur einige Werst zurücklegen. Auf diese Umstände nicht gefasst, und nach allen bisherigen Nachrichten über den Gletscher so gewaltige Grössenverhältnisse nicht erwartend, zudem im Unklaren darüber, dass das Tal zu dieser Jahreszeit nicht einmal von nomadisierenden Kirgisen besucht wird, hatte ich nicht so belangreiche Vorräte mitgenommen, als zur Ernährung meiner Truppe auf 8 bis 10 Tage ausgereicht hätten. Auch die Zahl der Träger war zu solchem Unternehmen ungenügend, und selbst die vorhandenen Leute versagten im entscheidenden Augenblicke den Dienst und brachen in Meuterei gegen mich aus. Unter solchen Umständen musste ich mich für diesmal auf einen kurzen

Vorstoss in die Eisregion beschränken. Die Expedition teilte sich: Herr Keidel reiste mit einigen Leuten das Tal abwärts, um einen Überblick auf dessen geologischen Bau zu gewinnen. Um sodann auch einige Orientierung über die dortigen Verhältnisse zu erhalten, drang er in das nächste, südliche, parallel ziehende Längstal, das Kaündü-Tal ein, das noch gänzlich unbekannt, ja nicht einmal in den Karten zu finden ist. Da ich dieses Tal und ein noch weiter südlich ziehendes im folgenden Jahre genauer durchforschte, finden sich Mitteilungen hierüber erst im späteren Teile dieses Berichtes.

Herr Pfann und ich überschritten in mühseliger Weise das Schuttgebirge des Gletschers und kamen nur langsam vorwärts. Als wir etwa 3 Werst zurückgelegt hatten, sahen wir hinter den Schuttmassen eine hohe, breitmassige, dunkle, mit Firn gekrönte Felswand auftauchen, die weit hinten, wo das Eis schon schuttfrei ist, das breite Gletschertal in zwei Äste spaltet. Ein kurzes Stück höher hinauf und es erschien, noch viel weiter zurück, seitwärts von der dunklen Masse, hart an ihrer Nordseite, eine schlanke, helle Pyramide, hoch in die Lüfte ragend. Wir erkannten sie sofort als den Gipfel des Khan-Tengri. Infolge eigenartiger Krümmungen der Talachse und des Gebirgszuges, zu welchem offenbar die dunkle Wand gehört, verschiebt sich das interessante Bild für das Auge derart, dass man im Unklaren über die Anordnung der Gebirgszüge und über die Lage der Lücke bleibt, aus welcher die Gipfelpyramide sich erhebt; nach einigen hundert Schritten sieht man diese überhaupt nicht mehr. Immerhin lag grosse Wahrscheinlichkeit nahe, dass der Gipfel irgendwo im Inyltschek-Tale oder in irgend einem, mit ihm verknüpften Tale stehen müsse. Bei der Knappheit des mir zur Verfügung stehenden Raumes übergehe ich die am Gletscher ausgeführten Untersuchungen, die infolge der oben erwähnten Umstände, und beeinflusst durch die Ungunst der Witterung in diesem Jahre noch nicht zu dem erwünschten Erfolge führten; wir konnten aus oben erwähnten Gründen nicht weit genug am Gletscher vordringen. Auf dem Rückwege aus dem Tüs-aschu-Tale in

das Sary-dschass-Tal wurde der S. 298 erwähnte Scheiderücken zwischen den Talgruppen Tüs-aschu und Kusgun-ya, das Hochplateau Tur (ca. 3750 m) besucht, und dort ein besonders instruktiver Blick auf den Khan-Tengri gewonnen, welcher durch Aufnahmen und Photographien festgehalten wurde, ohne dass indes auch dort völlige Sicherheit darüber gewonnen werden konnte, ob sich der Berg aus dem Inyltschek-Tale oder aus einem von dessen Talschlusskette nach Nordosten ziehenden, anderen Tale erhebe.

Um aus dem Sary-dschass-Tale das Tekes-Tal zu erreichen, wurde diesmal der Weg über den Kap-kak-Pass (3750 m) genommen und durch das gleichnamige, im allgemeinen Südnord gerichtete Quertal, das die nördlichen Randketten, die zum Längstale des Tekes abdachen, durchbricht.

Dieses ca. 65 Werst lange Tal gehört zu den bedeutendsten Nebentälern des Tekes-Oberlaufes. Der Kap-kak-Pass liegt in einer vierfachen Talverzweigung, da hier infolge einer Verwerfung die Ketten weit auseinander treten. Aus diesem Grunde hat der Kap-kak-Fluss mit seinen bedeutenden, weit ausgreifenden Nebentälern ein sehr ausgedehntes Gebiet zu entwässern. Für das Studium der späten Schicksale vieler Tian-Schan-Täler bietet das Kap-kak-Tal besonders in seinem Unterlaufe typische Verhältnisse. Wiewohl es an seinem Schlusse jetzt nur mehr ganz unbedeutende Firnlager enthält, kann man dort alle Merkmale früherer völliger Vereisung wahrnehmen; alte Moränen sind im Oberlaufe mächtig entwickelt, im Unterlaufe fluvioglaziale Schottermassen, in welche sich der Fluss streckenweise tief eingeschnitten hat. Die Verlegung seines früher mehr nach Osten gerichteten Laufes durch solche Schottermassen oder Eis hat ihn gezwungen, um zum Tekes zu gelangen, eine mächtige Barre harter Kalke in tiefer, ungangbarer Klamm zu durchsägen. Die einst durch Glazialschutt abgedämmten Gewässer haben beckenartige Weitungen als Seen gefüllt. Die dort einmündenden Quertäler liegen sehr hoch, sind trogförmig erodiert, heute wasserleer und ihre Mündungen hängen hoch über den Böden der ehemaligen Seen.

Gründe für diese Verhältnisse wurden an anderer Stelle schon hervorgehoben. Auf späten Einbruch bedeutender Mengen fliessenden Wassers deutet der Umstand, dass hoch oben, an ähnlichen Tertiärbildungen, wie sie an den Rändern der alten Tekes-Seen liegen, sich jüngere, lockere Konglomerate angelagert finden. Diese reichen sogar stellenweise über das Tertiär hinauf zu den Kalken. Neben Tertiärablagerungen zeigen sich auch, wie an einigen Stellen des Tekes-Tales und an anderen Orten, grosse Mengen Sandes und Gruses, die von zerstörtem und ausgespültem Granitmaterial herrühren. Im späteren Verlaufe der Reise besuchte ich eines der grossen Nebentäler des Kap-kak-Tales, das Tal Karakol-sai, in welchem ein durch alte Moränen abgedämmter See noch vorhanden ist, und die Merkmale der bereits entschwundenen Seen sich gut erhalten zeigen.

Infolge verschiedener Hindernisse konnte ich erst anfangs September das Bayumkol-Tal zum zweiten Male besuchen, um die unvollendeten topographischen Arbeiten dort zum Abschlusse zu bringen. Ich hoffte, im Spätjahre, wo die thermalen Gegensätze zwischen Ebene und Hochtal weniger ausgeprägt sind, durch beständigere Witterung begünstigt, rascher damit fertig zu werden.

Es traten jedoch nunmehr allgemeine atmosphärische Störungen ein und verhinderten und verzögerten die Lösung der Aufgabe in erheblichem Masse. Die Vermessung des westlichen Gletschers konnte indes dennoch durch Herrn Pfann vollendet werden, wobei von einer hochgelegenen Basis aus die Gipfel der Umrandung anvisiert wurden. Der westliche Bayumkol-Gletscher entsteht aus dem Zusammenflusse von fünf, aus Einbuchtungen der Talwände vorbrechenden Gletschern und ist besonders im Mittellaufe sehr zerrissen, auch an seinem Schlusse, im Firngebiete, spaltenreich. Dort steht er durch einen Firnsattel (ca. 4400 m), den ich im folgenden Jahre vom Semenow-Gletscher aus erreichte (siehe Späteres), mit diesem in Verbindung und mit dessen oberstem Firnbassin durch den Semenow-Pass (siehe S. 295). Zweifellos hat früher auch eine Verbindung mit dem Karakol-Gletscher bestanden, und in der Eiszeit bildeten

offenbar alle diese Gletscher eine zusammenhängende Masse. Jetzt ist der Gebirgsrücken zwischen Karakol und Bayumkol auf der dem letzteren Tale zugekehrten Seite (Südosten) eisfrei, und man sieht dort in schönen Aufschlüssen die Sedimente (Kalk, Marmor, Tonschiefer) mehrfach wiederholt zwischen Granit liegen.

Ausserordentlich ergiebige Schneefälle trieben uns endlich aus dem Hochgebirge hinaus, da kein Futter für die Pferde mehr zu finden war. Der Schnee reichte bereits bis in die Tekes-Ebene hinab, und es blieb mir nichts übrig, als alle, noch auf dem Programme stehenden, die Nordseite des Gebirges betreffenden Forschungen auf das folgende Jahr zu vertagen und auf die Südseite überzugehen, wo günstigere Klimaverhältnisse vielleicht noch längere Arbeit ermöglichen konnten.

Nach einigen Tagen der Vorbereitung verliess die Expedition am 23. September Narynkol, um den Grossen Musart-Pass zu überschreiten. Dieser Übergang ist schon von einigen russischen Expeditionen durchgeführt worden; von Kaulbars veröffentlichte einiges über die Topographie des Gebietes, Ignatiew Geologisches. Ich werde mich daher in diesem Berichte auf die Hervorhebung unvollkommen oder gar nicht bekannter Tatsachen beschränken.

Der Weg von Narynkol durch das Tekes-Tal abwärts führt durch eines der am besten ausgeprägten Becken der alten Randseen, welche am Fusse des Gebirges, an Stelle des heutigen Tekes-Tales einst lagerten. Am Südrande sind die Formen der alten Uferterrassen vorzüglich erhalten. Am weit geöffneten Eingange des Musart-Tales liegen fluvioglaziale Schottermassen in fünf übereinander gelagerten, alten Talterrassen und begleiten als Längsstufen mehrere Werst weit den Zug des Tales, bis nahe zum Beginne seines Gebirgslaufes. Dort, in der Nähe des ersten chinesischen Piketes, wo der wasserreiche Fluss aus dem Gebirge hervortritt, gesellt sich ihm sein ebenbürtiger Zufluss Dondukol (hievon später mehr), und der nun vereinte Strom ist schwer überschreitbar.

Durch die Unachtsamkeit der Dschigiten wurde die Ex-

pedition dort von einem folgenschweren Unfalle betroffen: Eines der Packpferde stürzte, und seine Last, zwei als „luftdicht“ gekaufte Koffer, fielen in die Flut. Als man sie herausgezogen hatte, fand sich ihr Inhalt vollständig durchnässt, hierunter eine grosse Anzahl exponierter photographischer Platten, die in Zinkbüchsen eingeschlossen waren, welche für absolut luftdicht galten. Im Vertrauen hierauf wurden sie nach dem Unfalle nicht sogleich geöffnet, und als dies später geschah, zeigte sich, dass dennoch Wasser eingedrungen war, und dass sämtliche Platten verloren waren. Sechzig Aufnahmen in grossem Formate, meistens Panoramas und Telepanoramas, aufgenommen von hohen Standorten, die Frucht unsäglicher Mühe und Sorgfalt, das Hauptergebnis der photographischen Tätigkeit des abgelaufenen Sommers, geographische Dokumente von unschätzbarem Werte waren unwiederbringlich dahin. Mit dieser Katastrophe war der Expedition der Weg für das nächste Jahr eigentlich schon vorgeschrieben. Auf diese für die Topographie des zentralen Tian-Schan so bedeutungsvollen Dokumente konnte nicht verzichtet werden. Es war unerlässlich, die wichtigsten Punkte, von denen aus die verlorenen Aufnahmen gemacht waren, nochmals zu besuchen.

Wie empfindlich dieser Schaden auch war, hatte er doch auch Gutes im Gefolge: Gezwungen, die schon einmal besuchten Hochtäler nochmals zu bereisen, konnte ich im folgenden Jahre, nunmehr vertraut mit allen örtlichen Verhältnissen, überdies begünstigt durch bessere Witterung, erfolgreicher arbeiten, als im ersten Sommer und, was mir rätselhaft geblieben war, in der Struktur des zentralen Tian-Schan, zum grössten Teil der Lösung zuführen.

Am Eingange des Musart-Tales zeigt sich eine mächtige Serie choritischer Schiefer, öfter wechsellagernd mit phyllitähnlichen Schiefern. Schon kurz vor seinem Austritte aus dem Gebirge durchbricht der Fluss Massen rosa Granites, auf die eine schmale Zone Gneis folgt, bald jedoch verbreiten sich Aphanite und gehen weiter taleinwärts, wo sie wieder in die Nähe einer Granitzone kommen, mehr und mehr in Schiefer-

form über. Die Schiefer sind bei dem für diese Gegend anormalen, nahezu nördlichen Streichen (N. 10° O.) in enge, unregelmässige Falten geworfen. Pressungserscheinungen äussern sich auch im Granit, der öfter die Form von Gneisgranit annimmt. Kalke und Tonschiefer, zwischen den Graniten auftretend, sind infolge dynamo-metamorphischer Vorgänge, die ersteren in Schieferform gepresst, die letzteren kristallinisch geworden. Erst weiter hinten im Tale, wo wieder normales N. 70° O. Streichen eintritt, herrschen ruhigere Verhältnisse. Der Granit tritt hier in sehr verschiedenartiger Ausbildung, auch als Granitporphyr auf, und wird streckenweise durch Syenit ersetzt. Auf eine weitere Zone Gneis und anderer kristallinischer Schiefer folgen, je mehr man sich dem Talschlusse nähert, in desto vorherrschenderer Weise, dunkle, mehr oder weniger kristallinische Kalke, Marmore und Tonschiefer, aus welchen, gleich wie in den anderen, grossen Tälern, die dem Hauptkamme angehörenden, Talschluss bildenden Gebirgsteile ausschliesslich aufgebaut sind. Hier treten jedoch in grosser Mächtigkeit dolomitische Kalke hinzu, die in den gleich kühnen und bizarren Gipfelformen sich äussern, wie sie uns aus den dolomitischen Kalkgebirgen der Alpen bekannt sind und so gestaltet begleiten sie auch fast den ganzen Lauf des Musart-Taldefilees gegen Süden.

Das Grosse nördliche Musart-Tal hat, soweit es im Gebirge verläuft, eine Länge von 55 bis 60 Werst und unterscheidet sich von den anderen, grossen Tälern des zentralen Tian-Schan durch etwas stärkeres Gefälle seiner Sohle (im Mittel ca. 18 bis 19 m pro Werst). Gleich anderen Tian-Schan-Tälern ist auch dieses in beckenförmige Weitungen gegliedert, welche durch schluchtartige Engen verbunden sind; sie sind meist durch alten Moränenschutt verstopft, in welchen der Fluss sein Bett stets sehr tief eingeschnitten hat, selten den Felsgrund erreichend. In den beckenartigen Weitungen sehen wir diesen Moränenschutt meistens am linken Ufer in stufenförmig übereinander liegende Terrassen umgelagert. An mehreren Stellen sind die Moränen von ungeheurer Mächtigkeit. Bei der Mün-

dung, (ca. 2400 m) des Seitentales Chamer-dawan (hievon später mehr), liegt die gewaltigste, die eine Breite von fast 2½ Werst hat und ein Gebirge im Tale bildet. Eine andere, fast ebenso mächtige, liegt nur 10 Werst weiter aufwärts, in der Höhe von ca. 2600 m, und steigt noch jetzt etwa 80 m über Talniveau an. Bis zu bedeutenden Höhen der Talwände können Moränenreste verfolgt, und Abschleifungen und Rundhöcker an den Felswänden beobachtet werden. Auch hier finden wir neben den grossen, tief erodierten Nebentälern älterer Entstehung eine Reihe hochgelegener, trogförmiger, jugendlicher Talbildungen mit karförmigen Weitungen und mit Mündungen, die, hoch über der Talsohle hängend, das ehemalige Niveau des Haupttalgletschers anzeigen; sie enthalten auch jetzt noch kleine Gletscher. Im mittleren Tale treten heisse Quellen (+ 48° C.) zutage, von den Kalmaken in primitiver Weise gefasst und zu Heilbädern benutzt; ihr Austritt findet in der Talsohle (Niveau ca. 2550 m) in der Kontaktzone statt, wo kristallinische Schiefer und Granite mit stark zerrütteten Kalken in Berührung treten.

Dort, wo die Talsohle eine halbkreisförmige Kurve von kurzem Radius nach Osten beschreibt, schwingt sich die rechte Uferkette, scheinbar das Tal schliessend, zu einer Reihe ca. 5500 m hoher, ausserordentlich kühn gebauter Gipfel empor, die wegen ihrer Exposition nach Norden mit gänzlich in Firn und Eis gehüllten Fronten prachtvoll über einer dunkel bewaldeten, alten Moräne aufragen. An ihrem Fusse bricht aus einem von Osten herabziehenden Seitentale kaskadenförmig, in tausendfältige Séracs gegliedert, der wildeste Talgletscher hervor, den ich im Tian-Schan gesehen habe; seine Zunge wendet sich, im Tale angelangt, nach Norden und endet bei 2750 m, nur wenig oberhalb des dritten Piketes, wo sie durch die von ihr aufgeworfene, mächtige Ufermoräne vom Haupttale getrennt wird. Nach den gewaltigen Dimensionen der ausschliesslich aus dolomitisierten Kalken und Marmoren bestehenden Transportblöcke und nach der Mächtigkeit der Eiszunge zu schliessen, dürfte dieser noch unerforschte Gletscher sehr lange sein. Zweifellos

nimmt er seinen Ursprung auf dem wasserscheidenden Rücken, der den Schluss eines der Nebentäler des zum Tekes nach Norden ziehenden Agiass-Tales vom Musart-Tale scheidet. Von dort also, vom Hauptkamme des Chalyk-Tau im Osten, streichen auch die, die hohen Eisgipfel aufbauenden, dolomitisierten Kalke und Marmore herüber, die hier die Granite und Gneise abschneiden. Der klimatische Schutz dieser nach Norden gerichteten Wand hat für die dahinter liegende Talstrecke trotz der hohen Lage (2800 m) des Talbodens ungewöhnlich mildes Klima zur Folge, unter dessen Gunst eine ausserordentlich schöne Busch- und Waldvegetation hoch in das Gletschereis hineinragt.

Der Musart-Pass ist ein Wallpass, dessen unebene Scheitelfläche eine Ausdehnung von mehr als 16 Werst besitzt. Der Aufstieg von der Nordseite, der von den ca. 2900 m hoch gelegenen, obersten Terrassen des nördlichen Musart-Tales ausgeht, ist bis zur Erreichung des Plateaus kurz und steil, der Abstieg nach Süden zum Piket Tamga-tasch (ca. 2760 m) lang und mit Ausnahme einiger Steilstufen allmählich; die Schenkel sind also ungleich. Eine Anomalie äussert sich darin, dass der Gletscher der Nordseite klein, der der Südseite sehr ausgedehnt ist. Der zur Nordseite abfliessende Gletscher Jalin-Chanzin ist nur mehr der unbedeutende Rest eines ehemals ausgedehnten Eisfeldes; er endet bei ca. 3100 m und ist fast ganz mit Schutt bedeckt, so dass nur bei den Einmündungen kleiner Seitengletscher etwas Eis zutage tritt. Die Wasserscheide zwischen ihm und dem nach Süden abfliessenden Dschiparlik-Gletscher ist verwischt; zumal infolge der sehr veränderlichen Anhäufungen von Moränenschutt ist der Kulminationspunkt der Passhöhe schwer festzustellen. Wir hielten ein kleines Plateau hiefür, dessen Höhe nach vorläufiger Feststellung sich auf beiläufig 3500 m berechnet. Nahe der Passhöhe, auf der Südseite, mündet aus einem von Ostnordost heranziehenden Längstale der gewaltige Dschiparlik-Gletscher; seine Zunge ist, soweit sie das oberste Passplateau bedeckt, schuttfrei und auf einer, mehrere Werst langen, kaum geneigten Strecke in Millionen kleiner, zeltförmiger Erhebungen zerlegt, deren Entstehung auf besondere Abschmel-

zungsprozesse zurückzuführen ist. Soweit der Blick in das 3—400 m weite Ursprungstal einzudringen vermag, sieht man an seinen Ufern hohe, überfirnte Berge (Kalke und Marmore). Nahe seinem Austritt auf das Passplateau zweigt vom Hauptgletscher ein Arm nach Südwesten ab, legt sich quer über das Plateau und entschwindet dem Blick in einer nach Südwesten gerichteten Öffnung der Uferwand, während die Hauptmasse, in einer durchschnittlichen Breite von 2 Werst, nach Südosten, dann nach Süden ihren Lauf zum südlichen Musart-Tale nimmt und bei ca. 2900 m in einer stark im Rückzuge begriffenen Zunge oberhalb des Piketes Tamga-tasch endet.

An den mehr als 1000 m hohen Felswänden der Umwallung kann man allenthalben die Spuren von Abschleifung durch Gletschereis bemerken, welche Kunde von der einstigen Eisausfüllung des Hochtales geben. Am Ostufer liegen am Fusse einer 400 m hohen, vom Eise abgeschliffenen Marmorwand die Ruinen eines Masars und eines Piketes, Masar-baschi. An dieser Stelle, wo ein Seitengletscher einmündet, bricht der Hauptgletscher in einer ca. 100 m hohen Stufe zu einer tiefer liegenden Terrasse ab, und seine Eismassen sind in wilde Séracs — Eistürme und Hörner, getrennt durch gähnende Schluchten — aufgelöst. Dies ist die schon seit Jahrhunderten berühmte und gefürchtete Passage, die von den Karawanen nur mit Hilfe der Wächter des Piketes Tamga-tasch überwunden werden kann.

Diese haben regelmässige Stufen in die Eistürme eingeschlagen. In grosser Zahl umherliegende Skelette von Lasttieren bekunden jedoch, dass trotz aller Hilfe die Fährlichkeiten der Überschreitung grosse sind, und dennoch ist der Musart-Pass noch immer der verhältnismässig leichteste für den Verkehr zwischen Nord- und Südseite. Eine Karawane inmitten dieses Labyrinthes von Eistürmen zu sehen, gewährt einen abenteuerlichen Anblick. Am Fusse der nächstfolgenden Eisterrasse liegt in der Nähe des linken Ufers ein ausgedehnter Eissee.

Die gesamte Länge des Dschiparlik-Gletschers muss auf mindestens 25 Werst veranschlagt werden. Es wurde schon hervorgehoben, dass dolomitisierte Kalke in ungemein kühnen

Gipfelbauten zusammen mit weissem Marmor zum überwiegenden Teile die Umwallung des Musart-Passes bilden. Scharf heben sich von diesen hellen Massen dunkle Wände mit zackigen Graten ab; es sind eingefaltete, stark metamorphe Eruptivgesteine, welche vom Beginne des Passdefilees im Norden bis zu seinem Südende unausgesetzt die umgewandelten Sedimente begleiten, mit denen sie gemeinsame Auffaltung erfahren haben.

Der Weg durch das südliche Musart-Tal, das eine Länge von ca. 90 Werst hat, bei einer Breite, die zwischen $1^1/_2$ bis $2^1/_2$ Werst wechselt, bietet in zweierlei Hinsicht grosses Interesse: zunächst wegen der gewaltigen Dislokationen, welche sowohl die kristallinischen Gesteine (Gneis, Granit, Syenit), als auch die Sedimentärbildungen betroffen haben und dann wegen der beide durchbrechenden Mengen von Eruptivgestein. Es bedarf noch genauerer Prüfung der beobachteten Verhältnisse, ehe gesagt werden kann, ob die Störungen vom Durchbruche der Eruptivmassen ausgingen, also bis zu gewissem Grade lokaler Natur waren, oder ob eine weitgehende Bewegung die Gebirgsmassen ergriff, gefolgt oder begleitet vom Aufsteigen des Magmas in den entstandenen Klüften. Wie häufig, so erweckt auch hier die Kontaktzone das meiste Interesse: Starke Metamorphosierung zeigt sich nicht nur in der Berührungszone der Durchbruchsgesteine mit den Sedimenten und alten, kristallinischen Gesteinen, sondern auch dort, wo letztere und die Sedimente aneinander treten. Herr Keidel hat, als wir das Tal zum zweiten Male besuchten, eine vollständige Sammlung der Kontaktgesteine eingebracht. Granit, Syenit und Gneis treten im südlichen Musart-Tale erst in grösserer Entfernung vom Zentralkamme auf, als in allen von mir besuchten, nördlichen und südlichen Quertälern: erst in der äusseren Hälfte des Tales, bis wohin die Sedimente allein den Gebirgsbau bilden. Gneise sind weit mächtiger entwickelt, als bisher angenommen wurde. Zwischen den Pikets Chailik-mabuse und Tograk bilden sie eine geschlossene, an beiden Enden scharf begrenzte Zone von 4 Werst Länge. Chloritische und stark umgewandelte Schiefer wechsellagern mit Granit; auch die Kalke sind mehr oder

weniger kristallinisch geworden. Die oft bis zur Höhe von 1500 m und darüber senkrecht angeschnittenen Wände der schräg zur Talachse ziehenden Ketten zeigen im Schichtenbau die merkwürdigsten, vielfältigsten, bis ins kleinste gehenden Knickungen, Zerknitterungen und Fältelungen der steil aufgerichteten Sedimente in grossartigen Aufschlüssen und stets in der Nähe des Auftretens der Eruptivgesteine am intensivsten. An einigen Stellen zeigt sich gangförmiges Aufsteigen des Magmas, von starker Apophysenbildung begleitet. In den Kalken gelang es Herrn Keidel einen, ungeachtet der starken Dislokation, nahezu intakt gebliebenen Horizont zu finden, und dort eine dem oberen Karbon angehörige, reiche Fauna zu sammeln, woraus hervorgeht, dass dieser Kalkhorizont und das dazu gehörige kristallinische Massiv tektonisch von den alten, karbonischen Kalken und den mit ihnen gefalteten, metamorphen Eruptivgesteinen am Talschlusse scharf zu scheiden sind.

Alte, kristallinische Konglomerate finden sich schon in der zweiten Hälfte des Tales, treten jedoch in grösseren Massen erst nahe an seinem Ausgange auf, wo sie zwischen den Quertälern Ak-topa und Moro-chotan mit Sandsteinen und umgewandelten Schiefern zusammengefaltet sind.

Aufschlüsse an 4—500 m hohen Wänden lassen auch in diesem Komplex ausserordentliche Verrenkungen und Verbiegungen der Schichten erkennen. Von der starken Pressung geben umherliegende Konglomeratblöcke Kunde, deren Material der Länge nach ausgewalzt ist. Diese Konglomerate bilden auch die Abdachung des Gebirges gegen das nach Osten ziehende Tal des Musart-darja, wovon später mehr.

Einige Werst, nachdem man das Musart-Tal in der Richtung nach Süden verlassen hat, treten in der Abdachung des Gebirges gegen die Steppe, bei der Mündung des Tales Kaschbulak, wieder Sandsteine auf, die mit groben, schieferig-kalkigen und feinen, den Grauwacken ähnelnden Konglomeraten in enge Falten gepresst sind, und stellenweise zerknitterte, blättrige, fettig glänzende Lettenkohlenschiefer, an anderer Stelle auch wirkliche Anthrazite enthalten.

Nicht weniger interessant als die Besonderheiten im geologischen Baue des Musart-Tales sind die Zeichen seiner ehemaligen, gewaltigen Vereisung. Wenn in diesem nach Süden gekehrten Tale die alten Moränenablagerungen massenhafter und ungestörter vorhanden sind, als in den grossen Gletschertälern der Nordseite, so erklärt sich dies damit, dass im Norden, infolge der dort auch jetzt noch sehr ausgedehnten Vergletscherung, die alten Glazial-Schuttmassen während eines langen Zeitraumes und bis auf den heutigen Tag der abschwemmenden Wirkung des Schmelzwassers ausgesetzt waren. Hier im Süden hingegen, wo die heutige Vergletscherung verhältnismässig gering, das Klima weit trockener ist und jedenfalls auch in der Postglazialzeit rascher sich veränderte als im Norden, kamen die zerstörenden und abräumenden Kräfte im Innern der Täler weniger zur Geltung.

Wir sehen zunächst, dass das Tal stellenweise durch alte Endmoränen, an anderen Orten durch Anhäufung von Diluvialschutt bei natürlichen Einschnürungen in sechs beckenartige Weitungen abgesperrt war, welche ebensovielen, früheren Seen entsprechen. Im zweiten Becken liegen Moränenreste 3—400 m über der Tahlsohle auf Hochterrassen, und die Abschleifungen an den Felswänden reichen dort, sowie weiter aussen im Tale, wesentlich höher hinauf. Streckenweise, so im vierten Becken, ist der Fuss der Gebirgswände bis zu beträchtlicher Höhe im Moränenschutt förmlich begraben. Trockene Verwitterung hat dort die Blockmassen (Marmore, Kalke) in Sand und Mehl verwandelt, aus welchen die erhalten gebliebenen Blöcke zum Teil herausragen. Durch diese Verwitterungsprodukte wurde eine weite Talstrecke in eine richtige Sandwüste verwandelt, deren dünenförmige Erhebungen durch Pflanzen von echtem Wüstentypus zusammengehalten werden. Alter Moränenschutt reicht beim Lagerplatz Chailik-mabuse (2480 m) etwa 400 m über das Talniveau hinauf. Die bedeutendsten Anhäufungen fanden wir jedoch in der Nähe des Piketes Tograk (ca. 2350 m), wo aus dem rechts einmündenden Tale Tograk-Jailak ungemein mächtige Transportmassen herauskamen, die sich an denen des Haupt-

gletschers aufstauten, wodurch der Schutt zu gewaltiger Höhe (5—600 m) an die jenseitige Bergwand hinaufgeschoben wurde. Ein etwa 200 m hohes Gebirge von Moränenschutt sperrt hier das Tal ab, und wird vom Flusse in malerischer Engschlucht durchbrochen. Unterhalb Tograk mündet links das Seitental Dschin-Dschilga, aus dessen Mündung die riesige Grundmoräne des alten Gletschers in vorzüglich erhaltener Form weit ins Haupttal hinauszieht. Von diesem Seitengletscher allein können jedoch die gewaltigen Schuttmassen nicht herrühren, welche sich in Wallform auf eine Strecke von 12 Werst talauswärts dehnen, 40—50 Werst über dem Niveau des Flusses, der sein Bett tief in sie eingeschnitten hat. Diese Terrainformen deuten vielmehr darauf hin, dass der Riesengletscher, der dieses Material lieferte, den dort sehr abgesunkenen, linken Talwall überflutend, aus dem höheren Teile des Chalyk-Tau im Osten herüberkam.

Auch beim letzten Piket Kone-schar ist das Haupttal (ca. 2100 m) durch Moränenschutt abgesperrt, welcher am rechten Ufer hoch hinauf die Bergwand einhüllt. Dass die alten Gletscher auch aus dem Gebirge hinaus in die Ebene reichten, davon geben nicht nur die Moränengebirge Kunde, welche vor dem Fusse des nach Osten ziehenden Gebirgsrandes liegen, und von der Expedition im folgenden Jahre, auf dem Wege entlang des Chalyk-Tau, überschritten wurden (hievon später), sondern auch die ungeheuren Decken Transportblöcke einschliessenden, umgelagerten Glazialschotters — ich hebe ausdrücklich hervor, dass diese Ablagerungen sich in wesentlichen Merkmalen von jenen Gebilden unterscheiden, für welche Herr Bogdanowitsch (Trudi Tibetskoi Expedizii S. 88 f.) die Bezeichnung „Küren" eingeführt hat —, welche sich in Mächtigkeit von mehreren hundert Metern mehr als 30 Werst hinaus in die Ebene heute noch erstrecken und dort teils geschlossene Plateaus bilden, teils durch Erosion in vielgestaltige, kleine Gebirgszüge zerlegt erscheinen. Solche Massen sind in einer Gegend erhalten, wo Erosion, Aufbreitung und Abräumung so energisch gewirkt haben, wie in wenigen anderen Landstrichen. Zerstreute Granit-

blöcke fand ich in der Wüste über 50 Werst vom Gebirgsfusse entfernt.

Die Seitentäler des südlichen Musart-Tales, dessen von einem mächtigen Strome durchflossener, ausgedürsteter Boden durch diesen keine nennenswerte Befruchtung mehr erfährt, bergen auch heute noch einen erheblichen Schatz von Gletschereis, wo hohe, prächtig vergletscherte Ketten aufragen; die schönsten und am vielfältigsten vereisten im Tale Turpal-tsche, in dem zirkusförmigen Tale Tschiran-toka, in den Tälern Serach-su und Tograk-Jailak. In diese Täler haben sich auch die Fichtenwälder aus dem fast ausgetrockneten Haupttale zurückgezogen und bilden, wo sie hervortreten, den schönsten Gegensatz zum Wüstencharakter des Haupttales. Wir sehen in diesem eines der merkwürdigsten Gebirgstäler, ausgestaltet durch Bodenbewegungen, Eis-, Wasser- und Windwirkung, ein Zusammentreten von Steppe und Wüste in hochalpiner Umrandung. Viele andere physische Züge müssten noch hervorgehoben werden, um das Bild vollständig zu machen, allein dies ginge über den Rahmen dieses Berichtes hinaus.

Unsere Absicht, in den Hochgebirgen der grossen Seitentäler des südlichen Musart-Tales noch einige Zeit zu arbeiten, liess sich nicht verwirklichen, da das Tal weder für Menschen noch für Transporttiere Subsistenzmittel bietet. Die Versorgung der Expedition hätte daher erst von einer weit ausserhalb des Tales gelegenen Station aus organisiert werden müssen, wozu es in der vorgeschrittenen Jahreszeit zu spät war. Der Plan wurde auf das folgende Jahr vertagt und wir nahmen den Weg talauswärts nach der Stadt Ak-su.

Dieser Weg durchschneidet zwischen den Pikets Ljangar und Abad die Züge des Tertärgebirges Topa-dawan in einer Breite von ungefähr 18 Werst. Es besteht aus rotem, lockerem Sandstein, roten, Kochsalz führenden Tonen, bunten, zum Teil Gips führenden Mergeln und kalkigen Konglomeraten. Der ganze Komplex streicht im allgemeinen WNW. und ist durch enge, stellenweise komplizierte Faltungen ausgezeichnet. Nahe dem Südwestrande, bei dem Piket Abad (ca. 550 m), findet

eine Biegung der Achse und Veränderung des Streichens statt, indem die Züge des SW-NO. streichenden Tschadan-Tau mit denen des WNW. streichenden Topa-dawan verwachsen. Bedeutende Störungen im Schichtenbau sind damit verbunden. Salze treten besonders am Südwestrande in Rinnen und Mulden in Form von Exsudationsdecken auf, die bis zu 50 cm Mächtigkeit erreichen, und von den Chinesen ausgebeutet werden. Das Gebirge bricht gegen die Wüste plötzlich ab — scheinbar —, da die niederen Züge der äussersten Falten in einer mehrere hundert Meter mächtigen Schuttdecke begraben sind.

Der Weg von Abad über Dscham nach Ak-su darf als bekannt übergangen werden. Auch über die Strecke von Ak-su über Maral-baschi nach Kaschgar enthalte ich mich hier der Mitteilung, wiewohl sie zu vielen interessanten Beobachtungen Gelegenheit bot, da sie schon durch andere Reisende einigermassen bekannt geworden, teilweise in letzterer Zeit erst durch Sven Hedin beschrieben worden ist.

Am 18. Oktober traf die Expedition im Winterquartier Kaschgar ein, von wo Herr Pfann und der Präparator, Herr Russel, die Heimreise antraten. Da die südliche Randkette des Tian-Schan auch im Winter schneefrei bleibt, was speziell im Winter 1902/1903 der Fall war, nützten wir die Winterszeit, ungeachtet der empfindlichen Kälte, zu Ausflügen nach diesem Gebiete hauptsächlich, um paläontologische Sammlungen anzulegen. Dieser Zweck wurde auch erreicht, und wir kehrten mit reicher Ausbeute nach Kaschgar zurück.

Der erste Ausflug führte in das Toyun-Tal, zunächst durch enge Defileen der durch Stolitzka und Bogdanowitsch bekannt gewordenen „Artysch-Schichten“. Inmitten dieser stark dislozierten Schichten liegt eine Gruppe grösserer Dörfer, die den gemeinschaftlichen Namen Artysch tragen. Diese, sowie die gleichfalls von uns besuchte, weiter östlich, am Südrande des Tertiärgebirges gelegene Gruppe von Dörfern, welche unter dem Kollektivnamen Altyn-Artysch zusammengefasst werden, waren nicht lange vorher, im August 1902, durch Erdbeben nahezu gänzlich zerstört worden. Der Anblick der in Ruinen

liegenden Ortschaften war traurig. Im weiten Umkreise zeigte sich der Boden zerrissen und zerklüftet; stellenweise bemerkte man kleine Schlammvulkane. Im Zusammenhange mit diesen Ereignissen war das Studium der stark dislozierten, sogenannten Artysch-Schichten für uns von besonderem Interesse. Junge Konglomerate, von welchen diese Ton-, Mergel- und Sandsteinschichten diskordant überlagert werden, zeigen ebenfalls Merkmale erheblicher Dislokationen, ja sogar in sehr jungen Konglomeraten wurden von uns an mehreren Örtlichkeiten, besonders in dem östlich von Altyn-Artysch gelegenen Tale Kurumduk Dislokationen beobachtet. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass die Bodenbewegungen, welche in den nach Bogdanowitsch zum Pliocän zu rechnenden „Artysch-Schichten" zum Ausdruck gelangten, sich in jüngeren Bildungen fortsetzten und bis auf den heutigen Tag andauern. Solche Bewegungen führten in den genannten Bezirken zu fast völliger Zerstörung von 12 volkreichen Dörfern, die, auf gut bewässerten Lössterrassen gelegen, die reichste und fruchtbarste Gegend in der Nähe von Kaschgar bilden. Im Toyun-Tale wurden devonische Fossilien gefunden, teils an den schon von Stolitzka und Bogdanowitsch besuchten Stellen, nördlich vom Weideplatz Tschon-terek, teils an anderen Punkten. Im Gebiete der stärksten Dislokationen, in den Schiefern und in den darin eingelagerten, von Bogdanowitsch als dem Tertiär angehörig bestimmten Sandsteinen, konnten Durchbrüche basaltischen Gesteins festgestellt werden und zwar ziemlich weit südlich von den Örtlichkeiten, wo sie durch Bogdanowitsch (Suyok-Tal) und durch Stolitzka (Tschakmak) aufgefunden worden sind. (Siehe Späteres.) Besseren Erfolg hatte die Sammeltätigkeit jedoch auf den Ausflügen von Altyn-Artysch nach Norden aufwärts, durch das riesige, alte Seebecken von Argu, mit seinen vorzüglich erhaltenen Terrassen-Stufen, durch die Engschlucht von Tangitar in das Hochbecken von Tegermen, wo die ungeheuren Aufschüttungsmassen ganze Gebirgszüge nahezu völlig einhüllen, so dass nur mehr deren höchste Gipfel herausragen. Von dort wurde das noch um eine Stufe höher gelegene, alte

Seebecken von Arkogak betreten und in Richtung nach Nordost überschritten, dann durch ein zum Kurumduck drainierendes Tal der Weideplatz Basch-Sugun erreicht. Auf diesem Wege wurden karbonische und devonische Fossillien (verschiedenen Stufen angehörig) gesammelt. Die reichste Ausbeute ergab jedoch Basch-Sugun, das schon durch Stolitzka bekannt geworden ist, der dort einige wenige Fossilien fand. (Süss, Beiträge zur Stratigraphie Zentralasiens.) Eine karbonische Fauna von mehreren hundert Exemplaren und mehr als fünfzig Spezies wurde eingeheimst. Auf dem Wege von Basch-Sugun nach Südost zum Kurumduk-Tale wurden mächtige Ausbrüche basaltischer Gesteine in Formen von Kuppen beobachtet. Zieht man früher von uns beobachtete, ähnliche Vorgänge in Betracht, — auch einen noch nicht erwähnten, bei Ak-Tumschuk, in der Nähe von Maral-Baschi — so zeigt sich, dass der Ausbruch dieser jüngeren Eruptivgesteine am Rande des Tian-Schan weit grössere Verbreitung hat, als bisher angenommen wurde.

Der Weg aus dem Kurumduk-Tale zurück zur Hochebene von Kaschgar führt lang in engen Defileen durch jene Teile des aus weichen Tonen und Mergeln bestehenden Tertiärgebirges, das den stärksten Niveauverschiebungen ausgesetzt war und daher Merkmale ausserordentlich vorgeschrittener Zerstörung und Einebnung zeigt.

Während ich im Januar 1903 zur Organisierung der neuen Hochgebirgsexpedition mitten in der strengsten Herrschaft des Winters die beschwerliche, weite Reise nach Taschkent und zurück machen musste (über die Terek-dawan-Route), beschäftigte sich Herr Keidel mit dem Studium der Lössformation des Kaschgar-Beckens und machte einen Ausflug an dessen Südumrandung zur Abdachung des Pamir. Bei Ak-tschiu wurden in den dortigen, durch Kirgisen primitiv ausgebeuteten Steinkohlenschichten fossile Pflanzen der Angara-Serie gesammelt, und im Gess-Tale heimste man eine fossile Fauna ein, die identisch mit gewissen Kalksteinen der Ferghana-Stufe ist.

Die noch verfügbare Zeit wurde zu einem nochmaligen

Besuche der Umgebung von Basch-Sugun ausgenützt, von wo eine noch reichere Sammlung von Fossilien zurückgebracht wurde, in welcher verschiedene Stufen des Karbons vertreten sind.

Am 14. April 1903 konnten wir, Kaschgar definitiv verlassend, aufs neue den Weg in das Hochgebirge antreten. Da jedoch die Rauhheit der Witterung und die im Gebirge liegenden Schneemassen weiteres Vordringen in das Innere noch nicht zuliessen, beschloss ich, zunächst mehrere Wochen am Südrande des Gebirges entlang zu reisen, um seinen geologischen Bau zu studieren, da gerade über diesen Teil des Tian-Schan fast nichts bekannt ist. Der Weg musste notgedrungen nochmals über Altyn-Artysch, Tangitar und Basch-Sugun führen, doch war der abermalige Besuch dieser Örtlichkeiten nicht nutzlos, da er zur Entdeckung permokarbonischer Ablagerungen führte. Von dort ging der Weg nach Nordosten und Osten in engen Schluchten durch helle, Korallen führende Kalke, dann am Südrande des Gebirges entlang über den Aufschüttungsboden der Hochebene, aus deren ungeheuren Schuttmassen die äusserste Kette nur mehr in Bruchstücken herausragt, wie Klippen aus einem Meere. Bei der Kirgisenniederlassung Kara-dschil ragen diese Schollen der Vorkette 15 bis 20 m hoch empor, und bestehen aus wechsellagernden, hellen und dunklen Kalken, denen wir eine gute, oberkarbonische Fauna entnahmen. Auf dem Weiterwege, am Fusse einer 5—600 m hohen Kalkkette, gelangte die Expedition an den Salzsee Schör-köl, wo unsere Route diejenige Sven Hedins von 1895 berührte, sich aber gleich in Richtung Nordosten wieder davon entfernte. Durch ein in spitzem Winkel in das Gebirge einschneidendes Quertal (Apatalkan), das, obwohl in einem heute wasserlosen Gebiete liegend, dennoch die typische Form des Erosionstales zur Schau trägt, drangen wir durch Kalke, Tonschiefer, Grauwacken, und phyllitische Schiefer zum Talschlusse vor und überschritten den ca. 3000 m hohen Apatalkan-Pass.

Gegen Nordosten stiegen wir nun in das muldenförmig profilierte Tal Ujuk-Apatalkan hinab, durchschritten dessen

stark abgetragenen Faltenbau von chloritischen Schiefern, Phylliten und Grauwacken und mündeten zum Oberlaufe des Tauschkan-darja aus (hier Kok-schaal genannt).

Der Fluss hat dort sein Durchbruchstal eben verlassen und ergiesst sich nun in majestätischem Bogen in ein $1^1/_2$ bis 2 Werst breites Tal, als ein für diese Jahreszeit schon ganz gewaltiger Strom. Die Schwierigkeiten seiner Überschreitung zwangen die Expedition in die Kalkgebirge des rechten Ufers, deren heute trockene, randliche Längstäler, gewaltige Erosionsfurchen, durch ihren Bau Gelegenheit gaben zu beurteilen, welche bedeutende klimatische Veränderungen hier bestimmend auf die jetzige Form des Gebirges einwirkten. Von den Höhen bot sich ein schöner Ausblick auf die Gebirge des linken Ufers, auf den Riesenwall, der als Südrand des Tian-Schan gegen das weite Kok-schaal-Tal abfällt und deshalb in einigen Karten als Kok-schaal-Tau bezeichnet ist. Es dehnen sich hier am Rande zunächst schneereiche, von kleineren Firnlagern durchsetzte Felsketten, von dem Forscher Sewerzow, der sie indes nur aus der Ferne, aus dem Ak-sai-Tale gesehen hat, Bos-adyr-Kette genannt. Für ihre Abtrennung aus dem geschlossenen Riesenwalle des Kok-schaal-Tau lassen sich jedoch weder in orographischer noch in geologischer Hinsicht gerechtfertigte Grenzen finden.

Als wir den gewaltigen Kok-schaal-Fluss endlich überwunden hatten, gelangten wir über Kara-bulak und Tschagasch-Gumböss (ca. 2450 m) an den Fuss des Gebirges, dessen erste Kette keinerlei kristallinisches Material zu den hier lagernden Schottermassen liefert und ausschliesslich aus Sedimenten besteht. Dennoch fand ich grosse Granitblöcke etwas weiter talabwärts in jüngeren Schottern, die dort in grosser Mächtigkeit den Fuss des Gebirges umkleiden. Zweifellos wurde der Granit weit aus dem Innern des Gebirges vom Eise hieher gefrachtet. Es sind dies nicht die einzigen Spuren früherer glazialer Tätigkeit, welche von uns im Kok-schaal-Tale gefunden wurden. Am rechten wie am linken Ufer konnten solche, wenn auch nicht häufig, festgestellt werden.

Die Kirgisen-Niederlassung Kysyl-Gumböss (ca. 2300 m), verdankt ihren Namen der roten Färbung des Bodens, ein Ergebnis der Zersetzung der hier in die schroffen, schön gegipfelten Talmauern eingelagerten, leuchtend roten Kalk-Konglomerate und Sandsteine (Kysyl = rot), sowie den vielen, die Gegend schmückenden, kirgisischen Grabkammern (Gumböss). Hier sollte ein Vorstoss in die sogenannte Bos-adyr-Kette gemacht, und zur Gewinnung besseren Einblickes in ihren Bau einer der Hochgipfel bestiegen werden. Dies scheiterte jedoch zu meinem Leidwesen an einer Erscheinung, welche überhaupt während eines grossen Zeitraumes, wo die Expedition sich am Südrande des Gebirges bewegte, die Beobachtungen ungemein erschwerte und zum Teile unmöglich machte: an anhaltender, ungemein dichter Nebelbildung.

Der Nebel war jetzt im Frühjahre — in dieser südlichen, durch ungemein trockenes Klima ausgezeichneten Gegend, eine überraschende Erscheinung — fast dichter, jedenfalls weit anhaltender, als bei uns in den Alpen im November; er lichtete sich wochenlang nicht. Die Erklärung hiefür liegt in der in dieser Jahreszeit beginnenden, tagsüber kräftigen Erwärmung des Lössbodens, welche den feinen Staub aufwirbelt und ihn selbst bei Windstille, geschweige denn bei den oft herrschenden, starken Winden in aufsteigende Bewegung bringt, wo er schwebend verharrt. Da nun im Frühjahre die Berghänge infolge der Schneeschmelze viel Feuchtigkeit verdunsten, so kondensieren sich diese Dünste an den schwebenden, feinen Staubteilchen zu Nebeln, die nicht wanken und nicht weichen. Wir hatten im April und Mai häufig wolkenlosen Himmel, aber selten klare Atmosphäre; die photographische Tätigkeit musste öfters viele Tage unterbleiben, ein grosser Verlust. Über vieles der Beobachtung werte an unserem Wege lag ein undurchdringlicher Schleier.

Bei der Örtlichkeit Ak-tala wurde wieder auf das rechte Ufer übergesetzt. Das Ufergebirge, der Sogdan-Tau, zeigt, hier bis zu 3500 m ansteigend, gewaltige Massenentwickelung in mehreren Parallelketten, denen sogar kleinere Gletscher nicht

fehlen; es ist noch vollständig terra incognita. Der Weg führte uns an seinem Saume entlang, wobei sich in selten grossartigen Aufschlüssen höchst interessante, zum Teil sehr komplizierte Faltungserscheinungen der dieses Gebirge ausschliesslich aufbauenden Sedimente beobachten liessen. Bei der Beschränktheit des zur Verfügung stehenden Raumes kann indes hier nicht weiter auf dieses Thema eingegangen werden.

Oberes Karbon wurde bei dem Passe Kok-belöss gefunden, und eine sehr schöne Fauna dieses Horizontes bei Utsch gesammelt. Dort wurden zuerst Schwagerinen führende Schichten entdeckt, die nun den Weg der Expedition auf viele hundert Kilometer bis zum Chalyk-Tau begleiteten. Die ungeheure Verbreitung dieser, dem obersten Karbon angehörigen Foraminiferen ist ein neues, wichtiges Faktum in der Stratigraphie Zentralasiens. Auf der Fortsetzung des Weges nach Ost über Schinne und durch die Schlucht Kara-turuk zur Kirgisenniederlassung Kara-bulung boten sich uns herrliche, grossartige Aufschlüsse des gleichen NO.-SW. streichenden Faltenbaues. Erst von hier ab wird der Fluss Tauschkan-darja genannt. Bei der bald eintretenden Verengung des Flusslaufes, besonders in der Nähe des Passes Denge-dawan, konnten Anzeichen für eine wesentliche Vertiefung des Flussbettes festgestellt werden.

Die Route der Expedition bewegte sich nun meistens im Flusstale selbst nach Nordosten, wobei vor Basch-tschakma an vortretenden Zügen des rechten Ufergebirges (Mai-tube) in Kalk-Konglomeraten eine karbonische Fauna gesammelt wurde. Bei Tagh-tumschuk fesselten komplizierte Störungen im Gebirgsbau (Flexuren und Brüche) die Aufmerksamkeit, wie denn überhaupt bis zur Erreichung der Stadt Utsch-Turfan die merkwürdigsten geologischen Bilder wechseln, worüber hier leider nichts weiteres gesagt werden kann.

War die breite Flussebene bisher nur eine von kleineren oder grösseren Oasen durchsetzte Geröllwüste, so ändert sich dieses Bild bei Ut-Baschi, wo der Strom, sich vielfach verzweigend und ausbreitend, seine Ufer verflacht. Hiedurch wird

eine von der sartischen Bevölkerung, die hier an Stelle der bisherigen kirgisischen tritt, meisterhaft eingerichtete Irrigation ermöglicht. Durch den grossen Fleiss, durch die vorzügliche Eignung dieser Bevölkerung für Feld- und Gartenbau, wurde diese Gegend in ein unabsehbares, herrliches Gartenland verwandelt, das sich bis zur Stadt Utsch-Turfan (ca. 1500 m), und darüber hinaus, erstreckt. In den dunklen Kalken, welche in unmittelbarer Nähe der Stadt das Gebirge aufbauen, findet sich eine schöne, oberkarbonische Fauna; besonders der die malerische Zitadelle tragende Felszug besteht aus mächtigen Bänken, die ausschliesslich aus Productus und Spirifer zusammengesetzt sind. Die Absicht, schon jetzt (Ende April) in die den Südabhang des Tian-Schan durchfurchenden, bisher unerforschten Quertäler einzudringen, musste wegen der dort noch lagernden Schneemassen vertagt werden, weshalb ich beschloss, zunächst dem Fusse des Gebirges entlang weiter nach Osten zu wandern, um den gleichfalls bisher unerforschten, als Chalyk-Tau bekannten Gebirgsteil zu besuchen, dessen rein meridional verlaufende Quertäler günstigere Reiseverhältnisse erwarten liessen.

Der Weg führte zunächst nach der grossen Handelsstadt Ak-su, von wo nach mehrtägigen Vorbereitungen die Reise nach Nordosten, nach Bai, angetreten wurde. Hiebei querte die Expedition zwischen Kara-julgun und Tugarak-tan das Westnordwest streichende Tertiärgebirge des Tschul-tau in schrägem Schnitte durch seinen interessanten Faltenbau von Sandsteinen, Gips-führenden Tonen und sie bedeckenden Konglomeraten.

Von der alten, interessanten Stadt Bai ging es in der Richtung Nordwest über Terte und Uskim zum Fusse des Gebirges, dessen Erreichung mit Schwierigkeiten verbunden war, da die Darstellungen der Karten in bezug auf dieses Gebiet wertlos sind. Dem Fusse des Gebirges entlang bilden rote Kalk-Konglomerate eine ca. 30 Werst lange, mehrere hundert Meter über der Talsohle ansteigende, ungemein schroffe, in kühnen Gipfelbauten erodierte Kette. Diese Konglomerate waren mit weichen, bunten Mergeln zusammen steil aufgefaltet, welche

jedoch zum überwiegenden Teile schon zerstört und abgetragen sind. Die dem Chalyk-Tau entströmenden Flüsse bilden wilde Schluchten und brechen durch diese Kette in torförmigen, engen Breschen, weshalb man von der Ebene aus auf direktem Wege nicht zu ihnen gelangen kann. Aber auch im Hochgebirge nehmen diese Flüsse schluchtförmigen, vielfach gewundenen Lauf und sind daher teilweise schwer, teilweise gar nicht zugänglich.

Besucht wurden die grossen Quertäler Tilbitschek, Kepek-tschai, Kapsal-yan und Terek (in den Karten irrtümlich Kasnak-su genannt); ihr Verlauf ist zum Teil in den Karten falsch dargestellt. Hierüber sei nur kurz hervorgehoben, dass der Kapsal-yan-Fluss, der bedeutendste der Gebirgsströme, beim Austritte aus seinem Engtal die Richtung nach Südwesten und Westen am Südabfalle des Gebirges entlang nimmt, und dass der Fluss, welcher aus dem in der 40 Werstkarte fälschlich Kasnak-su genannten, in Wirklichkeit den Namen Terek führenden Tale herauskommt, sich nicht in den Musart-darja, sondern in den Kapsal-yan ergiesst, der seinerseits in der Nähe von Tschach-tschi jenen Strom erreicht.

Bei dem Eindringen durch die Enge des Tilbitschek-Tales in das Gebirge werden die Mergel und roten Konglomerate durch hellgraue, feine, sandige Konglomerate ersetzt, welche in wirkliche Sandsteine übergehen und Lettenkohlenschiefer mit Pflanzenabdrücken einschliessen. Hiezu treten stellenweise dunkelbraune, ziemlich arme Toneisensteine und weiterhin kompakte Kalke. Aus dieser Formation weiter in die kristallinische Zone zu gelangen, erwies sich schon bald infolge der schluchtartigen Beschaffenheit des Tales als unmöglich.

Im Tale Kepek-tschai kann man in grossartigen Aufschlüssen die kompliziertesten Formen des Schichtenbaues, Überschiebungen, Durchbiegungen etc. beobachten, die von chaotischen Zerstörungen der Gesteine begleitet sind. Diese Störungen dürften sich vielleicht nach genauerer Prüfung der beobachteten Verhältnisse als im Zusammenhange stehend mit den schon früher erwähnten, im südlichen Musart-Tale beobachteten er-

weisen, da die kristallinischen Gesteine von dort herüberstreichen und etwas tiefer im Gebirge in Kontakt mit den Sedimenten treten. Die roten Konglomerate und tertiären Mergel sind, weil viel jünger, von dieser Bewegung unberührt geblieben.

Ich erstieg den ins Tilbitschek-Tal führenden Busaitasch-Pass (ca. 2800 m) und von dort aus die in etwa 2500 bis 3000 m Höhe zwischen den zwei genannten und dem Kapsal-yan-Tale sich breitenden, ausgedehnten Alpenplateaus. Hier konnte gute Orientierung über den Bau des zentralen Chalyk-Tau gewonnen werden, noch mehr auf einem von Herrn Keidel erstiegenen, ca. 3600 m hohen, zwischen Terek und Kapsal-yan gelegenen Gipfel. Die höchsten Erhebungen des Chalyk-Tau liegen im Norden und Westen; gegen Süden und Osten findet allmähliche Abdachung statt. Mein Versuch, das grosse Quertal Terek bis zu seinem Schlusse zu durchwandern, gelang, wodurch ein vollständiger Einblick in den geologischen Bau des Gebirges gewonnen wurde. Den am Aussenrande lagernden Schwagerinen-Kalken, welche mit Pflanzen führenden Schiefern wechsellagern, folgen Kalke anderer Art und diesen eine mächtige kristallinische Zone, welche jedoch mit Annäherung zum Talschlusse, ganz wie in anderen Quertälern des zentralen Tian-Schan, Kalken und Schiefern Raum gibt, die also auch hier den zentralsten und höchsten Teil des Gebirges zusammensetzen. Bedeutende Störungen und Unregelmässigkeiten im Faltenbau, sowie starke Pressungserscheinungen konnten auch hier festgestellt werden.

Überraschend war es für mich, in diesem südlichen und auch nach Süden sich öffnenden Tale die Elemente eines engen Quertales der nördlichen europäischen Kalkalpen zu finden: Terrassen mit üppigen Alpenmatten, an felsigen Steilhängen Fichtenwälder, welche bis in die Enge der Schlucht herabziehen und auf Talstufen dichte Waldbestände bilden, einen sehr wasserreichen Hauptbach, genährt von vielen, aus echt alpinen Seitentälern kommenden Zuflüssen des ungemein schneereichen, wilden Gebirges.

Da das Tal an seinem Schlusse in zwei enge Spalten aus-

läuft, konnten sich dort keine Gletscher bilden. Hiegegen finden sich kleinere Gletscher in den karförmig geweiteten Talschlüssen der Seitentäler. An den Mündungen einiger dieser Täler sind, wiewohl vieles von dem Hochwasser des Bergstromes hinweggespült wurde, noch immer ansehnliche Mengen Moränenschuttes aufgestaut, als Zeichen ehemaliger, bedeutender Vergletscherung.

Der Rückweg vom Chalyk-Tau wurde nahe dem Gebirgsfuss entlang genommen, zunächst dem Unterlauf des Terek-Tales aufwärts folgend, dann die das Tal anscheinend abschliessende Hochterrasse Jar-dschilga übersteigend, hinab in die weite Talebene von Karabag, welche zwischen dem Laufe des Musart-darja und dem Gebirgsfusse sich dehnt, und Gelegenheit zum Einblick in die anderen Quertäler gab. Der Südrand des Gebirges fällt in etwa 1200 m hohen Mauern gegen die Hochebene ab. Dem Fusse entlang zieht jedoch ein Gürtel mehr oder weniger zerstörter und abgetragener Tertiärablagerungen. Nach Überschreitung des Musart-darja bei Tschapta-channe, wo der Fluss ganz an den Gebirgswall hindrängt, führt der Weg unausgesetzt über alten begrünten Moränenboden über eine Anzahl NS. verlaufender, durch kleine Quertälchen getrennter Moränenrücken, auf welchen gewaltige Transportblöcke lagern. Von dieser ungeheuren Anhäufung Moränenschuttes ging es steil hinab gegen das erste chinesische Piket Kone-schar am Eingange des südlichen Musart-Tales, wo wir am 23. Mai eintrafen.

Wir durchreisten dieses Tal zum zweiten Male, gelangten bis zu seinem Schlusse und wieder zurück, wobei sich willkommene Gelegenheit ergab, die in Kürze schon erwähnten, merkwürdigen geologischen, glazial-geologischen und orographischen Verhältnisse genauer zu untersuchen, als es bei der flüchtigen Durchwanderung im Vorjahre möglich gewesen war. Der eigentliche Zweck, die Erforschung des Verlaufes der zum zentralen Massiv hinziehenden, grossen Nebentäler und ihrer Gletscher konnte indes leider nicht durchgeführt werden, da die mir von den chinesischen Behörden in Ak-su in Aussicht gestellte Hilfe ausgeblieben war. Wir kehrten nunmehr nach Utsch-Turfan

zurück, um von dort einen Vorstoss zur Erforschung der südlichen Quertäler des Kok-schaal-tau zu unternehmen.

Auf dem Wege dahin drängte sich mir in noch überzeugenderer Weise, als dies bisher schon bei den Wanderungen am Südfusse des Gebirges der Fall war, die Tatsache auf, dass von dem sogenannten mauerartigen Abfall des Tian-Schan gegen das Tarim-Becken, den man den meisten Kartendarstellungen zufolge erwarten müsste, und wovon schon viele Reisende geschrieben haben, wenig oder gar nichts zu bemerken war. Die Täuschung für den in grösserer Entfernung vom Gebirgsfusse dahinziehenden Wanderer beruht auf der schleierartigen Umhüllung des Gebirges im scharfen Lichte der Steppe. Die Abdachung gegen die Hochebene ist vielmehr eine allmähliche. Sie findet je nach den Besonderheiten des Baues der einzelnen Teile des Gebirges und der dementsprechend von der Erosion eingeschlagenen Richtung in nach und nach absinkenden Zügen von Querketten statt, deren kapförmige Enden weit in die Wüste vorspringen, oder auch in stufenartig sich erniedrigenden Längsketten. Bedenkt man überdies, wieviel von den äussersten Randketten in den ungeheuren Aufschüttungsmassen der Hochebene begraben liegt, — es war von solchen Fällen schon öfter in diesem Berichte die Rede — so muss die bisherige Vorstellung von dem mauerförmigen Abfalle des Tian-Schan gegen Süden aufgegeben werden.

Zunächst galt es, das Dschanart-Tal zu durchforschen, um zu prüfen, welche Bewandtnis es mit dem angeblichen Dschanart-Durchbruch habe und inwiefern die bisherigen Darstellungen der Karten sich bestätigen würden; ihnen zufolge (siehe das bei der Begehung des Sary-dschass-Tales Gesagte) wäre das Quertal Dschanart der Kanal, durch welchen die Entwässerung und Ableitung der Ausflüsse der grossen Längstäler des Nordabhanges zur Südseite, zum Tarim-Becken, stattfindet. Das Ergebnis der Durchforschung und gänzlichen Durchwanderung des Dschanart-Tales und der Ersteigung des ca. 4400 m hohen Firnsattels an seinem Schlusse war, dass es keineswegs, wie bisher angenommen wurde, ein Durchbruchstal ist, und

dass kein Tropfen Wasser der Nordseite des Tian-Schan durch diesen Kanal dem Süden zufliessen kann. Von den anderen Ergebnissen der Untersuchung sei nur kurz erwähnt, dass auch das Dschanart-Tal und seine Nebentäler einst von gewaltigen Eismassen ausgefüllt waren, auf deren Entstehen und Vergehen die heutige Talform zum grossen Teile zurückzuführen ist, sowie dass auch in den Kalken dieses Tales eine oberkarbonische Fauna gesammelt werden konnte, die indes verschiedenen Stufen anzugehören scheint, endlich dass auch der Formationscharakter dieses südlichen Tian-Schan-Tales in gewissem Sinne ein nordisch alpiner ist.

Wenn nun auch festgestellt war, dass der sogenannte Dschanart-Durchbruch nicht vorhanden sei, so war hiemit das Problem doch erst zur Hälfte gelöst, und es galt nun, herauszufinden, welchen Weg die Gewässer des Nordabhanges auf ihrem Laufe zum Tarim-Becken wirklich nehmen.

Zu diesem Zwecke wurde zunächst — und zwar mit negativem Erfolge — das dem Dschanart-Tale im Osten benachbarte Munköss-Tal besucht, und dann, soweit ausführbar, nahe dem Gebirgsfusse nach Osten gewandert, um alle von dem Gebirge herauskommenden Wasserläufe zu besichtigen. Es erwies sich, dass keiner von ihnen den Wasserreichtum der nördlichen Gletscherflüsse führt. Das wenige Wasser der meisten versickert in den Aufschüttungsböden der Gebirgshänge und tritt erst viel weiter südlich an verschiedenen Orten wieder zutage.

So beschloss ich denn, den Fluss Kum-Aryk aufzusuchen, von dessen Wasserreichtum die kirgisische Nomadenbevölkerung viel zu erzählen wusste. Auf dem Wege dahin durch die am Südabhange sich breitende Geröllwüste besuchten wir die Oase Kutschi (ca. 1600 m), um dort Erkundigungen einzuziehen, was jedoch bei dem Misstrauen der Bevölkerung schwierig war. Wir wanderten sodann, da der mächtige Strom, hier aus einem einzelnen Arme bestehend, nicht zu überschreiten war, nach Südosten zur Oase Oi-Tatür, durch eine Wüste, die im Norden mächtig überragt wird von einem gewaltig vergletscherten Gebirgswall, der Sabawtschö-Kette; wegen ihrer weit nach Süden in

eine heisse Gegend vorgeschobenen Lage bietet sie einen überraschenden Anblick. Einzelne Strecken dieser Wüste zeigen in zahlreichen, verfallenden Bauten und jetzt vertrockneten Kanälen Zeichen früherer dichter Besiedelung; die Gegend musste verlassen werden, da der Strom sein Bett tiefer eingegraben hat, und die Bewässerung der hochgelegenen Teile hiedurch unmöglich wurde.

Unweit von Oi-Tatür überschritten wir den Kum-Aryk, dessen Gewässer sich hier auf eine Breite von 4 Werst verteilen. Er enthält ein doppelt so grosses Quantum Wasser, als der Tauschkan-darja bei der Stadt Ak-su, wo der Kum-Aryk in diesen mündet. Am Laufe des letzteren aufwärts suchten wir uns dem Gebirge zu nähern, da der überraschende Wasserreichtum annehmen liess, dass er nicht den Schnee- und Firnlagern des Südabhanges allein seine Entstehung verdanken könne. Den Ostrand des Flusses begleitet ein Gürtel fruchtreicher Oasen, deren nördlichste, Schaichle (ca. 1700 m), dem Gebirge am nächsten liegt.

Auf dem letzten Vorstosse, der, von dort aufwärts am Ufer des ca. 150 m tief in die Gerölldecke eingerissenen, mächtigen Stromes gegen das Gebirge unternommen wurde, liess sich endlich mit Gewissheit feststellen, dass tatsächlich durch den Kanal des Kum-Aryk die Gewässer der Nordseite des Tian-Schan dem Süden zufliessen. Der Strom durchbricht das Gebirge in einer Schlucht zwischen senkrechten Mauern, so dass auch nicht ein Fuss breit Raum — wenigstens im Sommer — wasserfrei bleibt. Der Eintritt in die gewaltige, gewundene Spalte ist unmöglich. Im Hintergrunde sieht man die ungemein schnee- und gletscherreichen Gipfel der Bos-tagh-Kette aufragen, deren Fuss die Gewässer des Flusses auf ihrem viel gewundenen Südlaufe umspülen. Nur im Winter, bei niederem Wasserstande könnte eine entsprechend ausgerüstete und organisierte Expedition die Schlucht durchmessen und ihren Verlauf, sowie den ihrer hauptsächlichsten Zuflüsse aufnehmen und feststellen bis dorthin, wo der Utsch-kul in den Sary-dschass mündet. Von dort ab ist der Lauf bekannt. Das ganze Bild aber von dem Verlaufe dieses Flusses nach Süden, wie es die

bisherigen Darstellungen der Karten zeigen, muss nunmehr als falsch beseitigt werden.

Wenig nördlich von der Utsch-kul-Mündung fliesst dem Sary-dschass aus Westen ein aus einem grossen, auf den Karten bisher nicht verzeichneten Längstale, dem Kaündü-Tale, kommender Strom zu. Südlich hievon mündet der um vieles mächtigere, aus einem noch wesentlich bedeutenderen und gleichfalls bisher unbekannten Längstale herausströmende Koi-kaf. In der Reihenfolge nach Süden folgen noch wenigstens zwei aus Längstälern kommende, weniger bedeutende Nebenflüsse, Kasalai und Ak-su. Von all dem später mehr.

Der Kum-Aryk, in seinem Unterlaufe ebenfalls Ak-su genannt, mündet etwa 12 Werst im Südwesten von der gleichnamigen Stadt in den Tauschkan-darja. Unmittelbar beim Ausbruche des Kum-Aryk aus seiner Gebirgsenge fliesst ihm von Osten her der stürmisch wilde, wasserreiche Sabawtschö in unzugänglicher Klamm zu; er kommt aus der oben erwähnten gletscherreichen Sabawtschö-Kette, aus einem langen Gletscher, über den bisher nichts bekannt geworden war. Der Bedeutung seines Abflusses nach, war zu erwarten, dass er von grosser Ausdehnung sein müsse, ungeachtet seiner weit nach Süden vorgeschobenen Lage, und trotzdem sein Tal sich gegen Südwesten öffnet. Ich beschloss daher, ihn aufzusuchen.

Der Vorstoss dahin ging von der oben erwähnten Oase Schaichle aus. Man erblickt von dort den Südrand des Tian-Schan in vier stufenweise abdachenden Falten, deren Streichen O. 30° N. ist, und deren Material, abgesehen von der äussersten, aus tertiären Mergeln etc. aufgebauten Kette hauptsächlich aus blaugrünen, stark umgewandelten Schiefern besteht, wozu sich in der vierten Kette graue Kalke gesellen, in welchen eine gut erhaltene Fauna des obersten Karbons entdeckt wurde. Nach Querung dieser vier Ketten (Pass Kara-burö ca. 3200 m) befindet man sich am Südrande des NNO. streichenden, etwa 1½ Werst breiten Sabawtschö-Tales, dessen Nordrand eine mächtige Kette von grossen und kleinen Gletschern durchsetzter, kühner Felsberge bildet; sie steigt auf ihrem NNO.-Laufe

bis zu Höhen von beiläufig 5500 m an und ist dort sehr stark überfirnt. Die gewaltige, trogförmige Hohlform des Tales wird in ihrem Unterlaufe von bedeutenden Massen roter und weisser, feiner, in Sandstein übergehender Konglomerate erfüllt, die ein Mittelgebirge zwischen den Hochgebirgen bilden; infolge ungemein kräftiger Erosion wurde es in ein Labyrinth tiefer, steilwandiger Schluchten zerlegt, welche eine Anzahl Plateaus trennen. Der Zugang in das Tal von seiner Mündung aus wird hiedurch gesperrt. Schotter und Moränenschutt überlagern die Plateaus und tragen ziemlich dichte Alpenwiesen, die in dieser südlichen Gegend überraschen. Eine teilweise Begehung des Gletschers, dessen Zungenende bei ca. 2750 m liegt, war mit grossen Schwierigkeiten verbunden, da er auf eine Länge von mehr als 10 Werst seiner ganzen, ca. $1^1/_4$ Werst betragenden Breite nach, mit einem förmlichen Gebirge aus Moränenschutt und Riesentrümmern gänzlich überdeckt ist. Etwa 10 Werst vom Zungenende entfernt, mündet am orographisch linken Ufer, von Nordosten heranziehend, ein grosser Nebengletscher, der aus einem breiten Firnplateau herabkommt und von unglaublich schroffen und hohen Bergen umstanden wird. Die Länge des Hauptgletschers beträgt über 22 Werst und wird von einer bis zu 6000 m ansteigenden Kette gänzlich überfirnter Berge abgeschlossen. Die Ausdehnung eines solchen Gletschergebietes am äussersten Südrande des Tian-Schan, obendrein mit einer Exposition nach Südwesten ist überraschend. Die ehemalige Vergletscherung des Tales war jedoch viel bedeutender und lässt sich mehr als 400 m hoch über dem heutigen Gletscherniveau an den Talwänden hinauf verfolgen. Die kristallinen Gesteine sind im Mittellaufe des Tales am meisten entwickelt, aber gegen seinen Schluss hin herrschen stark umgewandelte, dunkle Kalke und weisse, streifige Marmore vor, ganz wie in den anderen Tälern des zentralen Tian-Schan und scheinen hier das hauptsächliche, gebirgsbauende Element zu bilden. Diabasartige Eruptivgesteine finden sich auch hier. Die genauere Erforschung dieses Gletschergebietes könnte noch zu wichtigen, neuen Feststellungen über die Verzweigung der Kämme und

Täler dieses fast noch unbekannten Teiles des zentralen, südlichen Tian-Schan führen. Mir blieb jedoch infolge anderer wichtiger Aufgaben nicht mehr genügend Zeit hiezu übrig.

Ich wandte mich nun mit der Karawane über Kutschi und durch das Tal Darwasse-su wieder nach Südwesten und drang sodann westwärts vom Dschanart-Tale in ein anderes der unerforschten Quertäler, in das Kukurtuk-Tal, ein. Ich durchwanderte es bis zu seinem Schlusse, erstieg ca. 4400 m hohe Passeinschnitte in der es abschliessenden Doppelkette und konnte feststellen, dass in diesen hohen, gegen das Tarim-Becken abdachenden Randketten keine kristallinen Gesteine mehr vor kommen. Die kristalline Zone streicht schon zwischen Dschanart und Kukurtuk aus, während weiter nördlich die kristallinen Massen in der Borkoldai-Kette ihre Fortsetzung nach Westen finden. In den Geschieben des Tales und der benachbarten Hochebene findet sich nichts Kristallinisches. Die gebirgsbauenden Elemente sind hier nahe dem Talrande auftretende Schwagerinen-Kalke, helle, mehr oder weniger marmorisierte Kalke und tonig sandige Schiefer von häufig wechselndem Habitus, sowie dichte, dunkle Kalke, in welchen eine sehr reiche und schöne, oberkarbonische Fauna entdeckt wurde. Gegen den Talschluss hin treten hiezu blauschwarze Tafelschiefer und dunkle, oolithische Kalke. In keinem der bisher besuchten südlichen Tian-Schan-Täler äussert sich solche Zerrüttung in den Lagerungsverhältnissen, als in diesem; die Verworrenheit ist derart, dass es schwer ist, sich eine zutreffende Vorstellung davon zu machen: Fallrichtung und Fallwinkel der Gesteine wechseln streckenweise alle zehn Schritt. In diesem Gebiete stärkster Dislokationen erlebten wir eine kräftige Bodenbewegung, ein Erdbeben.

Das Tal hat eine Länge von ca. 60 Werst. In seinem geweiteten Unterlaufe nehmen konglomeratartig gefestigte Schotter glazialen Ursprungs ungeheure Mächtigkeit an. Der Fluss durchbricht sie in einer echten Cannōn-Schlucht von nahezu 10 Werst Länge. Gewaltige Mengen Moränenschuttes finden sich im Oberlaufe des heute nahezu gletscherfreien Tales, das

aus einer Serie klammartiger Verengungen und beckenartiger Weitungen besteht, überall an den Bergwänden die Spuren einstiger Vereisung zeigend. Auffällig ist, dass in diesem Tale, wiewohl es parallel dem Dschanart-Tale angeordnet ist, Graswuchs und Wald fehlen, welche im letztgenannten Tale verhältnismässig reiche Entwickelung zeigen.

Für den Übergang zur Nordseite des Gebirges wurde der Bedel-Pass gewählt. Um den Eingang dieses grossen Quertales zu erreichen, querten wir zunächst auf dem Wege gegen Westen die Täler Tschon-dschar, Balter-jailak, Churgo und Kok-rum, mehrere Pässe überschreitend. Hiebei bot sich Gelegenheit, einen beherrschenden Überblick über das System der Talverzweigungen zu gewinnen, das die Gebirgsmassen zwischen den grossen Tälern Kukurtuk und Kok-rum zerlegt und aus welchen nur zwei bedeutende Rinnen (Mandagül-bulak und Tange-sai) gegen den Tauschkan-darja hinausziehen. Auch sie führen nur periodisch Wasser, wiewohl ihr Quellgebiet, von Gletschern gespeist, ungemein wasserreich ist. Es liess sich feststellen, dass nicht sowohl die Verdunstung, als die Mächtigkeit der Aufschüttungsböden die Ursache ist, welche den Südabhang des Tian-Schan wasserarm macht.

Ein hoher, gewaltiger Zug feiner, dichter Konglomerate, dem Streichen des höheren Kalkgebirges folgend, und in flachen Gewölben aufgerichtet, bildet hier und noch weiter nach Westen hin den Rand gegen die zum Tauschkan-darja abdachende Hochebene. Trockene Täler, von senkrechten Uferwänden begrenzt, durchschneiden diese Masse. Von ihrem Fusse aus gewinnt man einen umfassenden Überblick auf die den Südrand des Tauschkan-darja begleitenden, schon früher erwähnten, unerforschten Gebirgsketten des Sogdan-tau, Ussun-tau und Bottama-tau und auf ihren grossartigen Faltenbau.

Wir querten den wasserreichsten Fluss in diesem Abschnitte des Gebirgsrandes, den reissenden Kok-rum, der in einer vom Kukurtuk-Passe nach Westen streichenden, stark vergletscherten Sekundärkette seinen Ursprung nimmt, und traten, den äussersten Rand des Konglomeratgebirges umziehend, in das Bedel-

Tal ein. Dieses ist von den südlichen Quertälern des zentralen Tian-Schan am meisten bekannt, da der Pass an seinem Schlusse, ausser dem Musart-Passe der einzige ist, über welchen sich der Karawanenverkehr zwischen Nord- und Südabhang vollziehen kann. Wiewohl das Bedel-Tal auch schon von mehreren Expeditionen durchwandert wurde, ist darüber doch noch nichts Genaues bekannt. Der wasserreiche Fluss durchschneidet die hier ungemein breit entwickelte und gefaltete Konglomeratzone in zum Teil undurchschreitbaren Schluchten, welche noch bis zu gewaltiger Tiefe in den Aufschüttungsboden eingegraben sind. Man gelangt von dort in ein Niveau ungemein zersetzter, bunter Tonschiefer und zu einer Serie graublauer, kalkiger Schiefer, alle steil aufgerichtet und vielfach unregelmässig gestört, sodann in den 15 Werst breit sich ausdehnenden Horizont der für den südlichen Tian-Schan charakteristischen, sandig-tonigen und kalkig-tonigen, blaugrünen Schiefer, zwischen welchen feine Glanzschiefer auftreten. Diese Serie wird taleinwärts von einer 4 Werst breiten Zone marmorisierter, weisser Kalke abgelöst, welche rote Kalkbänke einschliessen, worauf in den höchsten Teilen des Tales und am Passe selber graublaue, phyllitähnliche Schiefer auftreten, die auch schon in den anderen, südlichen Quertälern, zusammen mit echten, dunklen Tonschiefern, als in den höchsten Regionen vorherrschend angetroffen wurden. Ungemein starke Pressungserscheinungen machen sich auch hier bemerkbar, und der Schichtenbau ist stark gestört, was durch das Auftreten diabasartiger Gesteine nur zum Teil erklärt wird.

Bemerkenswert ist die verhältnismässig bedeutende Vergletscherung der weit nach Süden vorgeschobenen Ketten, welche das Bedel-Tal im Westen begrenzen. Diese kleinen Gletscher drainieren überwiegend nach Norden in das noch unerforschte Tal Karakol, das zwischen der grossen Randkette und der weit höheren, kristallinischen Borkoldai-Kette eingetieft ist.

Der ca. 4300 m hohe, nahezu eisfreie Bedel-Pass liegt nicht am Schlusse des ca. 55 Werst langen Tales, sondern etwas westlich von der einen kleinen Gletscher bergenden Karmulde

des Talschlusses. Vom Passe aus ist nur der Blick nach Süden interessant und wechselvoll. Im Norden wird die Aussicht abgesperrt durch die Kette des Ischigart-Tau mit ihrer gleichmässigen Gipfelreihe. Auffällig ist an ihr nur die über Erwarten bedeutende Vergletscherung ihres Südabfalles. Der Schichtenkomplex der Südseite setzt sich auf der Nordseite des Bedel-Passes fort. In einer beckenartigen Weitung des nördlichen Bedel-Tales wurden in ungefähr 3300 m Höhe tertiäre Sandsteine beobachtet, die schwach disloziert sind. Der sehr wasserreiche, nördliche Bedel-Fluss wühlt sein Bett schon bald tief in die bodenbildenden, steil gestellten Kalke und sandig-tonigen Schiefer ein, fliesst in enger Schlucht und wendet sich kurz vor dem in das Ischtyk-Tal leitenden, breiten Passrücken energisch nach Osten, zwischen hohen, senkrechten Felsmauern dem Blicke in unzugänglicher Klamm entschwindend; sein Wasser gelangt durch den Kanal des Ischtyk-su in den Sary-dschass und wird durch den Kum-Aryk der Südseite zugeführt, ein wunderlicher Verlauf, wenn man bedenkt, um wieviel leichter ihm die Erreichung des Naryn-Gebietes gewesen wäre.

Nach Überschreitung des flachen Wallpasses Ischtyk (ca. 3500 m) wird man überrascht durch den Anblick der bisher so wenig bekannten und gewürdigten Borkoldai-Kette, die durch Kühnheit des Baues ihrer bis zu 6000 m ansteigenden, grossartigen Gipfel und wegen des Reichtums ihrer Eisbedeckung zu den gewaltigsten Ketten des zentralen Tian-Schan gezählt werden muss. Nicht minder grosse Ueberraschung, besonders wegen der Entfaltung ihrer Firn- und Eismassen und in bezug auf Ausdehnung ihrer Gletscher, bereitet die nach NNO. streichende Ak-schiriak-Kette, welche den Weg aus dem Quellgebiete des Karasai in das des Jak-tasch fortwährend im Osten begleitet. Man sieht in dieser im ganzen, etwa 50 Werst langen Kette nur wenig Felsiges zutage treten; das meiste ist in Firn und Eis gehüllt, wiewohl sie nur bis zu 4500 m und nur 7—800 m über das Syrt-Plateau ansteigt.

Dieser Kette fällt die Rolle des Wasserscheiders zwischen Naryn und Sary-dschass, also zwischen Syr-daria und Tarim

zu, sie erfüllt sie jedoch nur mangelhaft. Sowohl die Wasserscheide zwischen dem vielverzweigten Quellgebiete des Kara-sai im Westen und des Ischtyk-su im Osten, als auch die zwischen dem nach Westen fliessenden Jak-tasch, und dem nach Osten fliessenden Jür-tasch ist sehr verwischt. Auf dem flachen, sumpfigen Syrt-Plateau, auf dem die genannten Flüsse ihren Ursprung nehmen, fliessen und sickern die Gewässer der ringsum sich erhebenden Gletscherketten in dem lockeren Aufschüttungsboden nach allen Seiten, und bilden eine grosse Zahl kleinerer und grösserer, im Grün der Alpenmatten eingebetteter Seen, sowie ausgedehnte Sümpfe. In diesen weiten Gebieten verzweigen sich die Wasserläufe derart, wechseln periodisch ihren Lauf und versickern in Sümpfen, so dass eine Trennung der Quellgebiete auf die grössten Schwierigkeiten stossen würde.

Im Quellgebiete des Karasai finden sich in unmittelbarer Nähe der Gletscher, auf einer Höhe von ca. 3700 m, also etwas höher als am See Tschatyr-kul, wo sie Muschketow zuerst festgestellt hatte, tertiäre rote Sandsteine und Konglomerate; sie konnten auch noch weiter im Westen, am Abhange des Dschitym-Tau, beiläufig in gleicher Höhe beobachtet werden. Man wird nicht fehlgehen in der Annahme, dass auch sie in einst hier eingeschlossen gewesenen Hochseen abgesetzt wurden, von denen die vielen auf dem Plateau zerstreuten kleinen Seen die Relikten sind. Die Talumwallung im weiteren Sinne, sowohl von Karasai als von Jak-tasch, bilden Granite verschiedenen Charakters; zwischen dem Ischtyk-su und dem Karasai wurden Kalke mit devonischen Fossilien gefunden.

Aus einem Quelltale des Ischtyk-su gelangten wir an den Südfuss des Terskei-Ala-Tau, dessen Südseite weit stärker vergletschert ist, als erwartet werden konnte. Die sehr ausgedehnten, Kammhöhe bildenden Plateaus liegen unter zusammenhängenden Eisdecken, deren Endzungen vereinzelt weit hinein in den Syrt sich erstrecken. Nur wenige hohe Gipfel (bis zu 5500 m) entragen dem Südrande dieses Plateaus, während der zum Issyk-kul-Becken abfallende Nordrand der Kette in eine Reihe formenreicher, schroffer, überfirnter Berge

aufgelöst erscheint. Wir überschritten die Kette über den schwierigen Souka-Pass (ca. 4250 m), wo sich zu beiden Seiten des Weges grossartige Hochgebirgsbilder entfalten, und besonders von der Westseite bedeutende Gletscher zur Mulde des Passdefilees einmünden. An der Südseite des Passes herrschen dunkle Kalke in den Ufergebirgen vor; sie nehmen schiefrige Beschaffenheit an. Am Passe selbst breitet sich eine mächtige Granitzone, aus Graniten sehr verschiedener Ausbildung bestehend. Nach Süden zu folgt hierauf eine Serie von dunklen, stark umgewandelten Tonschiefern und abermals dunkle Kalke. Dann tritt der Granit mit kristallinischen Schiefern alleinherrschend auf und bildet bis in die Nähe des Issyk-kul die Talumwallung. Der Abstieg vom Passe über steile, von enormen Anhäufungen Moränenschuttes und Trümmern überdeckte Hänge ist schwer, die Umrandung herrlich, und so ist auch der Talweg. Der Formenreichtum in den Randketten des Haupttales, die prächtigen Gletscherbilder der Seitentäler, der Reichtum an Wald, Wasser und Alpenwiesen stempeln das Souka-Tal zu einem der grossartigsten Alpentäler des Tian-Schan. Auch in diesem Tale konnten die Zeugen seiner ehemaligen gänzlichen Eisbedeckung in Form von Moränenablagerungen und Gletscherschliffen beobachtet werden; kein Zweifel, dass der alte Talgletscher einst in das Vorland des Issyk-kul hineinreichte. In der Rückzugsperiode waren im Tale die Schmelzwasser zu weit ausgedehnten Seen abgedämmt, von deren Ablagerungen in Form von Sandsteinen und Konglomeraten viel erhalten ist.

Am 9. Juli trafen wir in Sliwkina (jetzt Pochrowskaya) am Südufer des Issyk-kul ein und gingen weiter nach Prschewalsk und Karkara, wo die Vorbereitungen zur neuerlichen Forschungsreise in den Tälern des Nordabhanges zu treffen waren. Während ich hiemit beschäftigt war, ging Herr Keidel mit einem Teile der Expedition einstweilen durch das Tal Ullu-Karkara, über den Sart-dschol-Pass (ca. 3720 m) in das Kok-dschar-Tal (in seinem Oberlaufe Kuberganty genannt), um dort und in seinen Nebentälern geologische Untersuchungen zu machen; er sammelte eine schöne, reiche, unterkarbonische

Fauna. Sodann überschritt er den Kaschka-tur-Pass (ca. 3700 m) und gelangte in das Sary-dschass-Tal, steckte dort in der Nähe der Mündung des Mün-tör-Tales eine etwa 1½ Werst lange Basis ab, die er durch Ortbestimmung festlegte und bestimmte von dort aus nochmals Höhe und Lage des Khan-Tengri und der bedeutendsten Gipfel seiner Umgebung. Nach genauer Berechnung dieser, sowie der im Vorjahre durch Herrn Pfann von einer anderen Basis aus gemachten Bestimmungen, werde ich mit einem Vertrauen verdienenden Zahlenmaterial über Höhe und Lage des kulminierenden Gipfels hervortreten können.

Ich selbst brach von Naryn-kol mit dem Gros der Expedition am 19. Juli auf, durchreiste das schon früher beiläufig beschriebene Grosse Kap-kak-Tal, querte den Kap-kak-Pass und wendete mich sofort dem Oberlaufe des Sary-dschass zu, wo ich wenig unterhalb des Zungenendes des Semenow-Gletschers das Hauptlager aufschlagen liess. Die erste und wichtigste Arbeit für mich war, Ersatz für den schwersten Verlust des vergangenen Jahres zu schaffen, und das damals von einem hiefür geeigneten Standpunkt (4200 m) in der Umwallung des Tales aufgenommene, grosse, telephotographische Panorama des zentralen Tian-Schan in 12 grossen Blättern neu zu machen. Nach Ablauf einiger Tage Regenwetters gelang diese Arbeit, begünstigt durch Windstille und klare Atmosphäre, vorzüglich.

Inzwischen war Herr Keidel, von seiner Basis aus herauftriangulierend, ebenfalls im Hauptlager eingetroffen, und begann alsdann, das Dreiek-Netz weiter über den Semenow-Gletscher zu legen. Er vollendete diese Arbeit, welche zuletzt durch schlechte Witterung gerade im obersten Teile des Gletschers sehr erschwert wurde, in 9 Tagen. Das topographische Detail wurde durch photogrammetrische Aufnahmen gesichert.

Diese Zeit benutzte ich zur genaueren Untersuchung des Gletschers und seiner hauptsächlichsten Zuflussgletscher. Ich beging grosse Strecken der Ufer des gewaltigen Eisstromes, querte ihn nach allen Seiten, bestieg die wichtigsten Einsattelungen in seiner Umwallung und einige ihr entragende, hohe Berge, so dass ich eine ziemlich vollständige Kenntnis dieses

zentral gelegenen Firnbassins und seines Zusammenhanges mit den es umgebenden Tälern gewann, aber immer noch keine unzweifelhafte Antwort auf die Kardinalfrage, aus welchem Tale sich der Khan-Tengri erhebe.

Nachdem Herr Keidel seine Arbeit am Semenow-Gletscher beendet hatte, trat er am 7. August die Heimreise an. Ich setzte die Forschungen allein weiter und begab mich in das Adür-tör-Tal. Die nächste Aufgabe war die vollständige Begehung des Muschketow-Gletschers, seine Aufnahme und die Feststellung seines Zusammenhanges mit den benachbarten Gletschern. Im Verlaufe einer Woche konnte auch diese Aufgabe erledigt werden.

Vom Muschketow-Gletscher kann ich hier nur in flüchtiger Weise einige elementare Züge anführen. Nach meinen Bestimmungen liegt sein Zungenende im Niveau von 3480 m, also etwa 120 m tiefer, als das des Semenow-Gletschers, und seine Gesamtlänge ist beiläufig 20 Werst. Die Bedeckung des Eises mit Schuttmassen ist im vorderen Teile so dicht, dass dort kaum ein Stückchen Eis zutage tritt. Erst nach 5—6 Werst wird der Gletscherschutt frei; seine Oberfläche ist nun höckerig, aussergewöhnlich zerrissen, sowie von Schnee entblösst. Im letzten Drittel, im Oberlaufe jedoch, wird die Eisdecke ziemlich geschlossen und trägt eine schwache Schneehülle. Das Gesamtgefälle des Gletschers ist zwar gering, doch immerhin bedeutender, als das des Semenow-Gletschers. Wie bei diesem kommt der Hauptbach nicht aus dem Zungenende, sondern wegen der seitlichen Neigung der Gletscherdecke nach Norden — ich habe die Ursache hiefür schon früher erwähnt — aus dem mauerartigen Abfalle der Nordseite. Zwischen dieser und dem Gebirgswalle zur Seite zieht ein tiefer Graben entlang, von dem reissenden Gletscherfluss durchströmt. Das Gehänge ist dort fast schneefrei, von Schutt und Trümmern gänzlich bedeckt, und an seiner Basis entlang zieht wenigstens 12 Werst hinein in die Region des Eises ein unregelmässiger, oft unterbrochener Gürtel von Graspolstern mit schöner Hochalpenflora. Dieser ganze, von keinem Taleinschnitte durchbrochene Nordwall trägt nur auf seinem

höchsten Kamme und auf den Gipfeln den Schmuck von Firn und Eis. Hiegegen bildet der den Gletscher im Süden begrenzende Scheidewall zwischen ihm und dem Inyltschek-Gletscher eine geradezu wunderbare, die Südumwallung des Semenow-Gletschers an Höhe und Formenreichtum bei weitem übertreffende Kette von Eisgipfeln, in deren Bau selten ein Stückchen Fels zutage tritt. Manche dieser Gipfel zählen zu den prächtigsten und gewaltigsten des zentralen Tian-Schan; ihre Höhe wurde sowohl von der Pfannschen, als von der Keidelschen Basis aus bestimmt.

Aus Hochtälern zwischen den einzelnen Gipfeln ziehen ungemein steile und zerborstene Gletscher herab, die mit schön geschwungenen Endzungen in den Hauptgletscher einmünden und auf dessen Eiskörper so stauend einwirken, dass grosse Unregelmässigkeit und Zerrissenheit seiner Oberfläche die Folge ist. Im mittleren Teile des Gletschers sind 15—20 kleinere und grössere Eisseen von durchweg grüner Färbung ganz unregelmässig verteilt. Der Gletscher besitzt bis zur Hälfte seines Laufes eine durchschnittliche Breite von 1 Werst, erweitert sich dann allmählich und erreicht in seinem letzten Drittel eine Breite von 3—4 Werst. Dort wird er vom Semenow-Gletscher, in Verbindung mit dessen Seitentälern nur mehr durch jenen, schon früher besprochenen, breiten, von stumpfen Firnkuppen gekrönten, niederen Wall getrennt, über welchen der Muschketow-Pass (ca. 4400 m) hinwegführt. Dieser Wall läuft allmählich in das beiden Gletschern gemeinsame Firnbassin aus, das aber in keinerlei Beziehung zum Khan-Tengri steht, und dahin sind alle bisherigen Annahmen zu berichtigen. Riesig hohe Gebirgswälle sind zwischen ihm und dem Khan-Tengri aufgerichtet, was übrigens schon aus den Ergebnissen der Forschungen des Vorjahres hervorgegangen war. Die Gesteine, welche die Umwallung bilden, sind die gleichen, wie am Semenow-Gletscher: eine unregelmässige Folge von dunklen Tonschiefern, chloritischen Schiefern, dunklen und hellen Kalken — von Fossilien erfüllt, die infolge starker Pressung nicht mehr bestimmbar sind — wechselt mit Gneis, Granit, dunklen Tonschiefern anderen Cha-

rakters und hellen und gebänderten Marmoren. Der Wechsel ist häufig, aber leider sind keine Lagerungsverhältnisse erkennbar. Auch in diesem Tale, wo ich die Gipfelpyramide des Khan-Tengri in so herrlicher Gestalt zu sehen bekam, erlangte ich keine volle Sicherheit über seine Lage; höchstens wurde ich noch mehr in der Annahme bestärkt, dass seine Basis im Inyltschek-Tale zu finden sein müsse.

Das nächste Ziel war daher das Inyltschek-Tal. Mit den Verhältnissen des unwirtlichen Tales diesmal vertraut und darauf vorbereitet und eingerichtet, mit der unentbehrlichen Anzahl tüchtiger Träger versehen, hoffte ich in diesem Jahre dort erfolgreicher arbeiten zu können, als im Vorjahre. Die Entscheidung, ob es möglich sein würde, der Basis des Khan-Tengri nahe zu kommen, hing hievon ab. Der Weg dahin führte mich, quer durch die wenig bekannten Kusgun-ya-Täler, auf das Hochplateau Tur und durch die Tüs-aschu-Täler zum gleichnamigen Passe, also über die in dem Winkel zwischen den divergierenden, grossen Tian-Schan-Tälern Adür-tör, Sarydschass und Inyltschek sich erstreckenden Hochregionen, wobei für die Topographie dieses Gebietes wichtige Aufnahmen gemacht wurden. Im Kusgun-ya-Tale konnte ich den Durchbruch von Diabas-Gesteinen feststellen, durch welche die dunklen Kalke rot gebrannt und gefrittet worden waren, ganz wie ich es am nahen Tüs-aschu-Passe im Vorjahre bemerkt hatte.

Kaum war die Karawane auf ihren durch Schneestürme schwierig gemachten Wegen, und nach arg verzögertem Marsche wieder in das Inyltschek-Tal gelangt, als ich die schwierige Aufgabe, den Riesengletseher zu durchmessen, in Angriff nahm, indem ich an einigen Stellen zunächst Proviantdepots errichtete, und dann das Lager etappenweise vorschob. Zum Verständnis des Folgenden wolle man nachlesen, was S. 303 über einen den Inyltschek-Gletscher teilenden Gebirgszug und das Sichtbarwerden des Khan-Tengri an der Seite dieses Gebirgsrückens mitgeteilt wurde. Sobald man also etwa 3 Werst am Gletscher aufwärts zurückgelegt hat, sieht man eine hohe, breitmassige, dunkle Felswand weit hinten dem

Eisfelde entragen, das hiedurch in zwei Aste zerlegt wird, einen schmäleren, nördlichen und einen viel breiteren, südlichen. Dass dies nicht etwa die Steilfläche eines isoliert aus dem Gletscher emporragenden Berges sein könne, zeigte sich schon bald, da man hinter ihrer Scheitelhöhe noch einige hohe, befirnte Kuppen aufragen sah. Die Wand war demnach als das jäh abbrechende Ende eines Gebirgszuges anzusehen, der irgendwo aus der Talumwallung des Inyltschek-Gletschers abzweigt und nach Südwesten in das weite Eisfeld vorspringt. Geht man etwa ½ Werst weiter, so zeigt sich, im Sinne des Anstieges links von der dunklen Wand, weit hinten die Gipfelpyramide des Khan-Tengri, ohne dass man jedoch mit Sicherheit zu schätzen vermöchte, wie weit entfernt sie sei und aus welchem Gebirgszuge sie ansteige. Das interessante Bild verschwindet schon nach einigen hundert Schritten. Es lag somit die Wahrscheinlichkeit nahe, dass man, falls es gelänge, in den nördlichen Zweig des Gletschertales einzudringen, der Basis der Gipfelpyramide nahekommen müsse, sei es, dass sie dort im Talschlusse sich erhebt, in der Wasserscheide oder in einem einschneidenden Seitentale. Hierauf baute ich meinen Plan und war der Zuversicht, dass er gelingen müsse, wenn das Wetter sich nicht feindlich erweisen würde. Zunächst schob ich das Lager am orographisch linken Gletscherrande so weit hinauf (ca. 16 Werst vom Zungenende), dass es sich dem Südabfalle des Zwischenzuges gerade gegenüber befand. Hier erst konnte man sehen, dass dies ein breitmassiges, sehr bedeutendes Gebirge sei, ein geschlossener Wall, welcher offenbar nur aus der Talschluss bildenden Gebirgskette, dem nach Osten streichenden Hauptkamme, abzweigen könne. Der plateauförmigen Krönung dieses mächtigen Zuges sah man einige schroffe, hohe, befirnte Kuppen entragen; vom Khan-Tengri aber liess sich hier nichts mehr wahrnehmen. Das Material, das diesen grossen Zwischenzug aufbaut, ist das gleiche, wie das der Hauptuferketten des Gletschers: zunächst noch eine schmale Zone chloritischer Schiefer verschiedenartiger Ausbildung, dann dunkle und farbige, mannig-

fach veränderte, ausserordentlich verpresste und ausgewalzte, sandig-tonige Schichten, deren Charakter und Farbe beständig wechseln, wiederum dunkler Kalk und endlich weisser und gebänderter Marmor. Der gesamte ungeheure Schichtenkomplex zeigt bei aller Klarheit der Anordnung des Ganzen, im einzelnen, die grössten Unregelmässigkeiten. Altkristallines Gestein ist weder im Mittelmassiv noch in den Uferketten bemerkbar. Die Kalke sind stark verändert; man gewahrt in manchen Bänken sehr zahlreiche, in Silikate verwandelte Organismeneinschlüsse, aber nichts genau Erkennbares. An den Mündungen einiger Seitentäler vermochte ich jedoch in den dort vom Eise herausgetrifteten Kalkfragmenten einige unterkarbonische Fossilien zu finden.

Das Eistal hat dort, wo es vom Mittelzuge noch nicht geteilt ist, eine Breite von 4—4½ Werst und wird weiterhin, wo es von Schuttmassen nicht mehr bedeckt wird, seiner Länge nach von fünf Moränen in paralleler Anordnung durchzogen. Auch in diesen zeigen sich keine Fragmente von Urgestein mehr. Um so befremdender ist eine ganz drüben am linken Uferrande, dem entlang unser Anstieg geführt hatte, mächtig auftretende Granitmoräne; sie besteht ausschliesslich aus geradezu kolossalen Blöcken hellen Granites verschiedenartiger Ausbildung und Pegmatites. Fast vom Gletscherende bis hieher, also wenigstens 15 Werst, bildet sie den linken Rand des Gletschers, und ist überhaupt von sämtlichen Moränenzügen weitaus der mächtigste. Es erschien rätselhaft, woher diese Granitmassen herbeigetriftet werden, da hier im Tale nirgendwo Granit ansteht. Vom Lager am linken Gletscherrande, wo die der Nordseite zugewendeten Hänge der alten Ufermoränen, obwohl soweit in die Eisregion hineinragend, immer noch eine dichte Grasdecke tragen, wurde nun versucht, in das Eistal des nördlichen Gletscherarmes einzudringen. Da, wo die Mittelkette das ungeheure Eisfeld teilt, ist es infolge der Stauung an den Felsen sehr uneben und ungemein zerklüftet. Die Überschreitung war daher schwierig, und als man sich endlich dem Eingange des Eistales genähert hatte, da stand man plötzlich vor einer wegen

der aus Kämmen und Furchen bestehenden Eisdecke bisher nicht bemerkbaren, weiten Senkung, ausgefüllt von einem Eissee (Niveau ca. 3600 m), aus dessen blauen Fluten tausende kleiner, mannigfach geformter Eisberge und Schollen herausragten, ein prachtvoller Anblick. Der See breitet sich auf 1 Werst bis hinüber zum anderen Ufer, wo ein unbeschreiblich kühn geformter, sehr hoher Eisgipfel, der dem Scheidekamme zwischen Muschketow- und Inyltschek-Gletscher entragt, das herrliche Bild abschliesst. Vielfache Versuche, den See zu umgehen und in das dahinter sich entlang dem Zwischenzuge erstreckende, nördliche Eistal zu gelangen, scheiterten an der Ungangbarkeit der prallen Uferwände. Vier Werst weit dehnt sich der See in das Eis des nördlichen Gletschertales hinein und machte es unmöglich, auf diesem Wege zum Fusse des Khan-Tengri zu gelangen, der im Hintergrunde des Eistales nach allen bisherigen Beobachtungen zu vermuten war, wenn man ihn auch wegen der starken Krümmung der Talachse nicht gewahren konnte.

Es wurde nun versucht, von einem hochgelegenen Punkte in der Südumrandung des südlichen Gletschertales zu erkunden, ob sich nicht auch bei Durchschreitung dieses Eistales bis zum Fusse des kulminierenden Tian-Schan-Gipfels gelangen liesse; und nachdem der Ausblick Hoffnungen rechtfertigte, beschloss ich, diesen allerdings schwierigen Weg einzuschlagen, um endlich das Rätsel der Lage des Khan-Tengri zu lösen. Meine Vorräte waren jedoch beschränkt, die Entfernung von meiner Basis weit, der Weg dahin schwierig, die Witterung unsicher und schwankend. Die Sache musste somit rasch durchgeführt werden. Mit einem gewaltsamen Vorstosse wurde das Lager gleich 20 Werst weiter am Gletscher hinauf verlegt. Von der Talgabelung aufwärts erreichten wir bald schuttfreies Eis, auf dem sich in ungleichen Entfernungen nur die dunklen Streifen der drei Mittel- und der zwei Seitenmoränen von der hellen Fläche abzeichneten. In jeder dieser Moränen herrscht anderes Material vor. Die helle Granitmoräne am rechten Ufer begleitete unseren Weg, wie erwähnt, nur noch etwa 12 Werst;

dort öffnet sich (Mündungsstelle ca. 3850 m) ein beiläufig ein Werst breites, tief in den Gebirgswall eingeschnittenes Eistal mit völlig ebener Sohle. Grossartig ist die eisige Umwallung dieses Tales; nicht ein Zoll breit Fels ist an ihr zu sehen, aber am Schlusse verflacht das umrandende Gebirge gänzlich, und man scheint fast eben in ein dahinter entlang und mit dem Inyltschek parallel ziehendes Längstal gelangen zu können, d. h. beide Täler scheinen hier in Verbindung zu treten. Da die gewaltigen Granitmassen — die Moräne hat im Haupttale schon eine Länge von ca. 26 Werst — ausschliesslich durch dieses Seitental herauskommen, musste ich auf die Existenz eines grossen Granitmassives im Paralleltale schliessen.

In der folgenden Moräne herrschen hellgraue Kalke vor, in der nächsten dunkle Schiefer, vermischt mit Marmor, in der vierten fast nur Marmor, zum Teil Blöcke von riesigen Dimensionen, und in der rechten Seitenmoräne endlich dunkle Eruptivgesteine, von denen gleich mehr die Rede sein wird. Aus der Absonderung des Gesteinsmaterials ist zu schliessen, dass jede dieser Moränen ihren Ursprung in einer Gebirgsbucht nimmt, wo ein bestimmtes Gestein vorherrscht. Der Hauptgletscher, der bisher schon eine Breite von mehr als 3 Werst hat, verbreitert sich hier auf etwa 4 Werst. Die rechte Uferkette, der das Tal teilende Mittelzug, ist durch keinerlei Quertalbildung zerschnitten, nur durch Hochschluchten zerfurcht. Drüben am linken Ufer jedoch mündet Tal auf Tal, manche davon grossartig ausgestaltete Eistäler. Durch Pressung der einmündenden Seitengletscher ist drüben die Eisdecke des Haupttalgletschers chaotisch aufgestaut, zerrissen und zerklüftet. Wir wurden nach rechts gedrängt. Im rechten Ufergebirge sah man jetzt ausgedehnte Wände fast schwarzen Eruptivgesteines sich in langer Reihe haarscharf von den hellen Schiefern und Marmorhängen abheben. Es sind Einlagerungen eines stark metamorphen Gesteines. Zweifellos sind sie auch am anderen Ufer, am Südrande, mächtig entwickelt, und ich konnte dies an einzelnen Stellen sogar bemerken; allein die kaum unterbrochene Firn- und Eisdecke des nach Norden gekehrten Gehänges verhüllt

dort das meiste. Von dem Formenreichtum und der Pracht dieses Talwalles und der in ihm aufragenden Gipfelbauten kann man sich kaum eine zutreffende Vorstellung machen; er ist von sehr beträchtlicher Breite und durch muldenförmige Hochtäler in mehrere Äste zerlegt.

Auf dem Vorstosse, den ich, begleitet von den beiden Tirolern, vom letzten Hochlager aus unternahm, musste es sich entscheiden, ob ich den Khan-Tengri erreichen solle. Schon nach wenigen Werst aufwärts betraten wir geschlossenes Eisterrain, das nur ganz mässig ansteigt und von einer fest gefrorenen, nahezu ebenen Schneedecke bedeckt war. Diese Umstände erlaubten sehr rasches Vordringen auf dem hier beiläufig 3 Werst breiten, tief in das Herz der Eisgebirge hineinziehenden Gletscher. Soweit das Auge reichte, alles blendende Weisse, nur aus der rechten Uferwand springt ein hohes, dunkelfelsiges Kap weit in die polare Landschaft vor und verbirgt, was hinter ihm vermutet wurde, den lange gesuchten Khan-Tengri.

Auch die linke Uferkette nimmt nördlich von dem Granit führenden, breiten Quertale mehr und mehr die Gestalt eines Massives an, das durch eine Serie von Hochmulden und Hochtälchen zu einem ungemein mannigfaltigen Relief zerlegt ist. Ausserordentliche Mengen von Firnschnee sind dort aufgespeichert, und malerische Gletscher fliessen daraus zu Tal. Der scheinbar Talschluss bildende vereiste Wall gliedert sich in zwei zunächst parallel ziehende Ketten, von denen sich jedoch bald die eine nach Osten, die andere nach Ostsüdost wendet; auch hier, wie so häufig im Tian-Schan, Doppelstruktur.

Wir hatten nun fast 5 Stunden lang das Eisfeld im schärfsten Tempo überschritten, die Gebirge der Umwallung fingen an zu verflachen, die seitlichen Eistäler wurden kürzer, breit, weit ausgerundet an ihrem Schlusse und noch immer deckte das dunkle Kap geheimnisvoll den spähenden Blicken das Rätsel des Khan-Tengri. Da begann plötzlich etwas Weisses sich hinter der schwarzen Kante hervorzuschieben, aber noch nichts Bedeutendes: jedoch mit jedem Schritte, den ich vorwärts machte, nahm das Weisse grössere Dimensionen, gewaltigere Form an.

Eine sonnenbeglänzte Firnspitze erschien hoch oben, kolossale, weisse Marmorflanken schoben sich heraus; noch wenige Schritte weiter, und eine ungeheure Felswand war frei geworden, bald auch ihre Basis. Der Riesenberg, der Beherrscher des Tian-Schan, zeigte sich jetzt in seiner ganzen nackten Grösse von dem im Eise des Gletschers wurzelnden Fusse bis zu seinem von ziehenden, sonnendurchleuchteten Nebeln umspielten Haupte. Nicht die geringste Vorlagerung verdeckte mehr etwas von dem so lange geheimnisvoll versteckten Fusse des Berges. Unmittelbar an seinem Südfusse befand ich mich und betrachtete staunend, bewundernd, forschend die nackte Gestalt. Ich kenne keinen bedeutenden Berg, der so völlig ununterbrochen, so in einem Gusse ohne jegliche Vorlagerung von der Scheitelhöhe zu Tale geböscht ist, als diesen, möchte jedoch gleich hervorheben, dass, wie gewaltig der Eindruck auch war, er doch nicht der Bedeutung entsprach, welche die einsame, alle anderen Gipfel so mächtig überragende Grösse des Khan-Tengri erwarten liess. Ich stand zu nahe an seinem Fusse und zu niedrig, um nicht die Umrisslinien in allzu starker Verkürzung zu sehen. Die am Gletscher von mir erreichte Höhe betrug 4500—4600 m, und wenn der Gipfel des Khan-Tengri 7200 m wirklich erreichen sollte, so verteilte sich die Höhendifferenz von 2600—2700 m für mich auf einen allzu kurzen Gesichtswinkel, so dass der Berg, da ich zu nahe seiner Basis stand, nicht den seiner Bedeutung entsprechenden Eindruck machte.

Der kulminierende Gipfel des gesamten Tian-Schan erhebt sich somit nicht im Hauptkamme, ist kein Gebirgsknoten, und alle bisherigen Vorstellungen von der Rolle, welche ihm im Tian-Schan-System zukommt, müssen aufgegeben werden. Aus dem Hauptkamme heraus, nach Südwesten weit vorspringend, tritt der den Inyltschek-Gletscher in zwei Täler spaltende Nebenast, auf dem sich die Gipfelpyramide erhebt. Zwischen ihm und dem bis jetzt für das Auge Talschluss bildenden Teile des Hauptkammes zieht der südliche Gletscher in einem sich nunmehr wesentlich verengenden und gleichzeitig steiler ansteigenden, etwas gewundenen Tale weiter nach Nordosten.

Ich vermochte den Schluss dieses Tales nicht zu sehen; hiezu hätte ich noch mindestens 6 Werst weiter aufwärts am Hauptgletscher gehen müssen, wozu schon die Zeit fehlte, und auch das sich zusehends drohender gestaltende Wetter verbot es. Ich hatte bis zum Fusse des Khan-Tengri bereits 53 Werst auf dem Gletscher zurückgelegt, und bis zum Eingange seines weiter nach Nordosten ziehenden, sich verengenden Eistales sind es, wie gesagt, noch 6 Werst. Meiner Schätzung nach, die sich auf den Verlauf der Kämme stützt, muss aber das oberste Eistal mindestens noch 6 – 8 Werst gegen Nordosten führen. Somit hat der Inyltschek-Gletscher eine Gesamtlänge von 65—70 Werst gegenüber 10—12 Werst, wie man seine Länge bisher geschätzt hat; er zählt demnach zu den grössten kontinentalen Eisströmen. Den Zusammenschluss des den Khan-Tengri tragenden Astes mit dem Hauptkamme habe ich allen Grund, bei der sogenannten „Marmorwand" im Bayumkol-Tale anzunehmen, derselben Erhebung, die auf allen Karten als Khan-Tengri bezeichnet ist. Dieser Berg und nicht der Khan-Tengri ist somit der Knotenpunkt der Hauptverzweigungen des zentralen Tian-Schan. Da er nun einen Namen erhalten soll, wüsste ich seiner Bedeutung keinen entsprechenderen, als den des ersten Präsidenten der Kais. Russ. Geographischen Gesellschaft, des Grossfürsten Nikolai Michailowitsch, der von jeher das lebhafteste Interesse der Erforschung des Tian-Schan zugewendet hat.

Wie schon aus den vorhergegangenen Beobachtungen zu schliessen war, muss nun auch die bisherige Vorstellung fallen gelassen werden, dass am Baue des Khan-Tengri Urgesteine beteiligt seien, und alle Folgerungen, welche daran geknüpft wurden, sind gleichfalls hinfällig. Die höchste und innerste Region des Tian-Schan wird, was meine bisherigen Beobachtungen schon erwiesen haben, und alle folgenden noch bekräftigten, ausschliesslich aus Sedimenten aufgebaut. Die Gipfelpyramide des Khan-Tengri besteht aus mehr oder weniger umgewandelten Kalken und aus geschichtetem Marmor. Am Baue seiner Basis sind die gleichen Kalke und mannigfach veränderte, auch kristallinisch gewordene Schiefer beteiligt. In dieser

Gesteinsserie zeigen sich als Einlagerungen mächtige Massen eines dunklen, metamorphen, anscheinend diabasischen Gesteines. Aus solchem Gestein besteht das schon von einigen Reisenden beobachtete, schwarze, um die Pyramide herumziehende Band und der breite Rücken, den man besonders von der Westseite daneben erblickt. Über das Alter der Kalke werden Fossilien, die weiter aussen im Tale gesammelt wurden, wohl Aufschluss geben.

Wenn der Khan-Tengri somit keinem Tiefengestein seine Entstehung verdankt, wenn sein Baumaterial überhaupt dem seiner Umgebung gleicht, und wenn er sich endlich nicht im Vereinigungspunkte mehrerer Kämme erhebt, wie erklärt sich dann seine einzigartige Stellung, das Geheimnis seiner, alle hohen Gipfel noch um 800—1000 m übersteigenden, einsamen Höhe? Schon im Mittellaufe des Inyltschek-Tales lässt sich beobachten, dass, ungeachtet aller Störungen in den Einzelheiten, der Gesamtschichtenbau der Südumwallung im grossen und ganzen, abgesehen von grösseren oder kleineren Abweichungen, nach Süden fällt. Der Schichtenkomplex der Nordseite dagegen zeigt Nordfallen. Dies lässt sich sogar an den Rändern der den Inyltschek-Gletscher teilenden Mittelkette, ja im Baue des Khan-Tengri selbst wahrnehmen. Es scheint demnach hier der Kern eines alten Gewölbebaues vorhanden zu sein, der infolge von Senkungen an der Peripherie — von ausgedehnten Bruchgebieten in den Gebirgen nördlich vom Inyltschek-Tale ist in diesem Berichte schon die Rede gewesen, und solche wurden später auch im Süden beobachtet — geborsten, zusammengestürzt und abgetragen ist. Von dem Scheitel des alten Gewölbes ist nichts mehr erhalten geblieben, als der Gipfel des Khan-Tengri. So und nicht anders kann seine im weiten Tian-Schan-System isolierte Höhe erklärt werden, die — wenn man von vulkanischen Kegeln absieht — in ähnlich ausgedehnten Gebirgssystemen beispiellos ist. Die Knappheit des verfügbaren Raumes verbietet, auf dieses interessante Thema hier näher einzugehen.

Gegenüber meinem Standpunkte, am Fusse des Khan-Tengri, öffnet sich im Südwalle ein beiläufig 1 Werst breites Eistal, leicht ansteigend, an seinem Schlusse nur eine niedrige

Schwelle zeigend. Über sie müsste man leicht in das grosse, nächste Paralleltal gelangen, das zweifellos einen dem Inyltschek-Gletscher ebenbürtigen Gletscher birgt, von dem niemand bisher Kunde besass. Wäre man mit den nötigen Provisionen, mit Brennmaterial und der nötigen Zahl von Trägern versehen, so könnte man die Erforschung dieses unbekannten, grossen Gletschers von hier aus unternehmen; ebenso die Begehung des Inyltschek-Gletschers bis zu seinem Schlusse und die genaue Erforschung seiner Umwallung. Bedenkt man jedoch, dass die Entfernung bis zur Basis Narynkol beiläufig 200 Werst, teilweise sehr schwierigen Weges beträgt, dass von dorther das meiste, zu einem mehrwöchentlichen Aufenthalt in der Eisregion Nötige herbeigeschafft werden müsste, so wird man begreifen, dass ein derartiges Unternehmen die Kräfte eines privaten Forschungsreisenden übersteigt.

Vom Hauptlager am Gletscherende wanderte ich einige Tage später etwa 18 Werst talabwärts, wo man beständig, oft mehr als 300 m über Talsohle, auf Terrassen der Talwände lagernde Reste alten Moränenschuttes beobachten kann. Kurz bevor ein das Tal fast sperrender Klippenzug erreicht wird, mündet links aus einer engen Schlucht der stürmische Atschailo-Bach (Mündungsstelle ca. 2800 m). Von den zwei Quellarmen kommt der eine aus Ost, der andere aus Südost. Beide entströmen bedeutenden Gletschern, welche von einer sich in Südost-Richtung zwischen den Tälern Inyltschek und Kaündü erstreckenden, bisher unbekannten, etwa 18 Werst langen, formenreichen Kette stark vergletscherter Berge herabkommen. Dieser prächtige Gebirgszug erhebt sich im Mittel zu beiläufig 4500 m, und seine höchsten Gipfel erreichen über 5000 m. Zwischen ihm und einem parallel verlaufenden, kalkigen Zuge, dessen nördlicher Teil das typische Bild eines schon zum grössten Teile abradierten Gebirges bietet, liegt ein durchschnittlich 3 Werst breites und sich im Mittel zu etwa 3600 m erhebendes, von Alpenmatten bedecktes Plateau (Syrt), auf dessen kaum erkennbarer Scheitelhöhe (ca. 3800 m) die Wasserscheide zwischen Inyltschek und dem nächsten Paralleltale, Kaündü, liegt.

Das erwähnte Plateau ist nichts weiter als der Boden einer alten Firnmulde, von der einst grosse Gletscher zu beiden Seiten etwa 8—900 m tief, der eine in das Inyltschek-Tal sehr steil, der andere weniger steil in das Kaündü-Tal hinabflossen. Dies ist beiderseits noch gut erkennbar, besonders schön auf der Inyltschek-Seite, durch den Verlauf der alten Moränen. Gebirgsbildende Gesteine in dieser hohen Kette sind stark umgewandelte, steil aufgerichtete Schiefer von verschiedenartigem Aussehen, Phyllite mehr oder weniger kristallinische Kalke, weisse Marmore und endlich Diabas. In dem ersten, aus Osten heranziehenden Quertale scheinen, wie man beim Aufsteigen aus Norden sehen kann, die grössten Gletscher und die höchsten Firngipfel der Kette zu liegen; ihre schönsten Formen erreicht sie in der Nähe des Passes, wo sich an ihrem Fusse ein ansehnlicher Moränensee ins Grün der Alpenmatten erstreckt. Beim Abstiege zur Südseite sieht man mächtige Diabas-Stöcke die schroffen Züge der Kalk- und Schiefermassen durchbrechen und öfters in wilden Zackengraten die höchsten Kämme bilden. In keinem der Täler des zentralen Tian-Schan, ausgenommen in unmittelbarer Nähe des Khan-Tengri, sah ich vulkanische Massen von so grosser Ausdehnung und Mächtigkeit, als am Oberlaufe des Kaündü. Das Eruptivgestein zeigt dort sehr verschiedenartige Ausbildung.

Über diesen Atschailo-Syrt gelangte ich in das grosse, latitudinale Längstal Kaündü, wo ich das mächtige Granitmassiv zu finden hoffte, dessen Trümmer, wie erwähnt, der Inyltschek-Gletscher zu Tale triftet. Ich wanderte am Rande des bedeutenden Flusses bis zum Ende der Gletscherzunge (ca. 3250 m) etwa 25 Werst talauf, und war erstaunt, nirgendwo Granit oder andere altkristalline Gesteine zu finden. Die Talmauern sind aus Serien heller und dunkler Kalke aufgebaut, von denen manche Bänke ungemein reich an Fossilien sind, die leider durch den Kontakt mit den Eruptivgesteinen zerquescht und verpresst wurden. Diabase verschiedenartiger Ausbildung, Hornschiefer, Diabastuff kommen vielfach im Geröll vor, weiter taleinwärts treten wieder stark umgewandelte Sandsteine und Tonschiefer auf.

Der Kaïndü-Gletscher ist im ersten Viertel seines Laufes ebenfalls von einem, allerdings weit weniger mächtigen Schuttgebirge bedeckt, als das des Inyltschek-Gletschers ist. Schon nach 5—6 Werst wird das Eis schuttfrei und ist dort sehr uneben, was jedoch mehr eine Folge der Erosion durch fliessendes Wasser, als Pressungserscheinung ist. Im hinteren Teile ist die Eisdecke eben, ihre durchschnittliche Breite ist 7—800 m, die Gesamtlänge 18—20 Werst, die Gestalt eine mehrfach gewundene, die Neigung gering. Am linken Ufer sind mehrere grüne Seen in das Gletschereis eingetieft. Erwähnenswert, weil im Tian-Schan eine seltene Erscheinung, ist ein starker, hoher Wasserfall in der rechten Talwand. Am linken Ufer erstreckt sich eine begrünte Terrasse mit einem Walde von Caragana-Sträuchern noch 7 Werst dem Eise entlang aufwärts. Der Kaïndü-Gletscher zieht jedoch, wie sich bei seiner Überschreitung zeigte, nur eine Strecke weit parallel dem Inyltschek-Gletscher nach Nordosten; er wird aber bald durch den bereits erwähnten, schon vor Einmündung des Granit führenden Seitentales in das Inyltschek-Tal, aus dessen Südrand abzweigenden Gebirgsast abgeschlossen, und das Nichtvorkommen von Granit im Kaïndü-Tale wurde hiedurch aufgeklärt. Demnach ist das Kaïndü-Tal nur eingeschoben zwischen einem weit ausgedehnteren Längstale und dem Inyltschek-Tale. Ein tiefer Einschnitt in dem vollständig vereisten Schlusswall des Kaïndü-Tales könnte den Zutritt oder doch wenigstens den Einblick in das grössere, das Kaïndü-Tal umfassende Längstal vermitteln. Von einem in der Südumwallung des Gletschers erstiegenen Gipfel aus konnte dies alles zweifellos festgestellt werden.

In bezug auf die Vergletscherung der beiden, den Gletscher einschliessenden Talketten herrschen die gleichen Verhältnisse vor, welche bei Schilderung der anderen grossen Längstalgletscher schon erörtert wurden. Die südliche Umwallung ist jedoch hier, entsprechend der nun gegen Süden hin beginnenden allmählichen Abdachung des Tian-Schan, etwas niedriger als die nördliche. Ein wie geringes Überbleibsel jedoch der heutige Kaïndü-Gletscher im Vergleiche zu seiner ehemaligen Aus-

dehnung ist, dafür ist das ganze Tal mit Beweisen erfüllt. Streckenweise reichen die alten Moränen bis zu zwei Drittel Höhe der Bergwände empor, bis zu 600 m über die Talsohle.

Um das nächste grosse Paralleltal aufzusuchen, setzte ich meine Wanderung fort, und zog vom Kaündü-Gletscherende 36 Werst talabwärts. Auch hier haben Diabasdurchbrüche die Schiefer und Kalke der Talumwallung in mannigfacher Weise verändert. Da, wo sich das Tal nach etwa 30 Werst vom Gletscherende zur Schlucht verengt, biegt es scharf nach Südwesten um und bildet am Ausgange eine beckenartige Erweiterung, wo am linken Ufer jugendliche Bildungen, 40—50 m hohe Mauern aus rotem, sehr grobkörnigem, sehr hartem Sandstein, anstehen; dieser geht weiterhin in Konglomerat über. Darüber sind jüngere gefestigte Schotter und über diese Löss gelagert. Die Konglomerate begrenzen auf viele Werst weit in Steilmauern zu beiden Seiten unmittelbar den Lauf des Flusses. Die Sandsteinschichten zeigen leichte Dislokation und streichen hier diskordant zu den Kalken der Talumwallung.

Zwischen der tiefen Rinne des mittleren Kaündü-Tales im Norden und der noch wesentlich tiefer eingeschnittenen des nächsten Paralleltales im Süden erstreckt sich in der wasserscheidenden Kette — eine ausgedehnte Depression zwischen den weiter talauf und weiter talab ragenden Gipfeln bildend — ein plateauartig stumpfer, von Alpenmatten bedeckter Rücken, durch flache, muldenförmige Hochtäler zerlegt. Das heutige Relief dieser hohen Region ist durchaus das Ergebnis glazialer Tätigkeit. Zwischen beiden Abhängen erstreckt sich ein etwas nach Südwesten geneigter, breiter Scheitel. In diesem ist ein nach Südwesten offener, flacher Kessel eingesenkt, in welchem sich strahlenförmig aus verschiedenen Richtungen herabfliessende Quellen zu drei Bächen vereinen, die erst weiter unten in einer Rinne zusammenfliessen. Die Kirgisen, welche in dieser Alpenregion gute Sommerweiden haben, nennen das Gebiet Uetsch-schat = 3 Täler und die etwas westlich davon aufragenden Querketten sehr formenreicher, ziemlich reich befirnter Gipfel heissen sie Uetsch-schat-Tau. Das oberste Quellgebiet

dieses Uetsch-schat-Flusses, ein stumpfer Rücken, bis zu etwa 4000 m ansteigend, bildet die Scheitelhöhe des Plateaugebietes. In diesem Rücken liegt in beiläufig 3750 m Höhe eine Depression, der Kara-artscha-Pass. Einzig dieser Pass vermittelt den Zugang zum nächsten, im Süden dem Kaündü parallel ziehenden Längstale, das die Kirgisen Koi-kaf nennen. Die zu jener Zeit im Kaündü sich aufhaltenden Kirgisen sagten mir, das Tal sei so lange, dass niemand sein Ende erreichen könne, so enge und von wilden Wassern ganz erfüllt, dass es im Sommer undurchschreitbar sei. Ein sehr grosser Gletscher und viel Schnee breite sich im Hintergrunde aus, wo sehr hohe Berge ragen. Nur im Winter, wenn der Wasserstand sehr niedrig ist, treiben die Kirgisen Schafe über den Kara-artscha-Pass hinab und 20 Werst talaufwärts im Koi-kaf-Tale, wo das bis dahin schluchtförmige Tal sich verbreitert. Dort seien magere Weideplätze mit den von den Schafen bevorzugten, bitteren Steppenkräutern; wegen des tiefen Niveaus, und der engen Umschliessung, sowie wegen der weit nach Süden vorgeschobenen Lage sei es dort warm und fast schneelos, ein guter Überwinterungsplatz für Schafherden.

Da ich nach allem, was ich gesehen und gehört hatte, in diesem Koi-kaf-Tale, das von mir gesuchte grosse Längstal vermutete, beschloss ich, mich selbst von der Möglichkeit seiner Begehung zu überzeugen. Wir überschritten auf zum Teil schwierigem Terrain das Uetsch-schat-Gebiet über zwei Pässe, den Kara-bel-Pass (ca. 3450 m) und den schon erwähnten Kara-artscha-Pass (ca. 3750 m). In schwierigem Abstiege wendete ich mich nach Norden und gelangte in das Gebiet zweier Quellbäche, die sich schliesslich vereinen und in einer tiefen Engschlucht verlieren, welche zum Koi-kaf ausmündet. Nur die Durchwanderung dieser Schlucht vermittelt den Zutritt zum gesuchten Tale. Wir bewegten uns beim Übergange über das Uetsch-schat-Gebiet fortgesetzt im Gebiete der Sedimente: Kalke, dunkle und helle, vielfach veränderte Tonschiefer mit eingefalteten, anscheinend phyllitischen Schiefern. Vom Passe und den beiden Rücken aus konnte man einen Teil des Ge-

birges übersehen: Im Süden und Südosten enge aneinander und scheinbar regellos verlaufende, zersägte Felsketten mit nur geringer Schnee- und Eisbedeckung, tiefe Schluchten dazwischen eingeschnitten. Es ist schwer, Klarheit über die herrschenden Züge in der Anordnung dieser Kämme zu gewinnen. Die Schlucht selbst, durchschnittlich 10—12 m breit, verengt sich stellenweise bis zu 4 m und ist von 3—400 m hohen, senkrechten Mauern aus weissem Marmor begrenzt. Es sind fast saigergestellte, teils bankartig dicke, teils schiefrige Schichten. Knickungen, Stauchungen, Zerklüftungserscheinungen äussern sich hier in erstaunlich mannigfaltiger Art. Alles erscheint ruinenhaft, dem Einsturze drohend. Grossartige Auswaschungen zeigen sich. Konglomerate, deren Material ausschliesslich weisser, durch weissen Zement fest verkitteter Marmor ist, begleiten die Schluchtwände und liegen in Riesenblöcken umher, den Lauf des tosenden Wassers hemmend. Etwa 4 Werst führt der Weg durch diese chaotische Enge. Kurz vor ihrem südlichen Ausgange zeigt sich ein merkwürdiges geologisches Bild: Dicke Bänke, wechsellagernd mit Platten schwarzen, sehr dichten, fossilienleeren Kalkes, der Kern eines abgetragenen Faltenbaues, dessen Streichen N. 50° W. ist, wird von dem Komplex der weit steiler aufgerichteten, marmorisierten Kalke und Schiefer ganz umschlossen, deren Streichen N. 60° O. ist. Ich habe die merkwürdige Stelle photographisch festgehalten, und den alten Faltenbau auch weiterhin an den Felswänden gegen Nordwesten und Südosten verfolgen können.

Dort endet die Kara-artscha-Schlucht in einem von etwa 1200 m hohen, braunen Kalkmauern eingeschlossenen Kessel, in welchem das Rauschen bedeutender Wassermengen vernehmbar wird; jedoch erst, wenn man sich dem Fusse der absperrenden Steilmauer genähert hat, erblickt man einen in tief eingegrabenem Bett dahinstürzenden Fluss. Dies ist der Koi-kaf, der im allgemeinen von Nordost nach Südwest fliesst. Zweifellos können Wassermengen, wie sie in diesem Flussbette dahingewälzt werden, in einer so niederschlagsarmen Gegend nur einem

hochgelegenen, sehr bedeutenden Gletschergebiete ihre Entstehung verdanken, aber sichtbar war hievon nichts, denn man konnte in der etwa 20 m breiten, gewundenen Schlucht, durch welche der Fluss vorstürzt, nur ein kurzes Stück aufwärts oder abwärts sehen. Pralle Kalkwände hemmen den Blick. Wälle umgelagerten Moränenschuttes umgeben den öden, an der Mündungsstelle des Kara-artscha sich weitenden Kessel. Nur die dürftigste Vegetation der südlichen Steppen zeigt sich hier. Die vorbeirauschenden Wassermengen lassen keine befruchtende Wirkung zurück; der Boden bleibt trocken, staubig und ausgedürstet. Selten habe ich im Hochgebirge ein so ausgetrocknetes Tal gesehen. Die Luft ist dumpf, bedrückend schwül, die Belästigung durch Stechfliegen war gross. Zeitweise aus der Schlucht wie aus einem Blasbalge kommende Windstösse umhüllten uns mit Wolken von Lössstaub. Der Aufenthalt an diesem Orte war höchst unbehaglich; besonders die Nächte mit ihrer Schwüle zum Ersticken und mit den unabweisbaren Stechfliegen wurden zur Qual. Die ungünstigen Aufenthaltsbedingungen trieben zur Eile. Wir drangen in die wasserdurchtoste Engschlucht des Flusses ein. Nach etwa 4 Werst anstrengender Wanderung erwies sich der Weg durch die an die Felsmauern anschlagenden, undurchschreitbaren Fluten gesperrt. Um diese Stelle zu überwinden, wurde versucht, sich hoch an den Felswänden den Durchgang zu erzwingen, aber die Schlucht beschreibt so enge Windungen, dass man schon nach kurzer Entfernung abermals an einem vom Wasser umfluteten Kap das gleiche Hindernis fand. Das Klettern an den prallen Marmormauern wurde zudem bald unmöglich. Es liess sich jedoch feststellen, wenn man mit den Blicken die engen Windungen verfolgte, welche die Kammlinien der umwallenden Felsmauern beschreiben, dass dieser Schlangenlauf sich viele Werst talaufwärts fortsetzt. Das Unternehmen war also hoffnungslos und musste aufgegeben werden. Um dennoch Einblick in den Oberlauf des Tales zu gewinnen und seine Beziehungen zum Sabawtschö-Tale und zum Kum-aryk-Gebiete zu erkunden, wollte ich einen der steilen Kalkgipfel in der Umgebung ersteigen;

allein auch dieser Versuch erwies sich als nutzlos. Die Trübung der Atmosphäre hatte derart zugenommen, dass schon die nächsten Kämme im Dunste verschwanden. Die Luft mag hier infolge des feinen, aufsteigenden Lössstaubes gewöhnlich schleierig sein; damals gesellte sich jedoch, als Folge starker barometrischer Depression, auch noch Wasserdampf hinzu, und verhinderte, dass ich Einblick in jene geheimnisvollste Region des Tian-Schan bekam. Mit schwerem Herzen entschloss ich mich zum Rückzuge aus der unwirtlichen Gegend. Ich würde die Mühen des Aufenthaltes in dieser Öde noch für einige Tage auf mich genommen haben, wenn Aussicht auf irgendwelchen Erfolg bestanden hätte; aber die Wetterzeichen waren schlimm. Weit entfernt von der Kum-aryk-Mündung konnte ich schon deshalb nicht gewesen sein, weil ich mich nur mehr ca. 400 m über ihrem Niveau befand; ich vermochte auch an der Gestalt der Gebirgskämme zu erkennen, dass jene früher besuchten Täler nicht ferne liegen konnten.

Wäre es möglich gewesen, durch die Schlucht abwärts zu gehen, so hätte man wohl leicht in einem Tage die Kum-aryk-Mündung erreichen müssen, wenn auch die Kurven der Schlucht kompliziert sein mögen. Aus der Gestalt aller der Täler, die südlich vom Kaündü nur mehr Klammen sind und aus der Zersägung der Gebirge, die auf deren oberen Teil beschränkt bleibt, — hierauf habe ich früher schon hingewiesen — geht hervor, dass eingetretene Trockenheit des Klimas die Ausbildung wirklicher Täler in diesem Teile des zentralen Tian-Schan verhindert hat. Die seitliche Abspülung fehlt; das Abwasser der Gletscher, mit starkem Gefälle herabfliessend, vertieft die Betten der Hauptstsöme immer mehr, die Gestalt der Klammen wird nicht mehr bis zum Profil von Tälern erodiert.

Gleich bei der ersten Besichtigung des Koi-kaf-Tales bemerkte ich, dass sich im Geschiebe ziemlich viel Granit, und zwar von der gleichen Art findet, wie ihn die linke Seitenmoräne des Inyltschek-Gletschers führt: ein weiterer Beweis dafür, dass das Granitmassiv, welches durch ein beide Täler verbindendes Seitental dem Inyltschek Moränenmaterial liefert,

im Koi-kaf-Tale sich erheben müsse. Da jedoch der zentrale Hauptkamm, welcher zweifellos auch das Koi-kaf-Tal abschliesst, wie untrüglich erwiesen, aus Sedimenten aufgebaut ist, der Unter- und der Mittellauf des Tales gleichfalls von solchen umwallt sind, so scheint der Granit in diesem Tale eine Insel zu bilden, d. h. stockförmig aufzutreten. Vielleicht stehen diese Granitmassen aber auch mit den im Sabawtschö-Tale beobachteten in Verbindung. Aus allen Wahrnehmungen geht jedoch hervor, dass das Koi-kaf-Tal das von mir gesuchte Längstal sein müsse, welches, das Kaündü-Tal umfassend, in seinem Oberlaufe bedeutende Breite annimmt und dort einen Gletscher einschliesst, der dem Inyltschek-Gletscher an Ausdehnung ungefähr ebenbürtig sein dürfte. Auch die Südumwallung dieses grossen Längstales muss sich wohl nach allen sowohl von der Nord- als von der Südseite aus gemachten Beobachtungen, ungefähr beim Gebirgsknoten Pik Nikolai-Michailowitsch mit dem Hauptkamme verbinden. Leider erlaubte mir die Ungunst der Umstände nicht, zu grösserer Klarheit über den Bau dieses Teiles des zentralen Tian-Schan zu gelangen, und es bleibt somit in meiner Kenntnis in dieser Hinsicht eine Lücke.

Bei der Rückkehr zum Hauptlager im Uetsch-schat-Tale brachen heftige Schneestürme aus, und solche begleiteten mich auch auf dem Rückwege in das Kaündü-Tal, das nun bis zu seiner Mündung in den Sary-dschass eine weitere Strecke von ca. 15 Werst durchmessen wurde.

Auf seinem Laufe nach Westen erscheint hier das südliche Randgebirge in NW.-SO. streichende Züge zerlegt. Der Tallauf des Flusses wird stellenweise durch Ablagerungen kolossaler Mengen fluvioglazialen Schuttes gehemmt, welche talabwärts in übereinander liegende Terrassen (Längsstufen) umgelagert sind. Granitblöcke liegen auf den Terrassenflächen, wiewohl Granit im Tale nirgends ansteht. Überhaupt sind alle Zeichen der glazialen Vergangenheit des Tales vorhanden.

Die Durchwanderung des Sary-dschass-Durchbruches, von der Einmündung des Kaündü bis zu der des Inyltschek, bot bedeutendes Interesse, da sein genauer Verlauf und die zu

Grunde liegenden, geologischen Verhältnisse bisher noch nicht festgestellt waren. Doch kann ich mich im Rahmen dieses notgedrungen kurzen Berichtes über das interessante Sary-dschass-Problem nicht weiter äussern. Der Lauf des Flusses wurde topographisch festgelegt, so dass hievon nur mehr das verhältnismässig kurze Stück bis dorthin, wo er als Kum-aryk wieder aus der Enge des Gebirges hervorbricht, unbekannt bleibt.

Nachdem wir die Mündung des Inyltschek-Flusses erreicht hatten, wanderten wir in diesem Tale 63 Werst aufwärts bis zur Mündung des vom Tüs-aschu-Passe herabziehenden Defilees; die ganze Tallänge beträgt demnach ca. 135 Werst. Die ohnehin bedeutende mittlere Breite des Tales ($1^1/_2$ Werst) wird durch grosse Weitungen von mehr als doppelter Breite, den Becken früherer Seen, unterbrochen, und die Sohle des Tales stellt sich auf seiner ganzen Erstreckung als ein flacher Aufschüttungsboden von ganz geringem Gefälle dar. Die glaziale Vergangenheit des Tales ist an seiner Umwallung, wie an den jugendlichen Ablagerungen mit untrüglicher Sicherheit zu erkennen. In dieser Umwallung tritt die gleiche Erscheinung zutage, auf welche ich schon wiederholt hingewiesen habe: das nach Norden gerichtete schnee- und wasserreiche Talgehänge ist kräftig erodiert, das nach Süden gekehrte ist trocken und in kaum nennenswerter Weise zerschnitten. Die Gipfelbildung bleibt im Unterlaufe des Tales auf breit kuppenförmige Anschwellungen der plateauförmigen Decken der Gebirgskämme beschränkt. Das gebirgsbauende Material wird hier durch Granit, Syenit, Porphyr, halbkristallinische Kalke und stark umgewandelte Schiefer von sehr verschiedenartigem Typus vertreten. Starke Pressungserscheinungen sind vorherrschend. Bei dem Aufstiege zum Tüs-aschu-Passe, auf dem Rückwege zum Sary-dschass-Tale wurde eine Korallen führende Kalkbank entdeckt.

Wir hielten uns im Sary-dschass-Tale nicht weiter auf als nötig, querten das Plateau und den Pass Mün-tör, das obere Kok-dschar-Tal und den Kap-kak-Pass und gelangten durch das Kap-kak-Tal abermals zum Tekes. Von dort aus besuchte ich das Bayumkol-Tal zum drittenmal, und zwar, um



die im Vorjahre gemachten, höchst wichtigen, photographischen Aufnahmen, die im Musart-Flusse zu Grunde gegangen waren, neu herzustellen. Drei hohe Gipfel (4300—4600 m) in der Nordumwallung der Gletscher wurden zu diesem Zwecke erstiegen und der schwer empfundene Verlust ersetzt.

Die weitere Forschungstätigkeit führte mich in das Kleine Musart-Tal, das wichtigste der zwischen Bayumkol- und Grossem Musart-Tal aus dem Herzen des Gebirges nach Norden ziehenden, bisher unerforschten Quertäler. Im Hintergrunde des beiläufig 45 Werst langen Tales wurde der Verlauf der bis über 5000 m ansteigenden, ganz in Eis gehüllten Ketten, die ich früher von der Südseite aus aufgenommen hatte, nun von der Nordseite aus festgelegt; hiebei wurde ein bisher unbekannt gewesener, ca. 25 Werst langer, aus Osten herbeiziehender Gletscher entdeckt. Das Entwässerungsgebiet des Tales umfasst einen sehr weiten Raum, indem der Fluss schon bald vor seinem Austritte aus dem Gebirge in zwei fast gleichwertige Äste gabelt: Saikal und Uertentö; beide werden von grossen Gletschern genährt, die jedoch nur unbedeutende Relikten der einst dieses Talsystem völlig ausfüllenden Eismassen darstellen, wofür zahlreiches Beweismaterial gesammelt wurde. Kalke, von einer breiten Porphyrzone durchbrochen, Gneis, Syenit, und im Talschlusse, wie bei allen nördlichen Quertälern, Tonschiefer und mehr oder weniger kristallinische Kalke bilden den geologischen Bestand des Tales.

Auf einem Plateau in der Westumrandung des Saikal-Tales liegt in 2450 m Höhe ein Alpensee. Bei der Seltenheit dieser Erscheinung im zentralen Tian-Schan war es für mich von Interesse, ihn aufzusuchen. Ich verliess daher bei der Rückkehr zur Tekes-Ebene die tiefe Rinne des Saikal-Tales, stieg nach Westen über eine mit Busch und Wald bestandene, alte Grundmoräne am Gehänge eines Rückens steil 150 m empor und erreichte so die aufgetürmten Blockmassen einer alten Endmoräne, die ein $^1/_2$ Werst breites Hochtal absperren. Hinter diesem Walle im Osten liegt in einem zur Glazialzeit vom Gletschereise korradierten, tiefen Felsbette ein dunkelgrüner

Bergsee, etwa 50—60 m lang, 350 m breit, in einem Niveau von ca. 2450 m; er wird von den Kalmaken Nura-nor, von den Kirgisen Karakol genannt. Im Süden wird das Wasserbecken von einer hoch hinauf mit dunklem Fichtenwalde bewachsenen Bergwand und im Norden von einem, mit Alpenmatten bedeckten Berghange umschlossen, der mit etwa 60 m hohen, vom Eise abgeschliffenen Phyllitwänden gegen den Wasserspiegel abfällt. Im Westen öffnet sich das etwa 6 Werst lange, steil zu einem Scheiderücken, hinter welchem das Narynkol-Tal liegt, ansteigende Hochtälchen, durch dessen Sohle ein Gebirgsbach nach Osten herabströmt und sich in den See ergiesst. Schneeige Gipfel entragen rings der Umwallung, auch drüben, jenseits der engen Spalte des Saikal-Tales, und spiegeln sich in den tiefgrünen Fluten. Es ist ein melancholisches, echt alpines Seebild, dessengleichen im Tian-Schan zu den grössten Seltenheiten gehört. Durch das jetzt vom Bache durchströmte Hochtal kam einst der Gletscher herab, der das Seebecken aushöhlte und bei seinem Rückzuge den Moränenwall auftürmte, als der das ganze Saikal-Tal ehedem ausfüllende grosse Gletscher, zu welchem dieser Seitengletscher ausmündete, im Schwinden war. Während die Ufer sonst rings felsig sind, hat der Zuflussbach auf der Westseite ein kleines, flaches, sandiges Delta gebildet. Die Hochwasserstandsmarken an den Felsufern liegen $2^1/_2$ m über dem Wasserspiegel. Dass diese nur den Frühjahrswasserstand anzeigen, wo der Zufluss stärker ist, als der Abfluss, bewiesen die gleich hohen und noch nicht verwischten Wellenschlagspuren im lockeren Sande des Westufers. Der See scheint sich somit nicht im Stadium des Austrocknens zu befinden. Den Kamm eines hohen Zwischenzuges übersteigend, gelangte ich in ein Nebental, das in das Kleine Musart-Tal aus Südwesten einmündet und durch dieses ritt ich wieder nach dem Tekes-Tale zur Staniza Narynkol.

Inzwischen hatte ich Kenntnis von dem Vorhandensein dreier anderer Bergseen erhalten, die, wie man mir sagte, zwischen dem mittleren Bayumkol-Tale und dem Kap-kak-Tale liegen. Das grosse Interesse, das solche Gebirgsseen —

früher im Tian-Schan so ungemein häufig, und jetzt so selten geworden — in bezug auf die Geschichte der Vergletscherung und die Entwickelung der Talbildung im Tian-Schan bieten, — beides Verhältnisse, denen ich während dieser Expedition meine besondere Aufmerksamkeit zugewendet hatte — veranlasste mich, auch diese Hochseen zu besuchen und an ihnen zu prüfen, ob die an meine bisherigen Beobachtungen geknüpften Folgerungen zutreffend seien.

Einer dieser Seen, Ak-kul, liegt fast am Schlusse des gleichnamigen, bedeutenden Nebentales des Bayum-kol-Tales. Dieses Tal Ak-kul hat bei einer Länge von ca. 20 Werst eine allgemeine Achsenrichtung nach SSW., dem Streichen der Granite folgend, welche hier in mannigfaltiger Ausbildung die Talumwallung bilden. Das Profil des Tales und das Relief der Ablagerungen auf seinem Boden sind typisch für ein durch Glazialwirkung ausgestaltetes Tal. Zwischen den einzelnen alten Endmoränenriegeln waren ehemals Seen eingebettet, die heute aufgefüllt und eingeebnet sind. Nur der im letzten dieser Becken am Talschlusse (ca. 3350 m) gelegene See besteht noch und wird von den aus karförmigen Weitungen herabfliessenden Bächen gespeist; doch sind die Gletscher in diesen Karen gänzlich entschwunden. Die durch die Bäche herbeigeführten Detritusmengen haben das 400 m lange, 170 m breite Becken schon so weit aufgefüllt, dass nur mehr die Hälfte und auch diese nur mit seichtem Wasser bedeckt ist, das infolge der in ihm schwebenden Tonteilchen ein milchiges Aussehen hat. Deshalb der Name Ak-kul = weisser See.

Das Schicksal dieses im letzten Stadium seiner Existenz befindlichen Sees ist typisch für die Geschichte von hunderten, früher in den Tian-Schan-Tälern eingeschlossen gewesenen Seen. In den Frühlingsmonaten soll das Seebecken alljährlich noch von den Schmelzwassern des Winterschnees aufgefüllt werden, 5—6 m über seinen jetzigen Tiefstand; so berichteten mir die Kirgisen. Ich fand die Bestätigung dieser Angabe an den Blöcken des Moränenwalles, die in gleicher Höhe am Seerande mit feinem, grauweissem Tonschlamme überzogen

waren, der sich noch als plastisch erwies. Das Abwasser des Sees findet seinen Ausweg unter dem Blockwalle und tritt als kleiner Bach an dessen unterem Ende zutage.

In einem zwischen den Tälern Ak-kul und Aschu-tör eingeschalteten Tale liegt der See Jaschyk-kul, den ich nicht besuchte. Die Kirgisen sagten mir jedoch, er sei noch etwas mehr aufgefüllt als der Ak-kul. In seinem wasserreichen Zustande befindet sich hingegen noch der See Kara-kul, der am Schlusse eines in das Kap-kak-Tal aus Südosten einmündenden, sehr bedeutenden Seitentales, Kara-kul-sai, liegt. Auch Profil und Bodenrelief dieses Tales sind typisch für seine Ausgestaltung durch glaziale Tätigkeit. Eine Serie jetzt verschwundener Seen lässt sich in ihren Spuren im Laufe des Tales erkennen. Alle diese Gebilde verdanken den gleichen Ursachen Entstehen und Vergehen, wie der See Ak-kul. Das Tal ist gleichfalls in granitische Gesteine eingeschnitten, zwischen welchen hier Diabas-Durchbrüche beobachtet werden können. Der See wird durch einen über 100 m hohen Block-Moränenwall abgesperrt, sein Wasser hat eine tiefgrüne, schwärzliche Färbung, die den Namen Kara-kul = schwarzer See rechtfertigt. Die Länge des Beckens ist 850 m, die Breite 400 m, das Niveau ca. 3400 m. Seinen Hauptzufluss erhält der See aus einem Quelltale, durch welches aus SSW., aus einem sehr breiten, von schroffen, hohen Wänden umfassten, jetzt eisfreien Kar einst der sehr bedeutende Gletscher herabfloss, welcher das flache Seebecken trogförmig zwischen den Granitwänden korradiert hat. Aus Quertälern einmündende Seitengletscher haben die Korrasionsarbeit gefördert. Der Frühjahrswasserstand liegt, nach den Flutmarken der Ufer zu schliessen, ca. 4—5 m über dem Herbstniveau. Die Auffüllung des Seebeckens ist noch nicht beträchtlich.

Während ich mich mit der Untersuchung dieser Seen beschäftigte, hatte ich den Tiroler Kostner nach den Mukurmutu-Hochtälern geschickt, wo er Ersatz für die photographischen Aufnahmen schaffen sollte, die im Vorjahre in diesen Tälern gemacht worden und dann im Musart-Flusse zu Grunde

gegangen waren. Auch hatte er den Auftrag, in den Fossilien führenden Kalken dort nochmals Umschau zu halten. Es glückte ihm, trotzdem diese an Fossilien reichen Kalke durch die unmittelbare Nähe der Granite stark umgewandelt und bis zur Unkenntlichkeit verpresst sind (siehe S. 281), eine Bank zu entdecken, der eine unterkarbonische Fauna entnommen werden konnte.

Nachdem die Expedition wieder vereint war, wendete ich mich zur Untersuchung des nördlichen Grossen Musart-Tales, besonders seiner grossen, bisher noch unbekannten Nebentäler, deren Zusammenhang mit der vom Pik Nikolai-Michailowitsch nach Osten abzweigenden, hohen Gletscherkette für die Ergänzung meiner topographischen Arbeiten von Wichtigkeit war. 15 Werst vor der Ausmündung des Grossen Musart-Flusses in den Tekes empfängt er einen ihm an Wassermenge ebenbürtigen Gebirgsstrom, den Dondukol. Gewaltige Terrassen umgelagerten Moränenschuttes ziehen sich in drei Etagen aus der Öffnung des Tales heraus und schneiden sich mit den gleichnamigen Bildungen des Haupttales in flachen Winkeln. Rückläufige Bildung ist hier zu erkennen. Die vorzüglichsten Grasplätze der Kalmaken liegen auf diesen weiten Aufschüttungsböden. Das ungemein schwer zugängliche Tal führt in seinem 35 Werst langen Süd- und Süd-West-Laufe, durch lange, klammartige Verengungen und durch einen ungeheuren Bergsturz mehrmals gesperrt, zum Fusse eines ganz in Firn und Eis gehüllten, ca. 4900 m hohen Walles; dieser die Täler Saikal, Uertentö und Dondukol schliessende Zug gehört nicht zur Hauptwasserscheide zwischen Norden und Süden, sondern bildet, gleich der Saikal-Talschlusskette, einen Teil der Nordumwallung des vom Pik Nikolai-Michailowitsch nach Osten ziehenden, grossen Eistales. Der Talschluss wird von formenreichen Gletschern erfüllt, von denen der östliche einen Übergang in das gleichfalls reich vergletscherte, andere grosse Nebental des Grossen Musart-Tales, das bisher unbekannte Tal Chamer-dawan, vermittelt, dessen Lauf und Richtung ich feststellen konnte. Bei einer zu diesem Zwecke ausgeführten Ersteigung eines 4400 m hohen Berges in der Ostumwallung des

Dondukol-Tales wurden auch telephotographische Aufnahmen der das Grosse Agiass-Tal begrenzenden Ketten gemacht; auch konnte der geologische Bau des Dondukol-Tales genauer beobachtet werden. Gebirgsbildende Gesteine sind zunächst ein mächtiger Horizont grüner, phyllitischer Schiefer verschiedenartiger Ausbildung, manchmal den Grauwacken-Schiefern ähnelnd, manchmal aphanitisch. Zwischen ihnen treten Zonen kristallinisch gewordener Kalke auf; hierauf folgt unmittelbar Gneis und Gneisgranit, sodann Granite verschiedenartiger Struktur und mehr oder weniger kristallinisch gewordene, auch in Schieferform umgewandelte Kalke und wirkliche Marmore, — Serien, zwischen welchen sich diabasisches Gestein eingelagert findet. Das Streichen des ganzen Schichtenkomplexes ist stark der Ostwestrichtung genähert, mit Abweichungen nach Süden oder Südosten; das Fallen ist sehr steil, 60—70°. Aber die höchste, Talschluss bildende Kette ist auch in diesem, gleich wie in den anderen nördlichen Quertälern, ausschliesslich aus Sedimenten, mehr oder weniger umgewandelten Tonschiefern und Kalken, sowie aus Marmor aufgebaut. Dafür, dass auch dieses Tal, übrigens in landschaftlicher Hinsicht eines der prächtigsten Tian-Schan-Täler, einst durch Gletschereis völlig ausgefüllt war, bietet das Relief des Bodens und der Talwände die mannigfaltigsten Beweise.

Es war nun Ende Oktober geworden, und die Gewalt des Frostes war besonders zur Nachtzeit eine derartige, dass der Aufenthalt in den Hochtälern zur Unmöglichkeit wurde. Aus diesem Grunde musste ich zu meinem grossen Bedauern darauf verzichten, sowohl das nächste grosse Quertal, Chamer-dawan, zud urchwandern, als das grosse, vom Pik Nikolai-Michailowitsch abzweigende Gletschertal zu besuchen. Beides wäre zur Ergänzung meiner bisherigen Forschungen sehr wichtig gewesen. Manches, was mir dort zur Gewissheit geworden wäre, musste infolgedessen nur eine, allerdings auf Wahrscheinlichkeit beruhende Annahme bleiben. Ich beschränkte mich darauf, nochmals durch das Grosse Musart-Tal bis zur Mündung des Tales Chamer-dawan aufwärts zu wandern, weil die Croquierung

dieser Strecke zur Ergänzung meiner Aufnahmen nötig war, und weil ich einige geologische Beobachtungen, die im Vorjahre unterblieben waren, nachholen wollte. Aus der Mündung des Chamer-dawan-Tales (ca. 2400 m) kamen mächtige, alte Moränenmassen heraus, deren Form gut erhalten ist, und die mit der hier mehrere Werst breiten, alten Endmoräne (siehe S. 309) des Haupttalgletschers vereint, dem Relief des Talbodens vielfachen Wechsel verleihen. Die schon am Taleingange vergletscherte Uferkette und der sogar in dieser späten und trockenen Jahreszeit noch bedeutende Wassergehalt des Talbaches lassen auf einen in diesem Tale aufgespeicherten, erheblichen Vorrat an Gletschereis und Firn schliessen. Die Kalmaken, welche das Tal im Sommer mit ihren Herden besuchen, sprachen mir von ausgedehnten Gletschern.

Nachdem die Forschungen im Hochgebirge ihr Ende erreicht hatten, waren jetzt die in Narynkol nach und nach angehäuften Sammlungen zu verpacken und nach Prschewalsk zu expedieren; nachdem dies geschehen war, reiste ich das Tekes-Tal gegen Osten 100 Werst aufwärts. Wie schon 10 Jahre früher, bot sich auch diesmal Gelegenheit, zu beobachten, dass der ganze Riesenwall des Tian-Schan, vom Khan-Tengri bis zum Karagai-tasch-Passe, in seinen höchsten Scheitelhöhen eine durchaus zusammenhängende Decke von Firn trägt, aus welcher grosse Gletscher allseits in die vielverzweigten Talgebiete der grossen Längstäler Agiass und Kok-su herabfliessen. Um aus dem Tekes-Tale nach Kuldscha zu gelangen, galt es nun, die nördlichen Vorketten des Tian-Schan, den Temurlik-Tau, zu überschreiten, ehe die winterlichen Schneefälle dies unmöglich machen würden. Nahe dem Austritte des Dschidschen-Flusses aus dieser nördlichen Kette berührte ich die ausgedehnte Lama-Niederlassung Sumbe, die sich seit meinem letzten Besuche (10 Jahre früher) ausserordentlich entwickelt hatte. Meine Absicht im Chonochai-Tale, einem Quelltale des Dschidschen, paläontologisch zu sammeln, wurde durch unaufhörliche Schneefälle sehr erschwert. Immerhin konnte ich in diesen Serien heller und dunkler Kalke, in denen ich bereits 10 Jahre früher gute Ausbeute gemacht

hatte, noch eine ziemlich reiche, unterkarbonische Fauna einheimsen. Die Überschreitung der Defileen des Schatte-Passes (ca. 3000 m) erfolgte bei unaufhörlichen Schneefällen unter grossen Mühseligkeiten, so dass ich von dem geologisch interessanten Gebiete wenig Nutzen mehr ziehen konnte und froh sein musste, als sich meine Karawane beim Kalmaken-Aul Ukurtschö (ca. 1400 m), am Nordfusse des Gebirges in Sicherheit befand. Von dort ging es durch die Ili-Ebene nach Kuldscha. Nachdem ich den grössten Teil der Leute dort entlassen hatte, musste ich, um Prschewalsk zu erreichen, wo die vereinigten Sammlungen sich jetzt befanden, und dort endgültig zum Verschicken in die Heimat umzupacken waren, nochmals die nördliche Vorkette, Ketmen-Tau, in der Richtung von Nord nach Süd kreuzen, was infolge der Schneefälle und der Vereisung der Gebirgstäler mit grossen Schwierigkeiten verbunden war. Nach Erledigung der Arbeiten in Prschewalsk wurde die Rückreise nach Taschkent angetreten, wo ich im Dezember 1903 eintraf.

Der Rückblick auf die Ergebnisse dieser langen und mühevollen Expedition berechtigt mich auszusprechen, dass sie für die Wissenschaft erfolgreich verlaufen ist: Nach Herstellung einer Karte, in welcher alle während der Reise gemachten topographischen Aufnahmen verwertet sind, wird die bisherige Vorstellung vom Baue des zentralen Tian-Schan in mancher Hinsicht verändert und ergänzt werden. Auch die bis jetzt herrschenden Kenntnisse von der Struktur und Tektonik des gewaltigen Gebirges werden in sehr wesentlichen Punkten durch das Ergebnis unserer Forschungen berichtigt und vervollständigt werden, wozu die ungemein reichen paläontologischen und geologischen Sammlungen der Expedition die Grundlage bilden sollen. Die Untersuchung dieses Materials wird neues Licht auf die Stratigraphie Zentralasiens verbreiten. Auch die botanische und zoologische Sammlung sind reichhaltig, wenn bei deren Anlegung auch nicht gerade systematisch gearbeitet werden konnte; auch durch ihre Untersuchung wird sich auf diesen Gebieten mancherlei Bereicherung unserer bisherigen Kenntnis des Tian-Schan ergeben. Bevor aber dieses grosse Material nicht

von kompetenten Fachmännern gesichtet und bestimmt ist, wäre es gewagt, aus den in diesem vorläufigen Berichte niedergelegten und vielen anderen, darin nicht zum Ausdrucke gebrachten Tatsachen Schlüsse zu ziehen. Nur in einem Punkte steht meine wissenschaftliche Überzeugung heute schon fest, und zwar darin, dass auch für den Tian-Schan eine in verschiedenen Phasen sich manifestierende Eiszeit angenommen werden muss, wenn diese auch, entsprechend den besonderen, in Zentralasien der Eiszeit vorangegangenen Erscheinungen, in der Verteilung von Wasser und Land, eine von den Eiszeiten Europas und Amerikas in mancher Hinsicht verschiedene gewesen sein mag. Die Photographie habe ich während dieser Expedition in hervorragendem Masse in den Dienst der Forschung gestellt, um soviel als möglich auch durch bildliche Darstellungen Belege für die beobachteten Verhältnisse und anschauliche Ergänzungen zu den Beobachtungen zu gewinnen. Besondere Aufmerksamkeit wurde während der Dauer der Expedition der Beobachtung der klimatischen und meteorologischen Verhältnisse zugewendet, und auf diesem Gebiete lässt sich aus der Bearbeitung der während der ganzen Dauer der Expedition täglich zweimal vorgenommenen Beobachtungen ebenfalls mancherlei, für die Wissenschaft wichtiges Material erwarten.



Die fossilen oberoligocänen Wellenfurchen des Peissenbergs und ihre Bedeutung für den dortigen Bergbau.

Von **A. Rothpletz.**

(*Eingelaufen 15. November.*)

(Mit Tafel II.)

Seit etwa 10 Jahren steht in weiteren Kreisen, besonders aber bei den Beamten der oberbayerischen Kohlenreviere die Frage auf der Tagesordnung: sind die steil aufgerichteten und nach Süd geneigten Kohlenflötze des Peissenbergs normal gelagert oder überkippt, setzen sie sich als Nordflügel einer Mulde langsam verflachend gegen die Ammer fort oder biegen sie sich als überkippter Südflügel einer Mulde unterirdisch, indem sie zunächst immer steilere Stellung nehmen, gegen Norden um? Eine sichere Beantwortung dieser Fragen wäre von ebenso grosser Wichtigkeit für den Bergbau als für die tektonische Auffassung des subalpinen Gebirgslandes.

Schon vor mehr als 40 Jahren hatte Gümbel die Anschauung gewonnen, dass am Peissenberg alle Schichten von der obermiocänen Süsswassermolasse an bis in das Oligocän überkippt liegen, und er war gewärtig, dass man durch die Anlage der neuen tieferen Schächte beim Unterbaustollen auf steilere Stellung der Flötze in der Tiefe stossen werde. Diese Erwartung ist aber insofern nicht erfüllt worden, als sich keine wesentliche Änderung im Neigungswinkel ergab, obwohl man bereits um 331 m tiefer herabgekommen ist als im alten Hauptstollen. Da aber zugleich Gümbels ältere Auffassung der Miesbacher und Penzberger Kohlenreviere in mehrfacher Be-

ziehung sich durch den Fortschritt im Bergbau als nicht zutreffend erwiesen hatte, so wurden nun gerade von dieser Seite die Zweifel immer lauter, ob denn wirklich die Peissenberger Flötze überkippt seien. Wenn wir von den Dokumenten absehen, welche in den Direktorial-Akten der oberbayerischen Aktiengesellschaft für Kohlenbergbau liegen, und von den vergeblichen mündlichen Versuchen, Gümbel zu einer anderen Auffassung zu bringen, so dürfte wohl Stuchlik[1]) als der erste zu nennen sein, der 1893 der neuen Auffassung öffentlich das Wort redete. Dann folgte 1896 W. Wolff,[2]) doch wagte er nicht weiter zu gehen als zur Behauptung, dass die Tektonik des Peissenberges noch keineswegs genügend aufgehellt sei. Nachdem aber 1898 Gümbel gestorben war, trat alsbald A. Weithofer[3]) mit einer Arbeit an die Öffentlichkeit, in der die lang verhaltenen Zweifel rücksichtslos zur Aussprache kamen, die dann 1902 noch weiter von ihm begründet wurden. Immer dringender machte sich das Bedürfnis geltend, eine geologische Spezialkarte dieses Gebietes zu haben, denn die über 40 Jahre alte geologische Übersichtskarte Gümbels war zur Entscheidung solcher Fragen gänzlich unzulänglich. So hat dann R. Bärtling[4]) sich der Aufgabe einer geologischen Kartierung des Peissenbergs 1902 unterzogen und 1903 ist die Karte im Massstab von 1 : 25000 erschienen. Auch er hat sich ganz der Auffassung angeschlossen, dass die Peissenberger Flötze normal gelagert sind.

Im folgenden soll diese Auffassung kurz skizziert werden, wobei aber von einem weiteren Eingehen auf den Anteil, den die einzelnen Autoren an der Begründung genommen haben, abgesehen worden ist, weil es hier ja nur darauf ankommt, zu zeigen, wie weit diese neue Anschauung auf sicherem Boden steht.

1. Die marine miocäne Molasse im Norden ist zur jüngeren Süsswassermolasse konform gelagert und beider Schichten sind

---

[1]) Oesterreich. Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen, 1893.
[2]) Paläontographica, Bd. 43.
[3]) Verhandl. k. k. geol. R.-A., 1899 und 1902.
[4]) Geognostische Jahreshefte, München 1903.

teils völlig senkrecht aufgerichtet teils sogar so stark nach Norden überkippt, dass sie mit bis zu 45° Neigung gegen Süden einfallen. Zwischen der Station Peissenberg und dem alten Stollen oberhalb Bad Sulz zeigen die südlich angrenzenden oligocänen Schichten so stark verändertes Streichen und Fallen, dass eine Gleichmässigkeit der Lagerung mit den jüngeren miocänen Schichten ausgeschlossen erscheint. Die einfachste Erklärung liegt in der Annahme einer von Ost nach West gerichteten Längsverwerfung, die also Oligocän und Miocän hier voneinander trennen würde. Weiter im Westen, wird nun aber weiter geschlossen, soll dieser Längsbruch stets dieser stratigraphischen Grenze folgen und in diesem Falle würde dann diese Verwerfung sich als eine Überschiebung mit steil nach Süd geneigter Schubfläche erweisen und zugleich würde damit der hauptsächlichste Grund hinfällig werden, der für die Annahme massgebend war, dass die flötzführenden oligocänen Schichten ebenfalls überkippt seien.

So gut begründet diese Längsverwerfung bei Bad Sulz erscheint, so darf doch nicht vergessen werden, dass deren Fortsetzung nach Osten und Westen noch ganz unsicher ist, nach Osten, weil es dort auf lange Erstreckung überhaupt an Aufschlüssen für das Oligocän am Kontakte mit dem Miocän fehlt, und nach Westen, weil da der einzige, wirklich gute Aufschluss, der durch Querschlag im Oberbaustollen vor mehr als 40 Jahren gewonnen worden ist, längst nicht mehr zu sehen ist, aber nach den Angaben Gümbels[1]) damals eine konforme Lagerung der oligocänen und miocänen Schichten ergab. Die hervorgetretene Vermutung, man habe eben die Spuren der Verwerfung jenesmal übersehen, stützt sich hauptsächlich auf die Tatsache, dass im Penzberger und Miesbacher Revier Miocän im Norden und Oligocän im Süden, soweit Aufschlüsse vorhanden sind, stets durch eine ähnliche Längsverwerfung getrennt werden. Kann man also auch nicht behaupten, dass diese Vermutung mehr als eine solche sei, so wird man sich doch

[1]) Gümbel, Bayer. Alpengeb., S. 726, Taf. 40, Fig. 294.

der Tatsache nicht verschliessen können, dass sie einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit besitzt.

2. Die Entscheidung der Frage nach der Lagerung der kohlenführenden Schichten ist damit jedenfalls auf diejenigen Argumente beschränkt worden, welche aus der Beschaffenheit des Oligocäns selbst gewonnen werden können. Nun hat man im Penzberger Revier gefunden, dass dort zwei petrographisch recht charakteristische Lager oder eigentlich Doppellager von Quarzsandstein bezw. -Sand in der Weise vorkommen, dass die hauptsächlichsten abbauwürdigen Flötze unter denselben, nur wenige zwischen denselben und nur ein Flötz innerhalb des oberen Quarzsandes liegen, während gleich im Hangenden rein marine oligocäne Ablagerungen, die sogenannten Promberger Schichten, folgen. Da aber auch im Peissenberger Revier sich zwei solche Quarzsandlager erkennen lassen und dieselben in einem ähnlich grossen Vertikalabstand auftreten, so hat man die Annahme gemacht, dass das genau dieselben Lager wie bei Penzberg seien, obwohl beide Reviere um mehr als drei geogeographische Meilen voneinander entfernt liegen und im Zwischenraum von der Existenz dieser Sande noch nichts bekannt ist. Ein sicherer Beweis dafür, dass, wo immer im bayerischen Braunkohlenrevier Quarzsande auftreten, dieselben entweder dem unteren oder dem oberen Quarzsandhorizont von Penzberg entsprechen müssen, ist bis jetzt nicht erbracht worden. Aber indem man diese Annahme versuchsweise machte, ergab sich für den Peissenberg, dass auch dort die zahlreichen Kohlenflötze fast alle unter den Quarzsanden, nur ein schwaches zwischen denselben und ebenso schon in den oberen Quarzsanden marine Versteinerungen liegen. Man hat also, wenn eine Überkippung nicht angenommen wird, eine auffällige Übereinstimmung mit der Schichtenserie bei Penzberg, von welch letzterer wir vollkommen sicher sind, dass sie normal liegt. Das wurde dann auch für die Bergbeamten der Beweggrund, die ältere Gümbelsche Auffassung völlig aufzugeben. Freilich darf nicht übersehen werden, dass auch dann noch nicht unerhebliche Verschiedenheiten zwischen den Penzberger und Peissen-

berger Flötzverhältnissen bestehen bleiben. Einmal stimmt die Zahl der Flötze sowohl zwischen als unter den Glassanden in beiden Revieren nicht überein, zum zweiten führen die sandigen Schichten zwischen den Glassanden im Peissenberg vielfach marine Versteinerungen und selbst unter denselben zwischen Flötz 13 und 14 ist eine marine Bank nachgewiesen, während in Penzberg solche erst über den Glassanden angetroffen worden sind. Man kann deshalb im Zweifel bleiben, ob angesichts dieser Verschiedenheiten auf die Identität der beiderseitigen Quarzsande ein so entscheidendes Gewicht zu legen sei.

3. Bei Penzberg ist durch den Bergbau folgende Aufeinanderfolge der Schichten von oben nach unten von den Bergbeamten festgestellt:

4 Marine „Promberger“ Schichten,
3 Brackische koklenführende Schichten,
2 Bunte Molasse (700 m mächtig),
1 unterste marine Molasse.

Dem gegenüber zeigt das Oligocän am Peissenberg nördlich der Ammer diese Folge:

5 Bunte Molasse,
4 marine Molasse mit kleinen brakischen Einlagerungen,
3 Brakische kohlenführende Schichten mit vereinzelten marinen Einlagerungen.

Man ersieht leicht, dass, wenn 3 an beiden Orten, wie jetzt angenommen wird, gleichalterig ist, die tieferen Schichten 2 und 1 am Peissenberg überhaupt gar nicht aufgeschlossen sind; dahingegen stellt sich daselbst über den sogenannten Promberger Schichten nochmals eine Bunte Molasse von jedenfalls 700 m grosser Mächtigkeit ein, die so gut wie versteinerungslos ist, sich aber von der unteren bunten Molasse bei Penzberg petrographisch nicht wohl unterscheiden lässt. Das bildet für die neuere tektonische Auffassung eine grosse Schwierigkeit, weil bisher nirgends am Nordrand der Alpen eine so junge, bunte Molasse nachgewiesen wurde und weil in der Nähe des Peissenbergs, nämlich südlich der Ammer, ebenfalls eine bunte

Molasse vorkommt, die wie bei Penzberg unter kohlenführenden brakischen Schichten liegt, somit der älteren bunten Molasse angehört, sich jedoch petrographisch nur recht schwierig (wenn überhaupt?) von der unmittelbar an sie anstossenden, angeblich jüngeren, bunten Molasse unterscheidet. Es liegen auch tatsächlich so wenig Anhaltspunkte vor, um die bunte Molasse nördlich und südlich der Ammer voneinander zu trennen, dass schon daran gedacht wurde, ob nicht bei Peissenberg zwischen 5 und 4 eine Verwerfung anzunehmen sei, wo dann 5 als die echte, ältere bunte Molasse (2) beibehalten werden könnte und nur durch die Verwerfung bezw. eine Überschiebung auf die jüngere 4 geschoben worden wäre. Indessen hat der neue Unterbaustollen, der diese Störung durchfahren haben müsste, nichts gezeigt, was dahin gedeutet werden konnte, und so müssen wir zum Schlusse kommen, dass die Hypothese der normalen Lagerung noch keineswegs eine so feste Begründung erfahren hat, als es bei der Wichtigkeit, die sie für den Fortgang des dortigen Kohlenbergbaues besitzt, wünschenswert wäre.

Nun wissen wir, dass bei Schichtplatten, die sich in nicht allzu grosser Meeres- oder Seetiefe gebildet haben, die Oberflächen häufig von sogenannten Wellenfurchen, Kriechspuren und allerhand mechanisch erzeugten Furchen bedeckt sind, die auch dann, wenn spätere Gebirgsstörungen die Bänke verstürzt und verbogen haben, noch recht gut erkennen lassen, welches die ursprüngliche Oberfläche war. Wenn also solche Dinge am Peissenberg vorkommen sollten, so war es geboten, sie in erster Linie bei der Entscheidung jener tektonischen Frage zu Rate zu ziehen. Als ich darum in diesem Sommer erfuhr, dass eine von schönen Wellenfurchen bedeckte Platte im Unterbaustollen entblösst und ein Teil davon leicht zu erhalten sei, habe ich denselben für die geologische Staats-Sammlung erworben. Meine Freude war keine geringe, als ich nach Eintreffen derselben bemerkte, dass dieselbe alle die oben angeführten Bildungen in vorzüglicher Erhaltung zeigt und somit vollauf genügt, um Sicherheit über die wahre Lagerung zu erhalten.





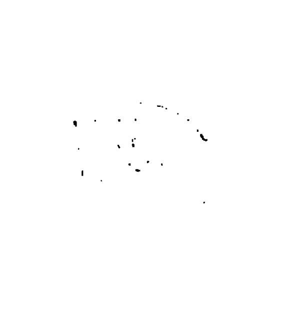
Gipsabguss in halber linearer Verkleinerung. Das Licht fällt von rechts oben ein, so dass **die Leeseite der **
zwei Querrisse verbunden, die eine läuft von Welle 1 **oben** zur Furche 4 **unten, die andere v**

Tafel II.



:hatten liegt. Die Trockenrisse fallen in die (von links her gezählten) Furchen 1, 2 und 4; sie sind durch
oben bis Furche 4 (obere Hälfte). Die drei Sandhügel liegen auf Welle 4, 6 und Furche 6.

Autotypi: und Druck von Meisenbach Riffarth & Co., München.



Die beiden von mir untersuchten Sandsteinplatten haben zusammen eine Grösse von $^1/_5$ qm. Die Wellenfurchen befinden sich jedoch nur auf der einen Seite, die andere Seite ist fast ganz eben. Diese Platten gehören einer Lage an, welche auf der Förderstrecke des Flötz 8 zwischen Querschlag 1 und 2 im Tiefbau II der Unterbaustollen blosgelegt worden ist und die bei ost-westlichem Streichen ungefähr unter einem halben rechten Winkel nach Süden einfällt. Sie liegt gleichförmig in einem System von Schichten, welche die oberoligocänen Braunkohlenflötze, die dort bergmännisch abgebaut werden, einschliesst, und zwar gehört sie zu dem hangenden Teil dieses Systemes. Die Wellenfurchen sind nur auf der oberen Seite der Sandsteinplatte wohl entwickelt. Die darüberliegende Schicht, welche das Gegenstück der Wellenfurchen zeigen müsste, ist nicht mehr vorhanden, wahrscheinlich war sie nicht von gleicher Festigkeit und von mehr toniger Beschaffenheit, so dass sie zerfallen ist. Um aber dieses fehlende Gegenbild doch beurteilen zu können, habe ich einen Gipsabdruck der gewellten Oberfläche anfertigen lassen, der also die Wellenfurchen der Unterseite der Deckplatte zeigt. Da sich aber, wie ich der Einfachheit wegen gleich vorausschicken will, durch meine Untersuchung herausgestellt hat, dass diese Unterseite tatsächlich der ursprünglichen Oberseite der Wellenfurchen entspricht, so werde ich sie zunächst im nachfolgenden beschreiben.

Die wellenartigen Erhebungen haben von Furche zu Furche gemessen eine Breite, die zwischen 5 und 7 cm schwankt. Vom Niveau der Furchen aus gemessen erreichen die Wellen eine Kammhöhe von 6 mm, doch liegt sie niemals genau in der Mitte der Wellenbreite, sondern ungefähr um ein Drittel von der einen Furche entfernt. Ich bezeichne die Seite der Welle, auf welcher der First liegt, als die Leeseite. Sie ist auf beiden Platten stets gleichsinnig orientiert. Auf der ungefähr doppelt so breiten Lutseite ist die Böschung gegen das Wellental natürlich flacher als auf der Leeseite, aber zumeist macht sich noch in Mitte des Wellenbergs eine kleinere Ein-

senkung bemerkbar von etwa 1 mm Tiefe, so dass der Berg auf der Lufseite sich nochmals zu einem schwach gewölbten First erhebt, der aber nie die Höhe des Hauptkammes auf der Leeseite erreicht.

Die Wellenkämme beschreiben im Streichen schwach geschlängelte Kurven, die nur da nicht genau parallel zueinander verlaufen, wo sich neue Kämme einschalten. Die Regelmässigkeit dieser Wellenfläche ist jedoch vielfach durch kleine Vertiefungen und Erhöhungen unterbrochen, von denen besonders die ersteren häufig und auffällig sind. Man kann dreierlei Art unterscheiden.

1. Mechanische Eindrücke und Kriechspuren. Sie erscheinen auf dem Gipsabdruck stets als Vertiefungen von wechselnder Gestalt. Bald sind es nur kurze längliche bald fortgesetzte und verzweigte Furchen. Sie liegen regellos in den Wellentälern und auf den Wellenbergen oder setzen sich in jenen beginnend auf diesen weiter fort. Wo sie einander begegnen und sich kreuzen, erkennt man leicht, dass die eine schon da war, als die andere sich bildete. Die deutlich verzweigten Furchen haben das Aussehen von Kriechspuren. Die anderen dürften wohl zum Teil durch kleine Holzstücke erzeugt worden sein, die vom Wind oder Wasser über die gewellte Sandoberfläche getrieben worden sind. Tatsächlich ist die Sandsteinplatte an vielen Stellen von kleinen verkohlten Holzstückchen bedeckt, die diese Furchen hervorgerufen haben können. Alle diese Furchen erscheinen auf der Sandsteinplatte als Erhabenheiten und nach den gründlichen Untersuchungen Nathorsts kann es keinem Zweifel unterliegen, dass diese Seite die Unterseite der Platte darstellen muss.

2. Trockenrisse bilden ein unregelmässiges Netz auf den Platten. Sie folgen bald den Tälern bald den Kämmen, aber stets verlassen sie dieselben nach kurzer Erstreckung und vereinigen sich zu einem Maschennetz. Ihre Breite schwankt dabei zwischen 7 mm und Bruchteilen eines Millimeters. Während die Wellenoberfläche der Sandsteinplatte von einem dünnen mergeligen und kohligen Ueberzug bedeckt ist, fehlt dieselbe

an Stelle der Risse, an welchen der Sand der Platte von unten heraufdringt. Beim Loslösen der Deckplatte ist dieser zu Sandstein verfestigte Sand des Risses zum Teil mit abgerissen worden und alsdann treten die Trockenrisse auf der Platte nicht als Erhabenheiten, sondern als Vertiefungen hervor. Auf dem Gipsabguss ist natürlich jeweils gerade das Gegenteil der Fall. Es ist unverkennbar, dass das Material der Sandsteinplatte erst später nach Bildung der Wellenfläche zum Absatz gekommen sein kann, weil dasselbe in die Trockenrisse, welche vorher auf letzterer entstanden waren, nur von oben eingedrungen sein kann. Wir kommen somit ebenso wie bei den Kriechspuren zu dem Ergebnis, dass die Sandsteinplatte jünger als die Wellenfurchen sein muss.

3. Kleine Sandhügel treten auf dem Gipsabguss als runde oder längliche Erhabenheiten von 10—40 mm Durchmesser scharf begrenzt hervor. Die Sandsteinplatte lehrt, dass sie aus reinem Sand bestehen und frei von Mergel und kalkigen Resten sind. Sie sind anscheinend ganz unabhängig von den Wellen, denn sie liegen abwechselnd in deren Furchen und auf deren Kämmen. Stets aber schmiegt sich die Wellenoberfläche, wo sie an diese Hügel herankommt, an dieselben an, indem sie sich an ihnen etwas heraufzieht, bezw. auf der Sandsteinplatte herabzieht, aber den ganzen Hügel nie überdeckt. Man kann kaum anders als daraus schliessen, dass diese Hügel schon vorhanden waren, als die Wirbelbewegungen des Wassers der Sand- oder Schlammoberfläche die Wellenform verlieh, und dass dieselben den Bewegungen des Wassers zum Trotz sich erhalten konnten. Die Vermutung scheint mir nicht gewagt, dass sie von Würmern oder anderen sandbewohnenden Wassertieren erzeugt und auch während der Wellenbildung unterhalten worden sind. In diesem Falle ist es ebenfalls notwendig, anzunehmen, dass die Wellenfläche der Sandsteinplatte deren Unterseite ist, weil die Sandhügel von unten in dieselbe heraufgereicht haben müssen.

Nach mündlichen Angaben des Herrn Bergmeisters Stuchlik sind solche Wellenfurchen noch an mehreren anderen Stellen

des Bergwerkes zum Teil in unmittelbarer Nähe der Flötze angetroffen worden. Auf photographischen Wiedergaben derselben erschien es mir, als ob auch bei diesen die charakteristischen, mechanischen und Kriechspuren sowie bei unserer Platte ausgebildet seien und Herr Stuchlik hat mir dies bestätigt.

Es kann somit keinem Zweifel mehr unterliegen, dass alle diese Platten und somit auch die kohlenführenden oberoligocänen Schichten des Peissenbergs nicht normal, sondern überkippt liegen, weil deren Unterseiten jetzt oben auf liegen. Ich will gestehen, dass ich von diesem Ergebnis selbst aufs äusserste überrascht worden bin. Nachdem ich lange Zeit mich der Auffassung Gümbels angeschlossen hatte, war ich in späteren Jahren doch sehr an deren Richtigkeit zweifelhaft geworden und ich freute mich, als Herr Bärtling durch seine hübsche Karte des Peissenbergs diesen Gegenstand in ein helleres Licht rückte. Damit trat dann freilich deutlicher als vorher die problematische Stellung der Bunten Molasse hervor, und es wurde mir klar, dass auch mit dieser Karte das Dunkel noch nicht ganz erhellt war, das so lange auf dem Peissenberg lag.

Wir sind jetzt gezwungen, zur alten Gümbelschen Auffassung wieder zurückzukehren, aber freilich muss auch diese sich eine nicht unbedeutende Umwandlung gefallen lassen. Schon Wolff hat ja mit den zwei Abteilungen des mittleren und oberen Oligocänes aufgeräumt. Die ganze oligocäne Molasse zwischen dem Kamm des Peissenbergs und dem Nordrande der Alpen gehört ins Oberoligocän, das abwechselnd in mariner, brackischer und lacustrer Fazies entwickelt ist. Dieser Wechsel erfolgt und wiederholt sich aber nicht überall gleichmässig und deshalb darf man einzelne petrographisch oder faunistisch besonders auffällige Lager nicht als Leithorizonte überall anzutreffen erwarten. Auch die einzelnen Kohlenflötze haben keineswegs eine grosse Beständigkeit und die Identifizierungsversuche sind nicht nur von Grube zu Grube, sondern auch schon von einem zum anderen Muldenflügel vielfach gescheitert.

Marine Lager kommen sowohl an der Basis, wie in der

Mitte und ganz zu oberst in dieser Schichtserie vor, ohne dass sich faunistisch bisher Altersunterschiede hätten feststellen lassen. Mit dem Namen der Promberger Schichten wird nicht ein besonderer paläontologischer Horizont bezeichnet, sondern nur das jüngste Auftreten der marinen Fazies. Die bunte Molasse am Peissenberg liegt, wie es ihrem Alter zukommt, infolge einer Überkippung über den flötzführenden Schichten, da sie aber südlich der Ammer von letzteren mit ebenfalls südlichem Einfallen überlagert wird, so ergibt sich, wenn man von den durch Bärtling nachgewiesenen kleineren Störungen absieht, im grossen ganzen, dass die bunte Molasse einen von Ost nach West streichenden, aber nach Nord überkippten Sattel bildet. Infolgedessen liegen die jüngeren brackischen Schichten im Süden auf ihnen, während sie im Norden unter dieselben einschiessen. Und so bleibt es vorerst bei der Wahrscheinlichkeit, dass, wenn der Unterbauschacht tief genug herabgebracht wird, er endlich doch die Kohlenflötze in einer steileren Stellung antreffen wird, die allmählich in nördliches Einfallen umschlägt. Aber es ist nicht gesagt, dass die jüngere, miocäne, marine Molasse alles das konform mitmacht, denn eine grosse, nach Süd einfallende Längsspalte bildet längs des Grates des Peissenbergs eine bedeutsame tektonische Grenze, die wahrscheinlich eine solche auch für den Kohlenbergbau sein wird.

Nachtrag vom 8. Dezember.

Nachdem der Inhalt meines Vortrages bekannt geworden war, hat sich Herr Bergmeister Stuchlik an mich gewandt, um mich zu überzeugen, dass seine Auffassung der Wellenfurchen doch die richtige sei, und so habe ich mir am 27. November sein Material angesehen und bin ich mit ihm in die Grube eingefahren.

Herr Stuchlik kennt die Wellenfurchen im Bergwerk Peissenberg schon seit Jahren (warum dieses wichtige Beweismaterial in der einschlägigen Literatur über den Peissenberg bisher mit keinem Worte Erwähnung gefunden hat, obwohl es mehreren

bekannt gewesen sein muss, ist mir nicht völlig klar geworden), und er hat die Anschauung gewonnen, dass deren morphologische Eigentümlichkeiten für die normale Lagerung der Gesteinsbänke sprechen. Den vielen Wülsten (also den Furchen des Gipsabgusses auf Taf. II) hat er jedoch keine besondere Wichtigkeit zugesprochen, auch waren ihm die wichtigsten Arbeiten über solche Bildungen unbekannt geblieben. Er hat deren Beweiskraft deshalb auch in Abrede gestellt und meint sie als Trockenrisse oder ursprüngliche Aufblähungen deuten zu können. Bei eifrigem Suchen findet man zwischen den Wülsten ab und zu auch sehr kleine Furchen, die teils von entsprechenden schwachen Erhebungen begleitet werden, teils in ihrem Verlaufe selbst in Erhöhungen übergehen. Man kann sie deshalb ebensogut für Kriechspuren selbst als für Abgüsse solcher halten. Da sie aber gegenüber den kräftigen Wülsten und wulstförmigen Kriechspuren durchaus zurücktreten, so kann ich ihnen eine entscheidende Bedeutung nicht beimessen. Will man jedoch in Zweifel ziehen, dass die Ergebnisse, zu welchen die Untersuchung solcher Wülste durch andere Forscher in anderen Ländern und anderen Formationen geführt haben, auch für die oberbayerische oligocäne Molasse zu gelten haben, so bleibt nur noch ein Mittel, um darüber Klarheit zu erlangen, und sobald Zeit und Wetter mir es gestatten, werde ich dieses Mittel anwenden und wenn es zu einem brauchbaren Ergebnis führt, darüber später Bericht erstatten. Es ist das der Vergleich der Peissenberger Wellenfurchen mit solchen aus anderen Teilen des Molassegebietes, wo über die normale Lagerung der Schichten keine Unsicherheit besteht. Vor 20 Jahren sah ich solche im Leizachtal prachtvoll aufgeschlossen, und wenn auch sie von Wulstbildungen begleitet sein sollten, so wird sich die Frage ganz sicher entscheiden lassen.

Über absolute und relative Bewegung.

Von A. Föppl.

(Eingelaufen 5. November.)

Die treffendsten Ausführungen über die physikalische Bedeutung des Trägheitsgesetzes und den damit zusammenhängenden Begriff der absoluten Bewegung rühren von Mach her. Nach ihm ist auch in der Mechanik, wie schon in der Geometrie ohnehin, die Annahme eines absoluten Raumes und hiermit einer absoluten Bewegung im eigentlichen Sinne unzulässig. Jede Bewegung ist nur als eine relative verständlich und was man gewöhnlich absolute Bewegung nennt, ist lediglich die Bewegung relativ zu einem Bezugssysteme, einem sogenannten Inertialsysteme, das von dem Trägheitsgesetze gefordert wird und das auf irgend eine gesetzmässige Weise durch die Massen des Weltsystems seine Orientierung erhält.

Mit dieser Anschauung stimmen heute die meisten Autoren im wesentlichen überein, so aus der neuesten Zeit besonders Voss[1]) und Poincaré.[2]) Auf einem anderen Standpunkte steht Boltzmann,[3]) der einen absoluten Raum und hiermit eine absolute Bewegung nicht schlechthin verneinen zu können glaubt. Hier werde ich aber von der Mach'schen Ansicht ausgehen und versuchen, einige weitere Ausführungen daran zu knüpfen.

---

[1]) A. Voss, Die Prinzipien der rationellen Mechanik. Enzyklop. d. math. Wissensch., Band IV, 1, S. 39, 1901.

[2]) H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese. Deutsch von F. und L. Lindemann, Leipzig 1904.

[3]) L. Boltzmann, Prinzipe der Mechanik, II, S. 330, Leipzig 1904.

Mach fasst seine Betrachtungen in dem Satze[1]) zusammen: „Der natürliche Standpunkt für den Naturforscher bleibt der, das Trägheitsgesetz zunächst als eine hinreichende Annäherung zu betrachten, dasselbe räumlich auf den Fixsternhimmel, zeitlich auf die Drehung der Erde zu beziehen und die Korrektur beziehungsweise Verschärfung unserer Kenntnis von einer erweiterten Erfahrung zu erwarten." Nun scheint es mir nicht ganz unmöglich zu sein, dass eine solche erweiterte Erfahrung jetzt vorliegen könnte. In einer kürzlich erschienenen Abhandlung von K. R. Koch[2]) über die zeitliche Änderung der Grösse der Schwerkraft heisst es: „Danach scheint mir die Annahme einer wirklichen Änderung der Schwerkraft oder genauer ihres Unterschiedes zwischen Stuttgart und Karlsruhe geboten zu sein." Man wird natürlich abzuwarten haben, ob sich diese Angabe bei weiterer Prüfung bestätigt; zum mindesten aber wird man heute mit der sehr nahe liegenden Möglichkeit rechnen müssen, dass sie richtig ist.

Eine Erklärung einer solchen Erscheinung, falls sie richtig ist, auf Grund bekannter Ursachen dürfte sehr schwierig sein. Dieser Umstand ermutigt mich, jetzt mit einer Betrachtung hervorzutreten, die ich schon früher angestellt hatte und die mich schon längst zu der Annahme geführt hatte, dass geringe periodische Änderungen der Schwerkraft von messbarem Betrage als möglich in Aussicht zu nehmen seien.

Die Erfahrung lehrt zunächst, dass das von dem Trägheitsgesetze geforderte Inertialsystem räumlich mit praktisch ausreichender Genauigkeit gegen den Fixsternhimmel festgelegt werden kann. Es steht zwar auch frei, ein in anderer Weise, z. B. ein gegen die Erde festgelegtes Bezugssystem zur Beschreibung der Bewegungserscheinungen zu benützen. Dann sind aber die Coriolis'schen Ergänzungskräfte der Relativbewegung an jedem materiellen Punkte anzubringen, um die Bewegungen richtig voraussagen zu können. Man kann daher

---

[1]) E. Mach, Mechanik, 4. Aufl., S. 252, Leipzig 1901.

[2]) K. R. Koch, Drudes Annalen der Physik, Band 15, S. 146, 1904.

sagen, dass das Inertialsystem vor jedem anderen Bezugssysteme dadurch ausgezeichnet ist, dass man bei ihm ohne die Hinzunahme jener Ergänzungskräfte auskommt. Hierbei darf eine geradlinige, gleichförmige Translation des gewählten Bezugssystems als unwesentlich ausser Betracht gelassen werden.

Offenbar kann aber die Festlegung des Inertialsystems gegen den Fixsternhimmel nicht als zufällig angesehen werden. Man wird sie vielmehr dem irgenwie zur Geltung kommenden Einflusse der Massen, aus denen sich der Fixsternhimmel zusammensetzt, zuschreiben müssen. Es kann daher die Frage aufgeworfen werden, nach welchem Gesetze sich die Orientierung des Inertialsystems regelt, wenn die augenblickliche Gestalt und relative Bewegung des ganzen Massensystems, also die Grössen der einzelnen Massen, ihre Abstände voneinander und deren Differentialquotienten nach der Zeit als gegeben angesehen werden.

Das logische Bedürfnis nach einer solchen Fragestellung, wenn man die Annahme eines absoluten Raumes vermeiden will, hat auch Boltzmann empfunden, indem er nebenher auf die Möglichkeit hinweist,[1]) dass die drei Hauptträgheitsachsen des ganzen Weltsystems die verlangte Orientierung liefern könnten. Mit dieser nahe liegenden Vermutung würden freilich die begrifflichen Schwierigkeiten überwunden werden, wenn sie sich aufrecht erhalten liesse. Ich glaube aber nicht, dass sie zulässig ist. Man denke sich nämlich ein Weltsystem, das sonst ebenso eingerichtet ist, wie das unsrige, mit dem einzigen Unterschiede, dass zwischen den einzelnen Weltkörpern gar keine Kräfte auftreten. Dann würden in Bezug auf das für dieses Weltsystem gültige Inertialsystem alle Weltkörper geradlinige Bahnen beschreiben. Eine leicht anzustellende Rechnung lehrt aber, dass unter dieser Voraussetzung die Hauptträgheitsachsen des ganzen Systems im allgemeinen Drehungen gegen das Inertialsystem ausführen würden. Man muss sich daher nach einer anderen Bedingung umsehen, durch die sich die Festlegung des Inertialsystems verständlich machen lässt.

[1]) A. a. O. S. 333.

Wenn zunächt alle Weltkörper gegeneinander ruhten, bis auf einen einzigen materiellen Punkt, den ich mir zur Prüfung des Trägheitsgesetzes verwendet denke und den ich als den „Aufpunkt" bezeichnen will, so könnte nach den bereits vorliegenden Erfahrungen kein Zweifel darüber erhoben werden, dass der Aufpunkt, wenn keine Kräfte an ihm wirkten, eine geradlinige Bahn gegen ein mit den Massen fest verbundenes Bezugssystem beschreiben würde. Das Inertialsystem wäre also in diesem Falle sofort räumlich festgelegt.

Man denke sich ferner den Fall, dass die Weltkörper aus zwei Gruppen bestünden, aus einer „übermächtigen" Gruppe und einer kleineren Gruppe, derart, dass die zu jeder Gruppe gehörigen Massen ihre gegenseitigen Entfernungen nicht änderten, während aber die kleinere Gruppe, als Ganzes betrachtet, zur gegebenen Zeit irgend eine Bewegung, etwa eine Drehung gegen die grössere Gruppe ausführte. Wäre nur eine der beiden Gruppen für sich vorhanden, so würde das Inertialsystem gegen sie festzulegen sein. Da beide zusammenwirken und die eine Gruppe als weit „mächtiger" als die andere vorausgesetzt war, wird zwar das Inertialsystem jetzt immer noch nahezu gegen die erste Gruppe ruhen, aber doch eine kleine Bewegung dagegen ausführen, die eben von dem Einflusse der zweiten kleineren Gruppe herrührt.

Wie würde man sich nun einem solchen Falle gegenüber am zweckmässigsten verhalten? Ich glaube, man kann nicht zweifelhaft sein. Man würde das Bezugssystem ausschliesslich gegen die erste, übermächtige Gruppe festlegen und so rechnen, als wenn dieses das Inertialsystem wäre, dabei aber dem Einflusse der zweiten Gruppe dadurch Rechnung tragen, dass man die in diesem Falle nur sehr unbedeutenden Ergänzungskräfte der Relativbewegung, die das gewählte Bezugssystem gegen das wahre Inertialsystem ausführt, an jedem Aufpunkte anbringt. Entschliesst man sich dazu, dann erscheinen diese Corioliskräfte nun nicht mehr als blosse Rechnungsgrössen, die von einer Koordinatentransformation herrühren, sondern als physikalisch existierende Kräfte, die von den Massen der kleineren Gruppe

auf jeden Aufpunkt ausgeübt werden und die davon herrühren, dass diese Massen eine Bewegung relativ zu dem gewählten Bezugssysteme beschreiben.

Um diesen Gedanken weiter zu verfolgen, könnte man zunächst den Fall untersuchen, dass die zweite kleinere Gruppe, von der ich soeben sprach, nur durch einen einzigen Weltkörper vertreten sei. Man steht dann vor der Aufgabe, die von den Geschwindigkeiten dieses Weltkörpers und des Aufpunktes relativ zu dem gegen die übrigen Welkörper festgelegten Bezugssysteme und von der Entfernung zwischen beiden abhängige Kraft nach Grösse und Richtung anzugeben. Denkt man sich diese Aufgabe für einen Weltkörper gelöst, so würde sich daraus auf Grund des Superpositionsgesetzes auch der Einfluss einer ganzen Gruppe bewegter Körper ergeben.

Was bis jetzt an sicher festgestellten Beobachtungsergebnissen vorliegt, genügt wohl nicht, um diese fundamentale Aufgabe zu lösen; aber man braucht darum noch nicht daran zu zweifeln, dass man auf Grund weiterer Beobachtungen zur Lösung gelangen könnte.

Nach diesen Vorbetrachtungen gehe ich zu dem Falle über, wie er der Wirklichkeit entspricht. Unter Benutzung des Umstandes, dass sich die Konstellation des Fixsternhimmels im Laufe einiger Jahre oder Jahrhunderte nicht viel ändert, kann man sich vorläufig ein nahezu mit dem Inertialsystem zusammenfallendes Bezugssystem gegen drei passend ausgesuchte Sterne festgelegt denken. Um aber den dann noch bestehenden geringen Abweichungen Rechnung zu tragen, muss man sich an jedem Aufpunkte Corioliskräfte angebracht denken, die so, wie es vorher beschrieben war, als von den Geschwindigkeiten der einzelnen Weltkörper und des Aufpunktes abhängige Kräfte zu deuten sind.

Hiermit sind wir nun auch, worauf ich besonderen Wert lege, in den Stand gesetzt, eine unser Kausalitätsbedürfnis befriedigende Bedingung anzugeben, der das von dem Trägheitsgesetze geforderte wahre Inertialsystem genügen muss. Es ist nämlich jenes Bezugssystem, für das sich alle von den Geschwin-

digkeiten abhängigen Kräfte, die von den einzelnen Weltkörpern ausgehen, an dem Aufpunkte im Gleichgewicht halten. Wenn auch mit dieser Aussage praktisch zunächst offenbar nicht viel gewonnen ist, so scheint mir doch für die Bildung eines klaren Begriffes über das, was man in der Mechanik absolute Bewegung nennt, damit eine sehr geeignete Unterlage gegeben zu sein. Es ist zum mindesten die Aussicht auf einen Weg eröffnet, der nach Auffindung des Wirkungsgesetzes der von den Geschwindigkeiten abhängigen Kräfte zur Bestimmung des Inertialsystems führen würde. Mit anderen Worten: der absolute Raum, von dem das Trägheitsgesetz spricht, wird konstruierbar, ohne dass man dabei die Vorstellung zu opfern braucht, dass im letzten Grunde alle Bewegungen nur relative sind.

Im übrigen geht meine Absicht bei allen diesen Betrachtungen hauptsächlich darauf hinaus, zum mindesten wahrscheinlich zu machen, dass man, um zu einer befriedigenden Lösung der mit dem Trägheitsgesetze zusammenhängenden Fragen zu gelangen, Kräfte zwischen den Weltkörpern annehmen muss, die von ihren Geschwindigkeiten gegen das Inertialsystem abhängen. Und wenn man dies zugibt, so folgt daraus weiter die Aufgabe, nach möglichen Erfahrungen Umschau zu halten, die mit dem erwarteten allgemeinen Naturgesetze in solchem Zusammenhange stehen könnten, dass sich daraus das Wirkungsgesetz der von den Geschwindigkeiten abhängigen Kräfte erschliessen liesse. Diese Kräfte, die ich der Kürze halber weiterhin einfach „Geschwindigkeitskräfte“ nennen will, haben nichts mit den Gravitationskräften zu tun, die neben ihnen auftreten, und sie können namentlich und werden auch vermutlich ein ganz anderes Gesetz in Bezug auf die gegenseitige Entfernung befolgen, als diese.

Hier möchte ich eine Bemerkung einschalten, die diese Abhandlung in zwei ganz getrennte Abschnitte zu teilen bestimmt ist. Was ich bisher ausführte, glaube ich mit aller Bestimmtheit und Zuversicht vertreten zu können. Was aber weiterhin folgt, betrachte ich nur als einen Versuch, der sehr

leicht fehlschlagen kann; aber immerhin als einen Versuch, der wenigstens einige Aussicht auf Gelingen hat und der daher einmal gemacht werden muss.

Der aussichtsreichste Weg, die postulierten Geschwindigkeitskräfte nachzuweisen und ihr Wirkungsgesetz aufzudecken, scheint mir in der möglichst genauen Beobachtung von irdischen Bewegungserscheinungen zu bestehen, die mit grosser Geschwindigkeit erfolgen. Gerade so wie die Entdeckung der Gravitation mit der Beobachtnng der Fallbewegung ihren Anfang nahm, könnte auch hier der erste Schritt zur Lösung des Rätsels durch Erfahrungen über irdische Bewegungen und ihre richtige Deutung getan werden. Die unmittelbare Nachbarschaft der Erdmasse eröffnet einige Aussicht, genauer als es bei den feinsten astronomischen Beobachtungen möglich wäre, das Vorhandensein der an sich ja, wie die Erfahrung lehrt, unter gewöhnlichen Umständen sicher nur sehr geringfügigen Geschwindigkeitskräfte nachzuweisen.

Diese Betrachtung hat mich seinerzeit dazu geführt, die Kreiselversuche anzustellen, über die ich der Akademie vor jetzt bald einem Jahre berichtet habe.[1]) Ich erwartete damals, wie ich es ja auch ausdrücklich aussprach, ein mit der gewöhnlichen Theorie nicht übereinstimmendes Verhalten des Kreisels feststellen zu können, in der Hoffnung, die beobachtete Abweichung auf die gesuchten Geschwindigkeitskräfte schieben und diese dadurch einer experimentellen Erforschung zugänglich machen zu können. Nun waren ja gewisse Anzeichen einer Abweichung immerhin erkennbar; als vorsichtiger und gewissenhafter Experimentator durfte ich aber darauf kein Gewicht legen und ich musste, wie ich es auch tat, das Ergebnis des Versuches nach jener Richtung hin, die damit in erster Linie verfolgt werden sollte, als ein negatives erklären. Ich habe inzwischen noch einige weitere Versuche mit derselben Vorrichtung vorgenommen, allerdings nur wenige, da sie sehr mühsam und zeitraubend sind. Das Ergebnis hat mich aber

---

[1]) Sitzungsberichte 1904, S. 5.

nur in der Ansicht bestärken können, dass die mit dieser Versuchseinrichtung erreichbare Genauigkeit nicht genügt, um die Geschwindigkeitskräfte, falls sie überhaupt bestehen, damit nachweisen zu können.

Mehr Erfolg könnte man sich wohl von einer weiteren Fortsetzung der Fallversuche versprechen, deren bisherige Ergebnisse immerhin schon als recht ermutigend bezeichnet werden dürfen. Die gewöhnliche Theorie, die auf Geschwindigkeitskräfte keine Rücksicht nimmt, lässt auf der nördlichen Halbkugel neben einer östlichen Abweichung der Fallbewegung von der Lotlinie eine südliche von nur so ausserordentlich kleinem Betrage erwarten, dass ihr experimenteller Nachweis ganz ausgeschlossen wäre. Trotzdem haben aber die Beobachter immer wieder südliche Ablenkungen von messbarer Grösse gefunden, die von ganz anderer Grössenordnung sind (einige hundert Male und noch mehr grösser) als die von der Theorie erwarteten. Die neuesten Beobachtungen auf diesem Gebiete, die von dem als Entdecker des „Hall'schen Phänomens" und als Experimentator rühmlichst bekannten amerikanischen Physiker E. H. Hall herrühren,[1]) haben diese Erfahrung von neuem bestätigt. Freilich betrachtet Hall weitere Versuche im grösseren Massstabe (für grössere Fallhöhen) als erforderlich und er hat solche in Aussicht gestellt. Man wird sich davon sehr wertvolle Aufschlüsse versprechen dürfen. Vielleicht dient es auch dazu, die weitere Ausführung solcher Versuche zu fördern, wenn durch theoretische Ausführungen, wie ich sie hier vorgebracht habe, die Hoffnung auf ein positives Ergebnis gestärkt wird. Denn es gehört fürwahr kein geringer Mut dazu, mühselige und langwierige Versuche zu unternehmen, wenn die einstimmige Meinung aller Theoretiker dahin geht, dass sie unmöglich zu dem erwarteten Ergebnisse führen könnten. Diese Überlegung hat mich auch hauptsächlich dazu veranlasst, mit meinen Ansichten hervorzutreten, obschon

---

[1]) Edwin H. Hall, Physical Review, XVII, S. 179 und S. 245, 1903; ferner Proceedings of the American Acad. XXXIX, Nr. 15, S. 339, 1904.

ich mir sagen muss, dass sie bisher noch viel zu sehr einer ausreichenden experimentellen Unterlage entbehren, als dass sie Aussicht hätten, viel Beifall zu finden.

Nun komme ich zu der, wie ich zugeben muss, zweifelhaftesten Vermutung, die ich mir im Zusammenhange mit dem vorhergehenden gebildet habe und die eben mit der im Anfange erwähnten Beobachtung von Koch zusammenhängt. Man versteht ja ohne weiteres, dass ich auch Geschwindigkeitskräfte erwarten muss, die von der Bewegung der Erde zur Sonne herrühren. Die Sonne ist ein Fixstern wie andere und sie trägt auch zu ihrem Teile an der Festlegung des Inertialsystems bei oder mit anderen Worten, sie übt Geschwindigkeitskräfte aus, wenn wir die Bewegungen relativ zu einem Bezugssysteme nehmen, das ohne Rücksicht auf sie festgestellt ist. Dabei dürfen wir, wenn auch über die Abhängigkeit dieser Kräfte von der Entfernung noch nichts bekannt ist, doch immerhin als wahrscheinlich betrachten, dass der Einfluss eines benachbarten Körpers grösser ist, als der eines viel weiter entfernten. Nichts ist daher natürlicher, als die Annahme von Geschwindigkeitskräften dieser Art, die eine geringe periodische Änderung der Schwerkraft und zwar sowohl eine tägliche als eine jährliche Periode veranlassen könnten.

Eine Schwierigkeit und zwar eine sehr ernste und vielleicht unüberwindliche entsteht erst, wenn man annimmt, dass diese Geschwindigkeitskräfte von solcher Grösse sein könnten, dass sie auf der Erdoberfläche messbar wären und dass die Beobachtung von Koch in diesem Sinne verwertet werden könnte. Man stösst dann mit Notwendigkeit auf den Widerspruch der Astronomen, die trotz der grossen Genauigkeit, mit der sie die Bewegungserscheinungen im Sonnensysteme vorauszusagen vermögen, von dem Auftreten solcher Kräfte nichts bemerkt haben.

Dieser Einwurf ist so einleuchtend, dass man fast die Hoffnung aufgeben möchte, ihn zum Schweigen bringen zu können. Man könnte sich nun zwar auf den Standpunkt zurückziehen, dass, solange nicht auf anderem Wege etwas über das Wirkungs-

gesetz der Geschwindigkeitskräfte ausgemacht ist, immerhin eine entfernte Möglichkeit bestehe, dass sich dieser Widerspruch später aufklären könnte. Und man könnte in dieser Hoffnung zunächst ruhig abwarten, welche Folgerungen sich unter vorläufiger Ausserachtlassung dieses Widerspruchs aus solchen Beobachtungsergebnissen, wie sie von Koch gefunden sind, ergeben werden. Man würde dann, wenn z. B. nicht nur die ursprüngliche Beobachtung von Koch bestätigt, sondern auch eine auf Grund der hier vorgetragenen Ansichten erwartete tägliche Periode der Schwerkraftsschwankung wirklich gefunden werden sollte, darin trotz aller Einwendungen eine gewisse Bestätigung der vorgeschlagenen Theorie erblicken können.

Aber ich sehe ein, dass sich eine solche Position nicht halten liesse. Wenn es nicht jetzt schon gelingt, einigermassen glaubhaft zu machen, dass die von mir als möglich angesehene Deutung der Koch'schen Beobachtung nicht notwendig im Widerspruche mit den astronomischen Erfahrungen zu stehen braucht, wird meiner Deutung niemand Beachtung schenken, und es könnte dann die Gefahr entstehen, dass die Koch'sche Beobachtung dasselbe Schicksal hätte, wie bisher die südliche Ablenkung fallender Körper, d. h. dass man sich nicht ernstlich um sie kümmerte und von vornherein geneigt wäre, sie auf Beobachtungsfehler zurückzuführen, weil sie sich mit der anerkannten Theorie nicht verträgt.

Nur in dieser Absicht und keineswegs etwa, um die jetzt zu besprechenden einzelnen Möglichkeiten als irgendwie besonders wahrscheinlich hinzustellen, führe ich noch das Folgende an.

Man denke sich einen Planeten, der seinen Zentralkörper in Übereinstimmung mit den beiden ersten Kepler'schen Gesetzen umkreist. Das Gesetz der Geschwindigkeitskräfte sei von der Art, dass der Planet eine Anziehung von seiner Sonne erfährt, die proportional ist der zum Radiusvektor senkrechten Geschwindigkeits-Komponente und umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung. Man erkennt sofort, dass unter diesen Umständen gar keine Gravitationskraft neben der Geschwindigkeitskraft erforderlich wäre, um die durch die Beob-

achtung gegebene Planetenbewegung zu erklären. Die Astronomen eines Sonnensystems mit nur einem Planeten hätten in der Tat gar kein Mittel, um zu entscheiden, ob die Newton'sche Gravitationskraft oder die in der angegebenen Weise angenommene Geschwindigkeitskraft zu Recht bestehe, wenn sie sich nur auf die Bahnbeobachtung beschränken wollten. Dagegen würde der Unterschied sofort hervortreten, wenn sie die Beobachtungen auf ihrem Planeten heranzögen.

Auch nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze tritt bekanntlich eine tägliche Periode der Schwerkraftsschwankung hervor, die zu dem von der Sonne herrührenden Anteile an der Ebbe- und Flutbewegung Veranlassung gibt, die aber zu gering ist, um durch Pendelbeobachtungen nachgewiesen werden zu können. Würden aber die Astronomen jenes Sonnensystems den Versuch machen, das Newton'sche Gravitationsgesetz durch das erwähnte Gesetz der Geschwindigkeitskräfte zu ersetzen, so müssten sie eine weit grössere tägliche Periode erwarten, die bei denselben Verhältnissen wie zwischen unserer Erde und der Sonne etwa das 180 fache von der im anderen Falle zu erwartenden ausmachen würde.

Hierzu ist noch zu bemerken, dass das beliebig herausgegriffene Geschwindigkeitsgesetz nur eines von geradezu unendlich vielen ist, die alle dasselbe leisten würden, nämlich die Bewegung eines einzelnen Planeten um seine Sonne in Übereinstimmung mit den beiden ersten Kepler'schen Gesetzen zu erklären, ohne dass daneben eine Newton'sche Gravitationskraft mitzuwirken brauchte. Man brauchte nur die in die Richtung des Radiusvektors fallende Geschwindigkeits-Komponente, von der vorher vorausgesetzt war, dass sie einflusslos sei, nach irgend einem beliebigen Gesetze mitwirken zu lassen und könnte dann das Gesetz, nachdem die senkrecht dazu stehende Geschwindigkeits-Komponente auf die Anziehungskraft wirkt, so bestimmen, dass die verlangte Bewegung herauskommt. Man brauchte sich ferner auch nicht auf die erste Potenz der Geschwindigkeit zu beschränken, sondern könnte die zweite oder andere Potenzen heranziehen.

Wenn ein Sonnensystem mehr als einen Planeten hat, wird es freilich viel schwieriger, alle Planetenbahnen nur mit Hilfe von Geschwindigkeitskräften zu erklären, weil nun auch noch das dritte Kepler'sche Gesetz erfüllt sein muss. Man würde dann wohl schon, wenigstens soweit ich dies zu übersehen vermag, zu recht künstlichen Annahmen greifen müssen. Und auch selbst, wenn dies doch noch einfacher gelingen sollte, als mir jetzt scheint, würde immerhin fraglich bleiben, ob sich nachher auch die Störungen der Planetenbahnen, die Bewegungen der Monde u. s. f. damit erklären liessen.

Aber man vergesse nicht den Zweck dieser Betrachtung. Ich habe jetzt keineswegs die Absicht, das Newton'sche Gesetz durch ein Gesetz von Geschwindigkeitskräften zu ersetzen. Ich will nur wahrscheinlich machen, dass die Geschwindigkeitskräfte unter Umständen für sich genommen ganz ähnliche Wirkungen hervorbringen könnten, wie die Gravitationskräfte. Wenn man dies aber als möglich zugibt, folgt sofort, dass es, wenn dieser Fall eintritt, sehr schwer sein müsste, aus den astronomischen Beobachtungen den Anteil auszusondern, der einerseits auf die Gravitationskräfte, andererseits auf die Geschwindigkeitskräfte entfiele.

Auf Grund dieser Erwägung halte ich es für das Beste, sich durch die an sich freilich sehr gewichtigen Einwendungen der Astronomen nicht davon abhalten zu lassen, nach Erscheinungen zu suchen, die mit den Geschwindigkeitskräften in Zusammenhang gebracht werden könnten. Gelingt es, auf diesem ganz selbständigen Forschungswege ein Wirkungsgesetz für die Geschwindigkeitskräfte abzuleiten, dann bleibt nachher immer noch als bester Prüfstein für die Zulässigkeit des Ergebnisses ein genauer Vergleich mit den astronomischen Beobachtungen unter Berücksichtigung der dabei in Betracht zu ziehenden Fehlergrenzen übrig.

Ich würde ein solches Vorgehen natürlich nicht empfehlen, wenn ich nicht mit grosser Zuversicht darauf rechnete, dass Geschwindigkeitskräfte überhaupt bestehen, wenn ich auch dahingestellt sein lassen muss, ob sie von solcher Grösse sind,

dass sie sich bei den unserer Wahrnehmung zugänglichen Bewegungserscheinungen jemals feststellen lassen. Wenn man einen absoluten Raum zugeben will, fällt ja allerdings jeder Grund für die Annahme von Geschwindigkeitskräften fort. Aber in diesem Punkte wenigstens, dass ich einen absoluten Raum nicht anerkenne, befinde ich mich in Übereinstimmung mit der Mehrzahl der Naturforscher und darum hoffe ich auch, wenigstens für die im ersten Teile dieser Abhandlung gezogenen Schlüsse Beachtung bei ihnen zu finden.

Erdpyramiden und Büsserschnee als gleichartige Erosionsgebilde.

Von **Siegmund Günther.**

(*Eingelaufen 5. November.*)

Die Herausmodellierung von isoliert aufragenden Säulen und Obelisken aus einer leicht zerstörbaren Masse vollzieht sich nach ganz bestimmten Gesetzen — einerlei, welches der Stoff ist, aus welchem die Gebilde bestehen. In einer früher erschienenen Abhandlung des Verfassers ist bereits darauf hingewiesen worden,[1]) dass die Analogie zwischen den aus Schutt- oder Lehmablagerungen entstandenen Erdpyramiden und dem sogenannten Büsserschnee der Kordilleren eine sehr grosse ist. Wenn an jener Stelle bemerkt wurde, die neueren Untersuchungen, die Hauthal in Argentinien anstellte, schienen der Übereinstimmung beider Gattungen von Denudationsfiguren einigermassen den Boden zu entziehen, so bezog sich diese Andeutung nur auf eine kurze Ausführung des genannten Gelehrten.[2]) Später ist derselben jedoch eine umfassendere Arbeit aus seiner Feder nachgefolgt, auf die weiter unten einzugehen sein wird, und welche tatsächlich zugunsten des behaupteten Sachverhaltes ins Gewicht fällt. Die einschlägigen Beweismomente konnten damals nur gestreift werden, während nunmehr die prinzipielle Seite in den Vordergrund treten soll.

---

[1]) Günther, Glaziale Denudationsgebilde im mittleren Eisacktale, Sitzungsber. d. K. Akad. d. Wissensch., math.-phys. Kl., 32. Band, S. 471 ff.

[2]) Hauthal, Gletscherbildung aus der argentinischen Kordillere, Globus, 67. Band, S. 37 ff.

Wie notwendig dies ist, erhellt namentlich daraus, dass nicht nur die alte Lyell'sche Theorie noch vielfach in gemeinverständlichen Werken vorgetragen wird,[1]) sondern dass die richtige Auffassung des Wesens der viele Erdpfeiler krönenden Blöcke auch in fachwissenschaftlichen Arbeiten vermisst wird. Nach dieser Seite hin ist sehr belehrend die eingehende Beschreibung, welche Salmoiraghi[2]) den Schutt-

[1]) Eine zutreffende Würdigung der Rolle, welche die in die lockere Masse eingebetteten Steinfragmente zu spielen haben, ist, wie ausdrücklich betont sein möge, zuerst angebahnt worden von Ratzel (Über die Entstehung der Erdpyramiden, Jahresber. d. Geogr. Gesellsch. zu München, 1884, S. 77 ff.). Das Beweismaterial hat sodann ansehnlich vermehrt und kritisch gesichtet C. Kittler (Über die geographische Verbreitung und Natur der Erdpyramiden, Münch. Geogr. Studien, 3. Stück, München 1897). Neuerdings hat sich mit der Sache ebenfalls eingehend beschäftigt L. Sauer (Die Erdpyramiden in den Alpen und verwandte Bildungen, Stettin 1904). Zu den bereits bekannten Vorkommnissen fügt er mehrere neue hinzu, vorab aus dem Bereiche der Westalpen (Vorderrheintal, Montblancgebiet, Dauphiné) und von der Riviera. Beiläufig wird auch der später zu besprechenden Rügener Gebilde Erwähnung getan. Viele Sorgfalt wurde der Frage zugewandt, ob das Material auf die Entstehung und Erhaltung der einzelnen Säulen einen namhaften Einfluss ausübt; kohlensäurehaltigem Wasser scheint sich danach eine gewisse Bedeutung insofern zuschreiben zu lassen, als da, wo sich dasselbe findet, die Herausschälung der Erdpyramiden leichter erfolgt, als wenn kein Kohlensäuregehalt nachzuweisen ist. Auf eine früher wohl noch nie bemerkte Entstehung verwandter Gebilde machte Lorenzi aufmerksam (La collina di Buttrio nel Friuli, Udine 1904, S. 53). Im Innern einer Grotte im Talgehänge des Natisone erheben sich aus dem den Boden überdeckenden Höhlenlehm neben echten Stalagmiten kleine, ein paar Zentimeter hohe, regelmässige Kegel und Zylinder. Trockene Blätter auf dem Boden wirken als Deckkörper, und während ringsum das herabtropfende Wasser sich eingräbt, bleiben jene kleinen Aufragungen bestehen. Am nächsten scheint der Hinweis auf die Analogie der Gletschertische zu liegen.

[2]) Salmoiraghi, Le piramidi di erosione e i terreni glaciali di Zone, Bollettino della Società Geologica Italiana, 4. Band, S. 117 ff. Die „Muschel von Zone", welche durch einen grossen Giessbach entwässert wird, ist angefüllt mit glazialen Residuen, welche durch zahlreiche Bäche durchfurcht wurden. Mit welchem Rechte die Entstehung der Erdpyramiden als „Umkehrung des Vorganges, durch welchen sich die Riesen-

kegeln in der Moränenlandschaft des Brescianergebietes, östlich vom Iseo-See, zuteil werden lässt. Seine Abbildungen zeigen, dass Blockpfeiler mit blossen Zacken — südtiroler und nordtiroler Typus nach der in Anregung gebrachten Nomenklatur[1]) — bunt miteinander wechseln, aber der genannte Autor hält dafür, die zackigen Protuberanzen hätten ebenfalls dereinst einen solchen Kopfschmuck getragen und seien desselben beraubt („decapitati") worden. Das wird wohl ab und zu der Fall sein, aber in der Hauptsache ist daran festzuhalten, dass die aufgelagerten Felsblöcke eine mehr zufällige Beigabe sind und zwar konservierend wirken, auf den Bildungsprozess selbst dagegen nur einen ganz sekundären Einfluss üben. Auf die Überschätzung dieses Einflusses wird gleich nachher, und zwar unter einem ganz anderen Gesichtspunkte, zurückzukommen sein.

Als eine wichtige Erkenntnis wurde ferner die hervorgehoben, dass sich Erdpyramiden erst dann in embryonalen Formen zu zeigen beginnen, wenn vorher eine Zerlegung der Ablagerung, in welcher sich die Tiefenerosion betätigen soll, eingeleitet worden war. Erst müssen gewisse Kämme, Grate, Kulissen vorhanden sein, ehe die Detailarbeit, welche die schlanken Formen schafft, kräftiger einzusetzen vermag. Eine hierauf bezügliche Wahrnehmung auf graubündtischem Terrain[2]) hat ihrerzeit Erwähnung gefunden, allein sie ist nicht

---

töpfe (Auswaschungskessel) am Fusse eines Wasserfalles bilden", hingestellt wird, ist nicht klar, denn beide Male hat man es doch mit unmittelbaren Wirkungen der in die Tiefe arbeitenden Zerstörung zu tun, die das Wasser ausübt. Die Begleitumstände sind freilich sehr verschieden, aber von Gegensätzlichkeit ist keine Rede. Vgl. für die Erdpfeiler von Cislano auch die treffliche Abbildung Baltzers (Geologie der Umgebung des Iseo-Sees, Geolog. u. Paläontolog. Abhandlungen, herausgegeben von Koken, (2) 5. Band, 2. Heft, Tafel IV).

[1]) Günther, a. a. O., S. 473 ff.

[2]) A. Ludwig, Drei Wochen im Klubgebiet, Jahrbuch des Schweizer Alpenklubs, 27. Jahrgang, S. 16 ff. Auch in der allerdings erst 1904 veröffentlichten, oben angeführten Abhandlung von Sauer wird (S. 11) eine kurze Andeutung in diesem Sinne gemacht. Gerade aus den französischen

die einzige, sondern es ist Pflicht, darauf aufmerksam zu machen, dass ein piemontesischer Geologe, wenn auch nur am besonderen Falle, das Bildungsgesetz erkannt und zutreffend interpretiert hat.[1]) Die fluvioglazialen Sande Piemonts, aus denen die Erdpfeiler herauspräpariert wurden, stellen sich als ein ausserordentlich geeignetes Substrat für die meteorische Abtragung dar; allenthalben ziehen sich tiefe Erosionsfurchen mit steilen Böschungen durch die wenig widerstandsfähigen Hügel hindurch, und auf den Kämmen sitzen die nicht selten äusserst sonderbar gestalteten Auswüchse.[2]) Nirgendwo ist auf ihnen der angeblich charakteristische Schutzkörper („masso protettore") zu erblicken. Als erste Vorbedingung wird die vorhergehende Herausbildung der schmalen Kulissen

---

Alpen lassen sich eben ausgezeichnet schöne Belege für die Verzahnung der Gratwände und ihre Steigerung, die Entwicklung der Erdpyramiden, herholen. In Fig. 1 sehen wir solche Gebilde aus dem — zum Gebiete der Durance gehörigen — den Alpinisten wohl bekannten Val Jauria vor uns. Der Verf. verdankt das gelungene Photogramm der Güte des Herrn Professors Deecke.

[1]) Capeder, Sui fenomeni di erosione nei dintorni di Bra e di Castellamonte (Piemonte), Boll. d. Soc. Geol. Ital., 18. Band, S. 309 ff. Die Gegend, welche hauptsächlich ins Auge gefasst ist, hat zuerst Sacco (I colli Braidesi, Annali della Reale Accademia d' Agricoltura di Torino, 12. April 1888) einer geologischen Analyse unterzogen. Bra liegt einige 30 km südlich, Castellamonte einige 20 km nördlich von der piemontesischen Hauptstadt. Auf die sehr merkwürdigen Formationen im Vorlande der Cottischen Alpen war von uns bei jener früheren Gelegenheit bereits nach De Marchi (Trattato di geografia fisica, Mailand 1901, S. 242 ff.) bezug genommen worden. Anscheinend stammen die zerstörten Geschiebe bei Bra von der Grundmoräne des grossen Pogletschers, wogegen nächst Castellamonte, einem Städtchen am Rande des berühmten Moränen-Amphitheaters von Ivrea, fluviatile Schotter das Material bilden.

[2]) Als ein Unikum darf vielleicht eine solche Erdpyramide angesehen werden, die in Wirklichkeit diesen Namen sehr zu Unrecht trägt. Der aufragende Körper weist nämlich gar keine Verjüngung auf, sondern strebt ganz parallelepipedisch empor. Es wäre von Interesse, zu ermitteln, wie es kommen kann, dass, umgeben von lauter ganz anders gefalteten Figuren, ein solcher wahrer „Turm" sich bilden konnte. Wahrscheinlich ist dies eine der wenigen Möglichkeiten stärkerer Mitwirkung der stofflichen Faktoren.

bezeichnet, und dass dies mit vollem Rechte geschieht, kann nicht bezweifelt werden. Das Wort „lamina d'erosione" soll hier, unter Anwendung eines bekannten Ausdruckes der alpinen Terminologie, mit Erosionssporn wiedergegeben werden.

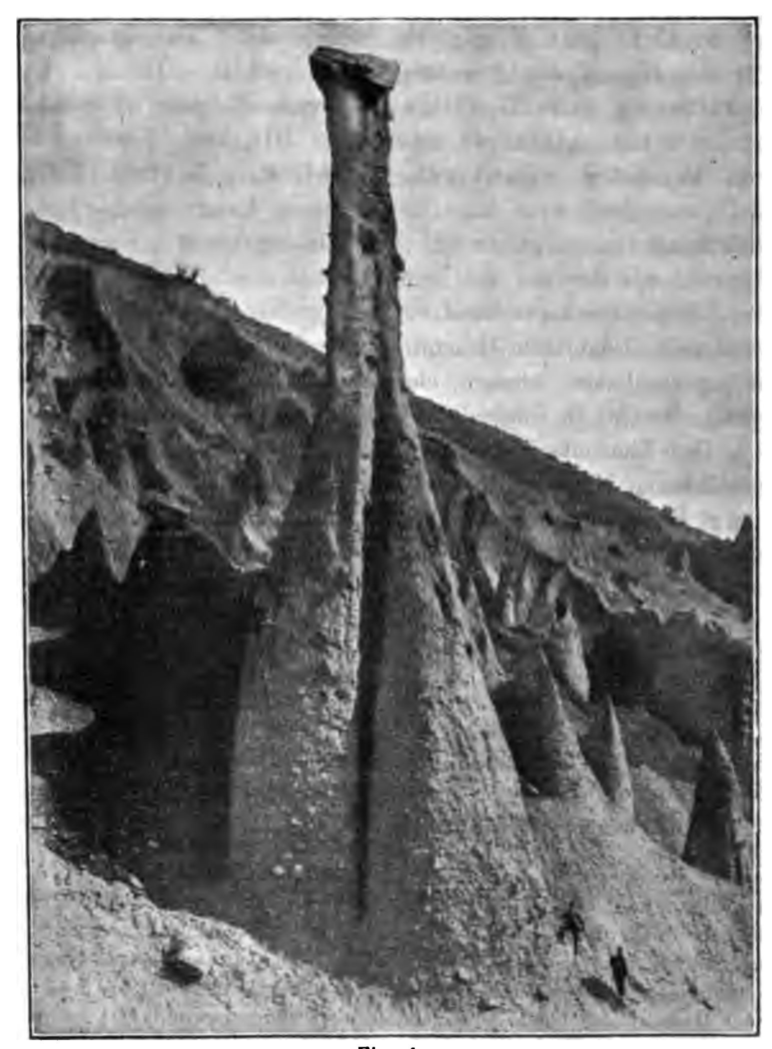


Fig. 1.

Die vom Verfasser als wesentlich bezeichnete neue Auffassung des Zustandekommens der Erdpyramiden ist demnach von Capeder bereits richtig formuliert worden. Dagegen geht derselbe wohl zu weit, wenn er die Beschaffenheit der Materie, welche von den Tagewassern erodiert wird, und die ja auch gewiss nicht ganz gleichgültig ist, geradezu als massgebend für den Typus der Erosionsgebilde erachtet. Ob die der Zerstörung unterliegende Masse homogen oder ungleichartig, steinfrei oder von Blöcken durchsetzt ist, kommt nur ganz nebensächlich in Betracht; dies stellt man fest, wenn man eine grössere Anzahl solcher Vorkommnisse in vergleichende Betrachtung zieht. Man wird folglich, wie das von uns bereits früher geschehen ist, Capeders Ansicht entsprechend zu verallgemeinern haben, und es wird sich alsdann die Gesamtheit der Ereignisse, welche sich abgespielt haben müssen, ehe eine Erdpyramidenkolonie entstanden ist, in folgender Weise kennzeichnen lassen.

Die Elemente, deren Walten die Oberfläche einer leicht zerstörbaren Masse ausgesetzt ist, bringen zuerst eine geringfügige Rillenbildung zuwege, und nachdem einmal dem Regenwasser so bestimmte Wege angewiesen sind,[1]) sucht sich der-

---

[1]) Klar ist, dass auch andere Kräfte gelegentlich ihre Unterstützung leihen hönnen. Finden sich z. B. Erdpfeiler in sehr regenarmen Regionen, so liegt es nahe, statt der Korrasion die Deflation oder Winderosion als das Agens anzunehmen, welches Lücken in die Mauer gemacht hat. Im Sommer 1904, während dessen es in fraglicher Gegend fast gar nicht regnete, fand Deecke die elegantesten Miniaturpyramiden in einer Schottergrube bei Anklam (Vorpommern); jede hatte ungefähr doppelte Fingerlänge und trug oben ein Steinchen. Alle waren aus der nämlichen, an der Peripherie 1 Fuss breiten und nach innen sich immer verschmälernden Kulisse gewissermassen aufgesprosst. Da erst im Frühling die Abstechung der Wände erfolgt war, so blieb nur an Winderosion zu denken übrig, die sich in den Ostseeländern ab und zu ganz kräftig manifestiert (vgl. z. B. R. Credner, Die Moënfahrt der Greifswalder Geographischen Gesellschaft am 4.–6. Juni 1895, Greifswald 1895, S. 6 ff.). Nach Deeckes an einem Tage lebhafterer Windgeschwindigkeit gewonnener Autopsie ist die bewegte Luft wohl imstande, wenn erst die krönenden Steinchen blossgelegt sind, den zwischenliegenden Sand herauszufegen.

selbe zu immer tieferen Horizonten durchzuarbeiten. Das erste Ergebnis dieser nie rastenden und immer im gleichen Sinne ausgeführten Angriffe wird somit die Freilegung einer Anzahl von Erosionsspornen sein, die durch schmale, sich unausgesetzt vertiefende und verbreiternde Einschnitte voneinander getrennt sind. Dass sich schon primär während dieser Periode auch echte Pyramiden bilden, ist wohl nicht ausgeschlossen, jedenfalls aber nicht die Regel. Erst jetzt nämlich, wenn die Zerlegung in Grate ihren vorläufigen Abschluss gefunden hat, setzt als ein sekundärer Akt, indem jede einzelne Kulisse nun ihrerseits wieder dem Auflösungsprozesse anheimfällt, die Auszackung der schmalen oberen Randfläche ein. Dieselbe ist niemals absolut glatt, wird vielmehr unter allen Umständen eine gewisse Rauhigkeit aufweisen, und jede kleinste Unregelmässigkeit setzt dem Ablaufe des meteorischen Wassers ein gewisses Hindernis entgegen, so dass ersteres nunmehr seine lösende und gleichzeitig denudierende Tätigkeit zu entfalten vermag. Kleine Effekte summieren sich; eine winzige Erhöhung wird allmählich zur selbständigen Protuberanz. Nach einiger Zeit erscheint der Erosionssporn, der von Hause aus eine Mauer darstellte, oben gezahnt und mannigfaltig differenziert, und wenn die Tiefenerosion nahezu bis zur Talsohle vorgedrungen ist, sieht man an Stelle der schroffen Wand von ehemals eine Anzahl ebenso schroff aufstrebender Erdpyramiden. Fig. 2, der früher beschriebenen Kolonie des Eisacktales entnommen, lässt diese Etappen des Erosionswerkes deutlicher als Worte erkennen; vor allem sieht man auch, dass jenes nicht etwa halt macht, wenn eine ganz neue Schichtfolge angeschnitten werden muss. Ebenso ist dieses Bild als Beleg gegen den zweiten Teil von Capeders Anschauung zu verwerten. Die talabwärts schon grossenteils abradierten groben Schotter, die aus einer Fülle von Steinbrocken verschiedener Provenienz bestehen, werden genau ebenso von der Zerstörung beansprucht, wie die unter ihnen liegenden, nahezu homogenen Verwitterungslager.

Ob also Felsblöcke eingeschlossen sind oder nicht,

tut sehr wenig zur Sache. Zuzugeben wird sein, dass gekrönte Pyramiden etwas längeren Bestand als ungekrönte haben werden, und dass, wie Capeder hervorhebt, die Gestalt des Deckkörpers auch bis zu einem gewissen Grade diejenige der darunter befindlichen Säule, soweit der schützende Bereich des ersteren sich äussern kann, mit bestimmen wird. Unter allen Umständen gilt der Erfahrungssatz: Ohne vorgängige Spornbildung kommt es nicht zur Herausbildung einer grösseren Ansammlung von Erdpyramiden.



Fig. 2.

Die Existenz der ursprünglichen Kulisse ist fast immer noch erkennbar, selbst wenn sie auf einen schwachen Rest zusammengeschmolzen ist.[1]) Sollte sie aber auch ganz geschwunden

[1]) Jene beiden wunderbar schönen Erdpyramiden aus dem Himmelsgebirge, welche bei den eingeborenen Kirgisen als „heiliger Stein" verehrt werden, zeigen dieses Verhältnis mit wünschenswertester Deutlichkeit an (M. Friederichsen, Forschungsreisen in den zentralen Tiënschan und Dsungarischen Ala-tau (Russisch-Zentralasien) im Sommer 1902,

sein, so dass also die Erdsäulen ganz vereinzelt auf einem Boden von ganz heterogener Zusammensetzung sich erheben, so würde an ihr einstiges Vorhandensein doch immer noch die

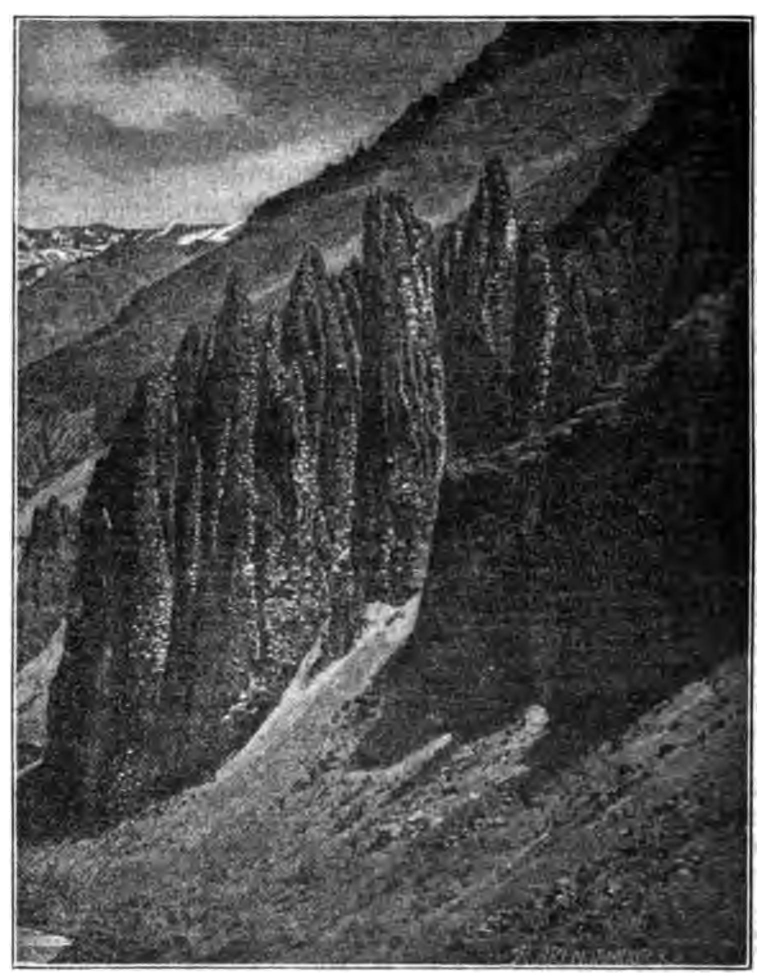


Fig. 3.

Hamburg 1904, Tafel 41). Mächtige Klötze schützen die beiden gedrungenen Träger, die von der Denudation aus den Schuttmassen der Hanhai-Bildungen an der rechten Talseite des Flusses Chorgos heraus-

lineare Anordnung der Fusspunkte erinnern.[1]) Eine Erdpyramide verdeckt dem Auge des Beschauers regelmässig eine Anzahl ihresgleichen, wenn jenes in die Medianebene des verschwundenen Erosionsspornes gebracht ist.

Auffallend wenig ist in der Fachliteratur nach dieser Seite hin die Rede von einer Erdstelle, welche hervorragend dazu geeignet ist, Studien über das Werden und Sein der verschiedenen Modalitäten anzustellen, unter welchen sich der Erosionsakt zu betätigen vermag. Dies ist der Steilabfall der Küste von Jasmund auf Rügen. Die grossartigen, von Feuersteinbändern durchzogenen Kreidefelsen dieser Küste, die ihre höchste Entfaltung im „Königsstuhl" auf Stubbenkamer finden, mussten selbstverständlich von Naturforschern und Naturfreunden gleichmässig beobachtet werden, aber neben ihnen hat man weniger Gewicht gelegt auf die Formenschönheit der über der Kreide lagernden Diluvialgebilde, und sogar in wissenschaftlichen Werken wird hievon nur kurz gehandelt. Es

---

geschält wurden. Die Wand, die sich zuvor hier erhob, ist zwar weggefegt, aber aus der Basis der beiden Pyramiden lässt sich die ursprüngliche Lage und Streichungsrichtung des Spornes auch jetzt noch unschwer rekonstruieren. Das hervorragendste Vorkommen von Erdpyramiden im Himalaya dagegen, dasjenige von Spiti, lässt, obwohl die Konglomeratmasse Steine genug enthält, Decksteine bei den etwas plumpen Erdpyramiden gänzlich vermissen (s. Fig. 3). Sehr klar tritt (orographisch) links von der Pyramidenmauer eine andere noch kompakte Wand hervor, die der Krenelierung erst entgegenharrt.

[1]) Auf seiner Forschungsreise durch den südamerikanischen Staat Bolivia hat Pompeckj neuerdings, wie früher auch Mosbach (Streifzüge in den bolivianischen Anden, Globus, 72. Band, S. 27), charakteristische Erdbebenkolonien angetroffen, und zwar in Fluvioglazialschottern, die mindestens altdiluvial waren, in tertiären sandigen Tonen, in sehr alten, mindestens mesozoischen Sandsteinkonglomeraten und im Löss. Am Alto de la Paz erheben sich Säulen bis zu 150 m; anderwärts sind es geriefte Kegel, wie auch solche in Peru bei Lima gefunden wurden. Jener „Wald" schlanker, bis 80 m ansteigender Säulchen, dessen der genannte Geologe nächst der Hauptstadt La Paz ansichtig wurde, liess deutlich erkennen, dass dieselben, deren Grundfläche zumeist eine ovale ist, früher Bestandteile von dünnen Mauern und Graten alter Schotterterrassen gewesen waren. Decksteine fehlten.

ist deshalb wohl am Platze, gerade diesen Wissower Klinten [1]) eine besondere Berücksichtigung angedeihen zu lassen.

Abgesehen von den Küsten besteht die Oberfläche der Insel Rügen grösstenteils aus diluvialen, der grossen nordischen Übereisung entstammenden Ablagerungen. Man kann ein oberes und ein unteres Diluvium unterscheiden, und der Grenzfläche zwischen beiden Schichtfolgen entspricht allem Vermuten nach eine Interglazialzeit. Diese hinwiederum ist gekennzeichnet durch ziemlich starke tektonische Veränderungen, welche zwar auf das ältere, nicht aber auch auf das jüngere Diluvium sich erstreckt haben, denn ersteres liegt konkordant, letzteres hingegen diskordant auf der Kreide.[2]) Durch diese Lagebeziehungen, die u. a. auch zur Folge haben, dass man vom Meere oder Strande aus den steil landeinwärts einfallenden unteren Geschiebemergel nicht zu Gesichte bekommt, wird der Erosionstätigkeit der abfliessenden Tagewasser ihr Weg vorgezeichnet.[3]) Die Erosionsrinnen erweitern sich

---

[1]) Auf die aus verschiedenen Sprachkreisen sich rekrutierende Küstenbezeichnung der Bewohner Rügens geht E. Boll (Die Insel Rügen, Reiseerinnerungen, Schwerin s. a. S., 75 ff.) näher ein. Die Steilküste zwischen Sassnitz und Stubbenkamer ist in vier „Huuks" (niederdeutsch) gegliedert. Dem dritten Huuk gehören an die „Wissower Klinten"; unter „Klint" (nordgermanisch) versteht man einen steilen, schroffen Abhang überhaupt. Eine Ortschaft Wissow gibt es nicht, sondern es ist hier aus der Zeit der wendischen Besiedelung die slavische Wurzel „wisoki" = hoch (Vyšehrad bei Prag und in Ungarn, soviel wie „Hochschloss") erhalten geblieben.

[2]) Die stratigraphischen und morphologischen Angaben stützen sich wesentlich auf R. Credners schöne Monographie (Rügen, eine Inselstudie, Stuttgart 1893). Den allgemeinen Darlegungen (S. 36 ff.) folgen später (S. 103 ff.) diejenigen, welche die Küste von Jasmund und die aus der Eigenart der dort bemerkbaren Schichtung folgende Formenmannigfaltigkeit betreffen.

[3]) Schon vor Credner hat der verdiente baltische Naturforscher G. A. Boll (Geognosie der deutschen Ostseeländer zwischen Eider und Oder, Neubrandenburg 1846, S. 54 ff.) die Bedingungen, welche die Küstenbildung des am weitesten gegen Nordosten vorspringenden Inselteiles beeinflusst haben, ganz richtig erkannt. Er tut dar, dass hinter den wenig mächtigen Kreideschollen sich überall in der aus Gerölle und Lehm sich zusammensetzenden Hauptmasse der Insel „ein halbtrichter-

kesselartig, und die Kreideschollen werden langsam, aber stetig von dem Zusammenhange mit ihrem Hinterlande losgelöst. „Von allen Seiten den Einflüssen der Atmosphärilien ausgesetzt, verfallen dieselben nunmehr in erhöhtem Masse der Verwitterung und Abtragung; die ursprünglich geschlossen zusammenhängende periphere Kreidemauer löst sich durch Erosion und Denudation in eine Reihe isolierter, frei aufstrebender Felspfeiler, Pyramiden, Klinte und Grate auf.“ Obwohl diese Charakteristik des Vorganges an sich ganz zutreffend ist, öffnet sie doch für den Fernerstehenden, mit den örtlichen Verhältnissen weniger Bekannten leicht die Türe zu einem Missverständnis. Man kann nämlich auf den Gedanken kommen, die Pyramiden u. s. w. gehörten selbst der Kreideformation an. Es soll auch nicht in Abrede gestellt werden, dass einzelne kretazische Felsen selbst hart mitgenommen und zerstört sind,[2])

---

fömiger Kessel“ bilde. Hier sammle sich das Wasser und nehme die dünne vorliegende Wand anstehenden Gesteines in Angriff. „Am Grunde des Kessels steht nun diese Kreidewand, zuweilen kaum ein Klafter dick, ganz frei und gewöhnlich in mehrere Stücke zerrissen da und bildet die abenteuerlichen Türme und Pyramiden, welche Stubbenkamer so wunderlich ausschmücken.“

[2]) Anomale Formen der Kreideklinte können sogar ohne namhafte Unterstützung erosiver Tätigkeit in die Erscheinung treten, wie dies — gleichfalls nach Credner — Fig. 4 ersichtlich macht. Die Fläche

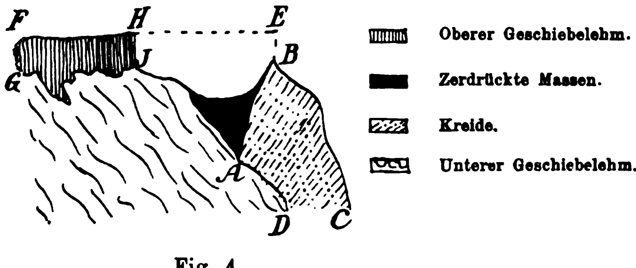


Fig. 4.

AB der abgerutschten Kreidescholle *ABCD* war ursprünglich horizontal; letztere sank später infolge ungenügender Pilotierung ein und erlitt dabei eine Drehung. Von der überlagernden Lehmschicht *BEFG*



Fig. 5 a.



Fig. 5 b.

aber die eigentlich pittoresken Formen gehören doch nur dem diluvialen Geschiebelehm an. In Fig. 5 sehen wir ein paar ausgezeichnete Klintpartien vor uns, darunter das im Volksmunde diesen Namen führende „Vogelnest". Dieses ist dargestellt in Fig. 5 a; eine Probe typischer Turmzerstücklungen des Erosionsspornes bietet Fig. 5 b. Am ersten Orte haben einige Bäume, wie man dies ja auch in Tirol ab und zu beobachten kann, die Rolle des Decksteines übernommen, so dass ein ungewöhnlich schöner Zacken unmittelbar am Vorsprunge gegen die See hin erhalten blieb.

Im Anschlusse an Credner soll Fig. 6 die Entstehung eben dieses Musterbeispieles von Erosionsfigur erläutern; die Signaturen sind die nämlichen, wie bei Fig. 4. Anfänglich lag über dem aus seiner ursprünglichen Lage geratenen unteren Mergel in völlig ungestörter Lage, mit parallelen Grenzflächen AB und CD der obere Mergel, dessen lockere Fügung dem Regenwasser leichten Eintritt verstattete. Der prismatische Körper,

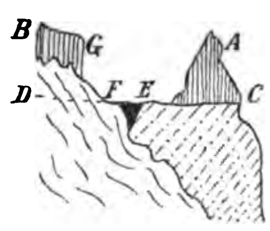


Fig. 6.

wurde der vordere Teil $BEHJ$ weggebeizt, und so ragt jetzt bei B ein Kreidezinken empor, der allerdings nur dann, wenn man ihn von der Seite sieht, sich als solcher darstellt und tatsächlich als Randstück eines kompakten Gesteinskörpers anzusehen ist. Selbstredend aber unterliegt auch die ziemlich weiche Kreide, wenn sie nicht mehr durch die Diluvialgeschiebe einigen Schutz erhält, der Auflösung in Kämme und Auszackungen. Neben den eigentlichen Atmosphärilien spielt der Spaltenfrost eine gewichtige Rolle (Deecke); das in die Ritzen eingedrungene Regenwasser dehnt sich, wenn seine Temperatur von 4° gegen 0° sinkt, gewaltig aus und sprengt selbst festen Fels auseinander. Zumal im Vorfrühling kann man Studien über diesen Zerstörungsmodus machen. Dass in ganz ähnlicher Weise auch hartes Gestein in bizarre Protuberanzen aufgelöst werden kann, beweisen bekannte Vorkommnisse der Sächsischen Schweiz, des Fichtelgebirges und, vielleicht besonders drastisch, die im friulanischen Dialekte „Lis Vinadiis" genannten Felszacken bei Rivo (G. Marinelli — G. Gortani — L. Gortani — Lazzarini — O. Marinelli, Guida della Carnia, Udine 1895, S. 56).

dessen vertikaler Querschnitt durch $AEFG$ angedeutet ist, wurde weggeschwemmt; grosse Wahrscheinlichkeit besteht dafür, dass auch er zuvor in eine Reihe von Protuberanzen aufgelöst war, und dass von diesen CEA die letzte ist. Einstmals wird auch für sie der ihr von der Gipfelvegetation gewährte Schutz sich als nicht mehr zureichend erweisen, und schliesslich wird sie fallen und das Schicksal ihrer Genossinnen teilen. Vorläufig jedoch stellt sie uns, während anderswo als auf Jasmund die grosse Insel dazu keine Gelegenheit bietet,[1]) den erdgeschichtlichen Prozess, dessen Stadien wir hier festzulegen unternommen haben, mustergültig klar vor Augen. Wenn wir nochmals kurz die den Spezialfällen entnommenen und mit den allgemeinen Gesetzen der physikalischen Geographie in bestem Einklange stehenden Erkenntnisse zusammenfassen, können wir den Satz als bewiesen betrachten: Regenrinnen zerlegen lockere Massen in Kämme und Grate, und jeder einzelne so entstandene Erosionssporn wird wiederum durch die Tiefenerosion des meteorischen Wassers in ein Aggregat von Erdpyramiden zerfällt, welche sich aus gemeinsamer Basis

---

[1]) Insofern es auch sonst auf Rügen und den benachbarten Inseln an jäh abfallenden Hängen nicht fehlt, möchte es eine gewisse Verwunderung erregen, dass ähnliche Landschaftsbilder, wie an den Wissower Klinten, nicht häufiger dem Auge begegnen. Namentlich die westlich sich lange hinziehende Insel Hiddensöe käme dabei in Betracht, und auf ihr wiederum der „Dornbusch", das nordwestliche Vorgebirge, dessen dem Meere zugekehrte Seite unter einem sehr steilen Winkel sich absenkt und noch dazu ganz aus diluvialen Mergeln und Geröllen besteht. Die in einer Schrift von A. Günther (Die Dislokationen auf Hiddensöe, Rostock 1891) enthaltenen Abbildungen lassen uns indessen leicht einsehen, dass Erdpyramiden entweder ganz fehlen oder (S. 31, Tafel VI) doch nur zu schwächlicher Entwicklung gelangt sind. Die Ursache dieser mangelhaften Ausbildung wird sicherlich in den zahlreichen Abstürzen zu suchen sein, denen die am meisten dem Wellenschlage ausgesetzte Küste durch die stets fortschreitenden Unterwaschungen ausgesetzt sind. Solch energischen Kraftleistungen gegenüber ist die im stillen arbeitende Aktion der denudierenden Agentien nicht recht imstande, sich geltend zu machen.

erheben. Bei der — an sich natürlich langsamer vor sich gehenden — Herausmodellierung von Pyramiden aus festem Gesteine gilt ein Gleiches, wie man aus den Jasmunder Turmfelsen und ihrer Krenelierung ersehen kann.

Mit Ausschliesslichkeit wurden bisher nur Gerölle-, Geschiebe-, Sand- und Lehmmassen der Erörterung unterzogen, wie sie entweder durch den Transport des fliessenden Wassers und der Gletscher an sekundärer oder durch Verwitterung und Zersetzung an primärer Lagerstätte gebildet worden sind. Körper von loser Struktur gibt es aber auch sonst, und insbesondere wird auf das festgewordene Wasser unser Augenmerk zu richten sein. Der gewöhnliche Schnee zwar wird, weil in ihm Auflösungsprozesse jeder Art viel zu rasch fortschreiten, kaum ernstlich in Frage kommen; es wäre an sich ja gar nicht undenkbar, dass auch eine Schneeanhäufung sich in Türme und Zacken auflösen könnte, aber jedenfalls wären diese viel zu kurzlebig, um an ihnen Gesetzmässigkeiten zu erforschen. Das einzige Vorkommnis, welches in dieser Hinsicht eine Analogie darbieten zu können scheint,[1]) ist zwar

[1]) Derselben gedenkt der Lawinenforscher Sprecher (Grundlawinenstudien, Jahrbuch des Schweizer Alpenklubs, 35. Jahrgang, S. 279). Der am Fussende einer habituellen Lawinenstrasse, der „Vidameidaleue", aufgeschüttelte Staukegel schmilzt selbst im Sommer nicht gänzlich ab. Während dieser Jahreszeit stürzt ein kleiner, aber ziemlich konstanter Wasserfall auf den Schneehügel herab und höhlt darin ein Loch aus, um dadurch seinen Weg ins Tal zu nehmen. Jede Lawine ist erfüllt mit kleinen Fremdkörpern, und wo ein solcher eingebettet ist, wird das auftreffende Wasser abgelenkt. „So entstehen um den Trichter herum zahlreiche Schneepfeiler, deren Querschnitt durch die Form der Schutzdecke bestimmt ist. Bei der fortschreitenden Erweiterung des Trichters durch Einwirkung der Wärme und des Wassers verschwinden diese zierlichen, oft 1 m hohen Türmchen wieder." Die Ähnlichkeit zwischen diesen Schnee- und den Erdpyramiden liegt nach der bloss morphographischen, wie auch nach der kausalen, morphologischen Seite auf der Hand. Trotzdem ist für die Frage, welche Bildungsgesetze den Prozess regeln, nur wenig zu lernen, denn erstens ist die mechanische Kraftleistung des kontinuierlichen Wasserstrahles eine unverhältnismässig stärkere, als sie sonst irgendwo bemerkbar wird, und fernerhin ist Schnee ein so leicht zer-

durchaus interessant, vermittelt aber gerade keine tieferen Einsichten. Ungleich bedeutsamer ist das Phänomen, welches die Argentinier unter dem Namen „Nieve penitentes“ kennen, und welches oben bereits kurz berührt wurde. Die erste positive Nachricht über diese bizarren Figuren erhielt die gelehrte Welt von Darwin,[1]) und es scheint nicht, dass von irgend jemand in früherer Zeit auf dieselben aufmerksam gemacht worden wäre. Wenn Darwin selbst, der übrigens in der Erklärung der Erscheinung nicht glücklich war, auf gewisse Aussprüche von Scoresby und Jackson hinweist, so scheint er dieselbe in einem viel zu engen Sinne zu interpretieren. Einen zuverlässigen Bericht verdankte die Folgezeit den ausgedehnten Wanderungen Güssfeldts,[2]) und nicht viel später trat Brackebusch mit einer monographischen Schilderung[3]) des Büsserschnees hervor, welche fürs erste als normativ hinzunehmen war. Gegen die Meinung, welche sich dieser Geologe von der Sache gebildet hatte, wandte sich nun aber neuerdings Hauthal,[4]) dessen einschlägige Abhandlung jedenfalls auch deshalb besondere Beachtung erheischt, weil ihr Autor über ein ungewöhnlich reiches Beobachtungsmaterial gebieten kann.[5]) Die

---

störbarer Stoff, dass Dauerbildungen in ihm kaum möglich sind. Man muss sich also damit begnügen, die jedenfalls merkwürdige Wahrnehmung Sprechers, welcher bei genauerer Prüfung alter Lawinenreste gewiss noch manch andere zur Seite gestellt werden könnte, als solche zu registrieren, aber für das uns hier beschäftigende, immerhin verwickelte Problem ist aus der verhältnismässig einfachen Entstehung der ganz regellos eine Öffnung umstehenden Schneefiguren nicht viel zu lernen.

[1]) Ch. Darwin, Reise eines Naturforschers um die Welt, deutsch von Carus, Stuttgart 1893, S. 353.

[2]) Güssfeldt, Reise in den zentralen chileno-argentinischen Anden, Gaea, 20. Band, S. 582 ff.

[3]) Brackebusch, Die Penitentesfelder der argentinischen Kordilleren, Globus, 63. Band, S. 1 ff.

[4]) Hauthal, Büsserschnee (Nieve penitentes), Zeitschrift des deutschen und österreichischen Alpenvereins, 34. Band, S. 114 ff.

[5]) Auch der berühmte Hochtourist Conway, der die südamerikanische Gebirgswelt vielleicht am genauesten kennt, hat sich nach Mitteilungen von Stange und Hauthal zugunsten der Auffassung der letzteren ausgesprochen.

Kontroverse, ob man, wie von uns früher vorgeschlagen worden war,[1]) einen eigenen argentinischen — nach Brackebusch andinen — Gletschertypus zu unterscheiden habe, bleibt hier ausser dem Spiele; auch die weitere Streitfrage, inwieweit zwischen dem Büsserschnee und den Karrenbildungen der Gletscher prinzipielle Übereinstimmung bestehe, hat nur geringe Bedeutung, obwohl wir nicht ganz an ihr vorübergehen dürfen. Die hier zu erledigende Frage lässt sich dahin präzisieren: Ist die Art der Herausbildung der Penitentesfiguren und der Erdpyramiden aus der kompakten Grundmasse in der Hauptsache die gleiche? Um hierüber Klarheit zu erhalten, bedarf es vor allem des Eingehens auf die äussere Ähnlichkeit beider Gebildetypen, die sich gleich von Anfang an als eine sehr grosse herausstellt.

Hauthal selbst knüpft an die Beschreibung Habels[2]) als

---

[1]) Günther, Handbuch der Geophysik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 728. Seitdem es zur Gewissheit erhoben ist, dass Ansammlungen von Nieve penitentes sogar auf horizontalem Untergrunde stehen und jeder Bewegung bar sind, muss ihre Identifizierung mit wirklichen Gletschern aufgegeben werden. Sie können als solche ebensowenig gelten, wie etwa das „Steineis" Alaskas und der Neusibirischen Inseln, oder wie die in Mulden eingelagerten sibirischen „Tarinne" (ebenda, 2. Band, S. 758), die sich sonst ganz wie Gletscher ausnehmen.

[2]) Habel, Aus den argentinischen Anden, Zeitschr. d. d. u. öst. Alpenver., 27. Band, S. 43. „Der Büsserschnee, diese sonderbare Bildung, scheint nur den Anden eigentümlich zu sein. Vorzüglich tritt sie auf Schneeflächen auf, aber auch auf Eis und seltener auf Erde. Meist besteht sie aus nadelförmigen, wohl durch die Sonne und besonders den Wind hervorgerufenen Modellierungen. Man trifft Schneefelder an, auf denen die über 1 m hohen Nadeln so enge zusammenstehen, dass man gerade Platz findet, um sich auf den konkaven Furchen zwischen ihnen hindurchzuwinden. Einige dieser Nadeln, aus dichtem Schnee bestehend, fallen bei der geringsten Berührung um, einen Stumpf zurücklassend; andere weichen nur einer gewissen Kraftanstrengung. Es gibt ausgedehnte Felder von Penitentesschnee, die sich an den Bergen hinabziehen; andere, weniger umfangreiche, liegen in Talsenkungen und auf ebenen Stellen der Hänge. Dünnere Schneelagen an Halden und auf Hochflächen zeigen diese Bildung nicht, ebensowenig tiefer in den Tälern lagernde, grössere Reste von Lawinenschnee."

eines der sehr wenigen an, welche mit echtem Büsserschnee Bekanntschaft geschlossen haben. Deren Richtigkeit anerkennend, fügt er, was für uns an diesem Orte als das Wichtigste gelten darf, die Bemerkung hinzu, die Säulen seien immer in parallelen Reihen, „wie ein Regiment Soldaten", gerichtet. Zumeist sind sie an der Basis „durch niedere Eiswülste" verbunden; ganz dasselbe sagt, mit etwas anderen Worten, auch Habel. Die Grundfläche stelle sich als ein Oval dar, dessen Hauptachse mit der geraden Linie, welche die Zacken einhalten, zusammenfalle. Mit Unrecht spreche man, wie es die Landessprache tut, von Büsserschnee, denn der Stoff der Säulen sei reines Eis. Dieses sei nur im Windschatten der Gebirgsketten zu erwarten, und da im Westen Südamerikas Westwinde vorherrschten, deren Leeseite also mit dem Ostabhange der Anden identisch ist, so dürfte man sich nicht wundern, Penitenteskolonien so gut wie ausschliesslich in Argentinien zu finden; auf der chilenischen Seite seien dieselben, wenn überhaupt, doch nur ganz sporadisch nachzuweisen. Als Gletscher könne man solche Eisfelder schon um deswillen nicht ansprechen, weil es keinen Gegensatz zwischen Nähr- und Ablationsgebiet gäbe, und weil das Eis nirgends die bekannten Eigenschaften des Gletschereises besitze. Gewiss bestehe zwischen den Gletscherkarren, deren Beziehungen zu den Karren- und Schrattenflächen verkarsteter Felsflächen den Gegenstand einer ausführlichen Untersuchung von Sieger[1]) bilden, und den Penitentesfeldern manche Übereinstimmung, aber dass dieselbe keine durchgreifende sei, erhelle aus der Tatsache, dass auf ein und demselben Gletscher Karren und Büsserschnee getrennt, in geringer Entfernung voneinander, vorgefunden werden. In hohem Grade bemerkenswert ist nun dieses vereinigte und doch wieder geschiedene Auftreten der beiden in Rede stehenden Formengruppen allerdings, aber für völlig zwingend möchten wir desungeachtet den Schluss Hau-

[1]) Sieger, Die Oberflächenformen der Gletscher, Mitteil. d. d. u. öst. Alpenver., 1896, Nr. 20—22; Die Karstformen der Gletscher, Geographische Zeitschrift, 1. Band, S. 182 ff.

thals nicht erachten. Denn wenn man, wie dies beispielsweise H. Meyer[1]) tut, in den Penitentesfiguren das letzte und fortgeschrittenste Stadium des die Karrenbildung im Eise bedingenden Auflösungsprozesses betrachtet, kann man Hauthal den Einwand machen, dass eben der eine Teil des Gletschers schon weit stärker, als ein anderer, von der Zerstörung betroffen worden wäre. Die Berechtigung, dass den Büsserfiguren als solchen die Eigenschaft, unter allen Umständen zu den Gletschern gerechnet zu werden, von vornherein abgestritten wird, bleibt auch dann bestehen, wenn gelegentlich einmal solche Gebilde in den Randpartien eines wirklichen Gletschers bemerkbar sind.

Die Art und Weise, wie sich die Orts- und Landeskundigen mit der Erklärung des sich oft in so seltenen Bildern offenbarenden Phänomens abgefunden haben, ist eine sehr verschiedene. Darwins noch etwas von der herrschenden Naturphilosophie beeinflusster Hinweis auf eine „metamorphische Tätigkeit" der im Eise wirksamen Kräfte ist sehr wenig fassbar. Bei Brackebusch spielt natürlich die von ihm gehegte Überzeugung eine gewisse Rolle, dass die in Penitentes zerlegte Eismasse nicht einer, wenn auch langsamen Bewegung nach abwärts entbehre.[2]) Güssfeldt und Habel denken an die Sonnen- und weit mehr noch an die Windrichtung, während

[1]) Die in Hans Meyers Reisewerke (Der Kilimandjâro, Berlin 1900) enthaltenen Abbildungen des sehr stark verkarsteten und zerschnittenen Drygalski-Gletschers erinnern allerdings unwillkürlich an ein Penitentesfeld, und deshalb ist es begreiflich, dass der genannte Reisende, was Hauthal nicht zuzugeben in der Lage ist, den andinen Gletschertypus verallgemeinern und ihm einen tropischen substituieren will.

[2]) Dem blossen Aussehen nach stellt Brackebusch den Büsserschnee in Parallele zu jenen Eistrümmern, in welche sich (Die Nordpolreisen Adolf Erik v. Nordenskiölds 1859—1879, Leipzig 1880, S. 147 ff.) ein Gletscher häufig spaltet, wenn er genötigt wird, in einen engen Fjord sich hineinzuschieben. Solange man von der Ansicht ausgeht, auch eine Penitenteskolonie sei in langsamem Abrutschen begriffen, lag es nicht eben ferne, an die Entstehung von Sprüngen im Eise, den Lithoklasen vergleichbar, und an eine Loslösung der von Sprungflächen umgebenen Teile zu denken. Einer immobilen Eismasse gegenüber muss diese Art der Deutung versagen.

Hauthal[1]) der Insolation die einschneidendste Tätigkeit zuweisen will. Die Luftwärme kanu, das ist unbedingt zuzugestehen, zwar Schicht auf Schicht zu langsamem Abschmelzen bringen, aber eine nach unten sich betätigende, einzelne Teile isolierende Aktion ist von ihr, die ja niemals selektiv wirkt, nicht zu erwarten. Auch der Wind ist bei der Bildung der Auszackungen nur vorbereitend, nicht jedoch aktiv beteiligt; er sorgt dafür, dass an geschützten Stellen sich Schnee anhäuft, der nach und nach zu Eis versintert, aber die Herauspräparierung der Säulen und Nadeln überlässt er einem anderen Faktor. Als solche könne einzig und allein die direkte Sonnenstrahlung in Frage kommen.

Dass die Hauthal'sche Hypothese in einem Hauptpunkte den Tatsachen sich am besten anpasst, scheint nicht geleugnet werden zu können. Sie gibt auch von dem nicht gleichgültigen Umstande Rechenschaft, dass den Eisobelisken eine gewisse Orientierung eigen ist, indem nämlich dieselben durchweg ihre Schmalseite nach Nordwesten kehren, von welcher Weltgegend aus die Sonne am kräftigsten zu wirken vermag. Gegen die, wie die Anschauungen anderer Forscher beweisen, zunächst sich darbietende Annahme, dass auch der Wind bei der Auflösung der Eismasse in Büsserfiguren das Seinige getan habe, sprechen zwei von Hauthal betonte Begleiterscheinungen; der Ort der Penitentes befindet sich zumeist, wie wir erfuhren, auf windgeschützten Abhängen und Talsohlen, und die Richtung, nach welcher die einzelnen Eisnadeln aufgereiht sind, stimmt nicht mit der herrschenden Windrichtung überein. Die Bestrahlung der Sonne ist sonach ohne Zweifel als das gewichtigste Moment bei der Bildung der Kerzenfelder — auch diese Bezeichnung ist den Neuspaniern geläufig — in Rechnung zu ziehen, aber Hauthal macht sich selbst einen gewichtigen Einwurf: Woher kommt der Parallelismus der einzelnen Reihen? Gerade das Kennzeichen also, welches für die innere Zusammengehörigkeit der Penitentesfiguren mit den Erdpyra-

[1]) Hauthal, a. a. O., S. 122 ff.

miden am deutlichsten spricht, bleibt einstweilen noch unerklärt, denn wie die Insolation eine derartige Auslese der Richtungen bewirken sollte, lässt sich nicht absehen. Wie auffällig aber die Geradlinigkeit der Reihen erscheint, ersieht man am besten dann, wenn die Vernichtung eines Kerzenfeldes weit vorgeschritten und die Anzahl der übrig gebliebenen Individuen nur noch eine geringe ist. Fig. 7 mag nach Hauthal[1]) ein Bild von einer solchen dünn gewordenen Reihe gewähren. Ob freilich nur das Residuum eines dereinst reicher bestellten Feldes vorliegt, oder ob von Anfang an dasselbe nur aus einer einzigen Reihe bestand, was aus dem Fehlen sonstiger Reste geschlossen werden könnte, muss eine offene Frage bleiben.

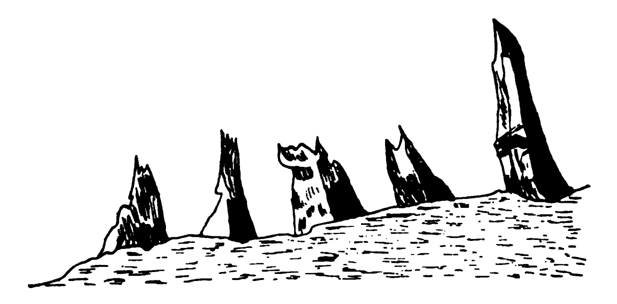


Fig. 7.

Jene Kämme, aus denen die Tagewasser die eigentlichen Erdpyramiden herausmeisseln, sind durch Schluchten, die selbst wieder das Ergebnis energischer Niederschläge darstellen, voneinander getrennt. Ähnliche Schluchten müssen auch die Erosionskulissen, die sich unter dem Einflusse der Sonnenstrahlung in Penitenteszacken auflösten, voneinander geschieden haben, ehe die Insolation mit voller Kraft einsetzen konnte. Und gerade die Tatsache, dass die Gletscherkarren mitunter so scharfe Schneiden aufweisen,[2]) wie man sie etwa im Kalkgesteine des Steinernen

[1]) Hauthal, a. a. O.

[2]) Von seiner Besteigung des Mount Shasta berichtet C. Sulzer (Bergfahrten im Far West, Jahrbuch d. Schweiz. Alpenkl., 26. Jahrgang,

Meeres oder des Hohen Ifen zu überschreiten hat, würde sich der Hypothese, dass in letzter Linie auch Gletscher sich in Penitentesansammlungen auflösen können, nicht ungünstig erweisen.[1]) Dass aber die Regenverteilung sich ebenfalls mit jener Voraussetzung in Einklang bringen lässt, erhellt aus den von Hann[2]) gemachten Angaben über die meteorologischen Verhältnisse des Ostabhanges der Anden.

Weder im eigentlich tropischen, noch im eigentlich gemässigten Klimagürtel der südlichen Halbkugel begegnen wir der uns beschäftigenden Erscheinung in ausgeprägter Reinheit, sondern wesentlich nur in der subtropischen Zone. Die Wolkenbrüche der Tropen, die gleichmässig über das ganze Jahr verteilte atmosphärische Befeuchtung unter höheren Breiten würden gleichmässig der versinternden Schneemasse derart zusetzen, dass sie ihre Konsistenz verlöre und der Möglichkeit, sich in Nadeln und Obelisken aufzulösen, beraubt würde. Die Winter-, resp. Frühlingsregen indessen, welche die Regel bilden,[3]) setzen durch verhältnismässig kurze Zeit den durch die Winde zusammengewehten, in stetem Ver-

S. 300): „Einige Firnfelder hielten uns beträchtlich auf. Sie waren durch sehr schmale, tiefe Furchen zerrissen, und zwischen diesen waren hohe, schmale Kämme übrig gelassen, deren obere, etwas geneigte Ränder messerscharf zugespitzt und hart gefroren waren. Über solches Terrain zu spazieren und mit heiler Haut davonzukommen, war ein wirkliches Kunststück, und mancher Schweisstropfen wurde darob vergossen. Nie habe ich solche eigentümliche Eisgebilde gesehen; dieselben können wohl kaum anders, als durch intensive Windwirkung, entstanden sein."

[1]) Wir sagen ausdrücklich können, nicht müssen. Die von Hauthal beschriebenen Kerzenfelder sind in ihrer grossen Mehrzahl etwas ganz anderes als Gletscher, allein die Frage, ob die auf Gletschern beobachteten Penitentesbildungen nicht doch als integrierender Bestandteil zu den Gletschern gehören, aus ihnen durch Ablation von verschärfter Intensität direkt hervorgegangen sind — diese Frage kann noch nicht als entschieden betrachtet werden.

[2]) Hann, Handbuch der Klimatologie, 3. Band, Stuttgart 1899, S. 431 ff.

[3]) Der erwähnten Quelle zufolge entfallen in Mendoza 32, am Uspallatapasse sogar 38 Prozent der Jahresniederschläge auf das Frühjahr.

festigungszustande befindlichen Schneelagen heftig zu und bahnen sich jene Runsen, die von schmalen Wänden getrennt werden. Diese letzteren beginnt hiernächst die Insolation zu bearbeiten, zu krenelieren und schliesslich in jene abenteuerlichen Eisfiguren zu zerlegen, in denen die lebhafte Phantasie der Eingeborenen betende, zum Himmel aufschauende Menschen erblickte.[1])

Damit wäre denn also die Analogie in der Bildung von Erdpyramiden und Eiszacken endgültig festgestellt. Beide Male werden Massen von lockerer Struktur durch den Regen — und hie und da wohl auch durch den Wind und Angriffe von unten her — in spornartig vorspringende Grate gespalten, und diese unterliegen erneuter Zerstörungsarbeit durch Regen und Sonnenstrahlung. Als Resultat tritt wiederum übereinstimmend die lineare Scharung der Erosionsgebilde zutage.[2])

---

[1]) In allerjüngster Zeit suchte Facilides (Beitrag zur Lösung der Frage, wie die als „Büsserschnee" bezeichneten Schneebildungen entstehen, Mitteil. d. deutschen u. österreich. Alpenver., 1904, Nr. 21) die eigenartige Anordnung dieser Figuren auf die „Schattenwirkung" zurückzuführen. Die Tatsache, dass die Gesamtmasse zuvor in Einzelwände zerlegt sein muss, bleibt davon unberührt.

[2]) Der Verfasser möchte nicht schliessen, ohne zwei Kollegen herzlich zu danken, die ihn durch ihre Mitteilungen bei der Verwirklichung seiner Absicht wesentlich gefördert haben: Herrn Professor Pompeckj (Hohenheim) und Herrn Professor Deecke (Greifswald), welch letzterer insonderheit auch durch seine Übermittlung von Abbildungen aus dem seiner Leitung unterstellten Universitätsinstitute dieser Arbeit seine Unterstützung zuteil werden liess.

Bemerkungen zum System der Medusen.

Revision der Cannotiden Haeckels.

Von **Otto Maas.**

(*Eingelaufen 5. November.*)

Gegenbaur hat im Jahre 1856 einen „Versuch eines Systems der Medusen“ veröffentlicht, der nicht nur für die damalige Zeit mit ihrer viel geringeren Kenntnis der Arten bewundernswert war, sondern noch auf lange hinaus vorbildlich geblieben ist und auch die eigentliche Grundlage von Haeckels umfassendem System der Medusen (1879) gebildet hat. Ja, es haben sich manche Abänderungen, die Haeckel daran getroffen, mit zunehmender Kenntnis der Formen wieder zu Gunsten Gegenbaurs entschieden. Dazu gehört auch die Stellung der eigentümlichen Craspedoten mit verästelten Radiärkanälen, der sogenannten Williadae von Forbes (1848). Gegenbaur hatte diese zu seinen Oceanida im weiteren Sinne, also den Anthomedusen gestellt, Haeckel jedoch zu den Leptomedusen, weil er ihre Gonaden für an den Radiärkanälen angebracht hielt und das Vorhandensein der Gonaden am Magen selbst als ein sekundäres Übergreifen ansah. Er hat darum aus den Williaden als Unterfamilie, zusammen mit einigen nur in der älteren Literatur unvollkommen beschriebenen Formen, als Bereniciden, und einigen anderen mit gefiederten Radiärkanälen, den Polyorchiden von Agassiz (1862), und aus noch andern heterogenen Formen eine neue grosse Familie der Leptomedusen, die Cannotidae, gemacht. Während aber die drei übrigen grossen Familien der Leptomedusen, nämlich die Thaumantiaden, die

Eucopiden und die Aequoriden in der Gegenbaur'schen Definition mit einigen Modifikationen von Metschnikoff (1886), von mir (1893) u. a. heute noch zu Recht bestehen, erweist sich die Aufstellung dieser vierten Familie durch Haeckel als nicht haltbar.

Ich habe schon gelegentlich der Bearbeitung der Craspedoten der Planktonexpedition darauf hingewiesen, wie heterogene Elemente von Haeckel in dieser Familie vereinigt sind; „denn es ist sicher ein morphologisch recht bedeutsamer Unterschied, ob die Radiärkanäle sich gabelartig teilen, die Gabeläste den Ringkanal erreichen . . . ., oder ob sie nur eben gefiedert sind“ (1893, p. 64).

Der bedeutsamste Fortschritt unserer Kenntnis der Gruppe war, als es E. T. Browne gelang (1896), den biologischen Zusammenhang der Meduse *Willia* mit dem eigentümlichen Polypen *Lar* festzustellen, und ferner auf Schnitten nachzuweisen, dass die Geschlechtsprodukte der Meduse in Wirklichkeit dem Magen angehören wie bei Anthomedusen. Delage und Hérouard haben in ihrer Zoologie concrète (T. II, 2, Les Coelentérés, 1901) dieser Entdeckung bereits Rechnung getragen und einen Teil der Haeckel'schen Cannotiden, eben die Williaden, zu den Anthomedusen (Gymnoblastiden) gestellt (l. c. p. 107), als Familie Hydrolarinae, den ganzen buntgemischten Rest jedoch als Cannotinae bei den Leptomedusen (Calycoblastiden) belassen (l. c. p. 143). Eine Revision der Williaden im engeren Sinne hat neuerdings in sehr sorgfältiger Weise, bis zu den einzelnen Spezies gehend, E. T. Browne gegeben (1904). Es ist ihm dabei eine grosse Vereinfachung der Genera gelungen, insbesondere der Nachweis, dass die Haeckel'sche Unterscheidung von symmetrischer und asymmetrischer Gabelung der Radiärkanäle eine künstliche resp. ein Altersunterschied ist, und dass danach verschiedene Genera zusammenfallen. Auch ich war auf Grund des Materials der Sibogaexpedition, wie durch das Studium der Literatur zur gleichen Ansicht gelangt; ausserdem konnte ich einige Formen aus dem übrigen, nicht Williaden umfassenden Kreis der so-

genannten Cannotiden untersuchen. Das gleiche ist neuerdings von anderen Autoren geschehen, und so halte ich es für an der Zeit, die ganze Haeckel'sche Gruppe der Cannotiden, die mehr Heterogenes wie irgend eine andere enthält, einer Revision zu unterziehen.

Von Haeckel wird die Familie in drei Unterfamilien eingeteilt: A. die Polyorchidae im erweiterten Sinne der Agassiz'schen Bezeichnung (1867), bei der die Radiärkanäle blinde Fiederäste haben, die den Ringkanal nicht erreichen; B. die Berenicidae mit 4 (oder 6) verzweigten Radiärkanälen, die in den Ringkanal münden, ebenso wie der Hauptkanal; C. die Williadae mit 4 (oder 6) verzweigten Radiärkanälen, wo aber nur die Gabeläste in den Ringkanal münden, die Hauptäste in die Gabelung aufgehen. Der Unterschied von B und C ist, wie leicht ersichtlich, ein sehr problematischer, mit dem Wachstum durch Hinzukommen neuer Gabeläste sich verändernder. Es ist daher z. B. die Haeckel'sche Gattung *Dyscannota* der Subfamilie Berenicidae nur ein Vorstadium der alten Brandt'schen Gattung *Proboscidactyla* der Williadae, wie schon E. T. Browne gezeigt hat.

Die heterogensten Formen sind in der Subfamilie Polyorchidae vereinigt. Die erste Gattung, *Staurodiscus*, hat nicht wie die übrigen Polyorchiden eine Reihe blinder kleiner Fiederästchen entlang den ganzen Radiärkanälen, sondern nur je ein Paar grosser Seitenäste an jedem der 4 Radiärkanäle. Diese Seitenäste erreichen den Ringkanal nicht (oder noch nicht, s. u.), tragen aber ebenso wie der Hauptast die Spuren einer Gonade. Haeckel unterscheidet zwei Arten, *St. tetrastaurus* und *St. heterosceles*, beide von ihm an den kanarischen Inseln gefunden und in allen Merkmalen so nahe stehend, dass sie nach seinen eigenen Worten (1879, p. 146) „kaum als besondere Spezies erscheinen könnten.“ Die nicht abgebildete *St. heterosceles* unterscheidet sich nur durch den nicht ganz symmetrischen Abgang der beiden Seitenäste, was bei den zahlreichen Variationsmöglichkeiten und Wachstumverschiebungen

nicht als Artcharakter in Betracht kommen kann. Die Art resp. die Gattung ist seitdem nur durch A. Agassiz und A. G. Mayer wieder gefunden worden. *St. tetrastaurus* bei den Tortugas, Florida (1900, β, p. 46, pl. 18 und 19), wobei auch ein jüngeres Stadium abgebildet wird und eine „neue" *St. nigricans* von den Fijiinseln (1899, p. 164, pl. 4). Bei der letzteren erreichen jedoch die Gabeläste, wie ausdrücklich hervorgehoben wird, den Ringkanal. Die Form wäre also laut Haeckel in der zweiten Subfamilie, den Bereniciden, unterzubringen und in der Tat findet sich hier bei Haeckel eine Gattung und Art von N. Guinea, *Cannota dodecantha*, die bis ins Detail mit der Agassiz' und Mayer'schen Beschreibung übereinstimmt. Es ist nicht einzusehen, warum letzterer seine Fijiform nicht mit der Haeckel'schen identifiziert hat. Ein generischer Unterschied zwischen *Staurodiscus* und *Cannota* ist nicht aufrecht zu erhalten; die lang auswachsenden Seitenäste können noch vor Erreichung des Ringkanals Gonadenanlagen zeigen; nach Einmündung der Seitenäste in den Ringkanal hat man es mit primitiven Bereniciden s. restr. zu tun, die sich, wie unten noch zu zeigen ist, durch die Lage der Gonaden auf den Kanälen, durch die Konfiguration des Schirmrands etc. von den Williaden unterscheiden, mit denen sie Haeckel durcheinander gemischt hat.

Über die folgende Gattung, die bei Haeckels Cannotiden steht, „*Gonynema*" (*Gonionemus* A. Ag.) braucht hier nicht viel gesagt zu werden. Haeckel hatte die Gonadenfalten der Agassiz'schen Figur für Divertikel der Radiärkanäle angesehen und darum hier untergebracht. Es ist seitdem durch die Untersuchung des Schirmrands und der Entwicklung von verschiedener Seite übereinstimmend festgestellt (S. Goto 1903, H. F. Perkins 1903, Murbach und Shearer 1903, cf. Maas, Zool. Zentralblatt 1904), dass *Gonionemus*, das amerikanische Hauptobjekt für physiologische Untersuchungen an Medusen, überhaupt keine Leptomeduse, sondern eine Trachomeduse und nahe Verwandte der mediterranen Olindias ist.

Ebenso haben die bei Haeckel nun folgenden Gattungen,

Ptychogena (A. Ag. 1865) und *Staurophora* (Brandt 1838) hier auszuscheiden, wie ich bereits bei den Medusen der Planktonexpedition ausführlich erörtert habe (1893, p. 64), und sind als Untergruppe den Thaumantiaden zuzuteilen. Die „Fiederung“ der Radiärkanäle ist nur auf Rechnung der Gonaden zu setzen, und die Haeckel'sche Aufstellung einer neuen Gattung *Staurostoma* bei den Thaumantiaden ist überflüssig. Auch Hartlaub hat sich in diesem Sinne ausgesprochen und auf Grund der Abbildungen Brandts und eigener Untersuchungen von *Staurophora* die Fiederung überhaupt in Abrede gestellt (1897, p. 485).

Die folgende Gattung *Polyorchis* A. Ag., die der Unterfamilie den Namen gegeben hat, nimmt eine Sonderstellung ein. Hier zeigen die Radiärkanäle eine sehr ausgesprochene Fiederung für sich (wie es übrigens ähnlich auch die Tiariden *Catablema*, *Turris* zeigen), und die Gonaden bilden, davon ganz unabhängig, lange, in die Subumbrella herabhängende Schläuche von der Ursprungsstelle der Radiärkanäle aus. Nach einer etwas problematischen Abbildung von Eschscholtz (*Melicertum penicillatum* 1829, T. VIII, Fig. 4) war A. Agassiz der erste, der wieder auf Grund eigenen Materials eine gute und zur Nacherkennung geeignete Beschreibung geliefert hat (1865, p. 119, Fig. 179—183). Die Nomenklaturfrage scheint mir dadurch zu Gunsten des Agassiz'schen Namens *Polyorchis* entschieden zu sein, den auch Haeckel angenommen hat. Ob die von Haeckel hinzugefügte Art *P. pinnatus* spezifisch von *P. penicillatus* verschieden ist, scheint mir fraglich, ebenso die Stellung von Chamissos *Medusa campanulata*, die Haeckel hier eingereiht hat; die von Fewkes 1889 als *penicillata* bezeichnete Form zeigt Verschiedenheiten von der von Agassiz so benannten, wie Murbach und Shearer erörtern (1903, p. 176), die eine neue Art *P. minuta* von Britisch-Kolumbia einführen. Alle „Arten“ sind pazifisch (keine adriatisch, wie M. und S. irrtümlich angeben, l. c. p. 177).

Zu dieser Gruppe gehörig ist die früher von Haeckel damit auch spezifisch vereinigte *Medusa saltatrix* des Tilesius

(1818, Taf. XVIII), für die schon Haeckel selbst die Aufstellung einer neuen Gattung *Spirocodon* empfohlen hat (1879, p. 626). Goette, der diese, wie es scheint, seltene und nur in Japan vorkommende Meduse wieder beschreiben konnte, will sie sogar in eine neue Subfamilie „Spirocodontidae“ (1886, p. 832) stellen; der abgeteilte, festonierte Schirmrand, die dendritischen Zentripetalkanäle, die vom Ringkanal ausgehen, die Zahl und Bildung der Gonaden, deren je eine korkzieherartig gewunden aus dem Proximalteil eines jeden Radiärkanals entspringt, sind schwerwiegende Merkmale. Da weder von Haeckel noch von Goette Abbildungen dieser höchst auffälligen Meduse vorliegen, so mag es entschuldbar sein, wenn Kirkpatrick deren Darstellungen gänzlich entgangen sind, und er dieselbe Form als *Gonomaeandrus chrysostephanus* n. g. n. sp. wieder beschreibt (1903). Von E. T. Browne aufmerksam gemacht, hat er seinen Irrtum zurückgezogen (1904). Er stellt die Meduse übrigens in die Nähe von *Polyorchis*, betont aber, dass die Gonaden zu den Radiärkanälen, nicht zum Magen gehören, und es deswegen keine Anthomeduse sei. Auch mir liegt diese seltene Meduse in einigen von Dr. Haberer in Japan gesammelten Stücken vor; ich werde noch an anderer Stelle Gelegenheit haben, auf einige Verhältnisse ihrer Organisation zurückzukommen. Jedenfalls nehmen *Polyorchis* und *Spirocodon* als Polyorchidae s. restr. (non Haeckel) eine gesonderte Stellung ein und sind mit den übrigen „Cannotiden“, seien es Williaden oder Bereniciden, nicht näher verwandt. Wie sich diese Gruppen untereinander und im System der Antho- resp. Leptomedusen einordnen können, wird noch unten zu erörtern sein.

In Haeckels System folgt nun die erste eigentliche Berenicide, die schon oben erwähnte Gattung *Cannota* Haeckels, die nichts weiter als ein *Staurodiscus* ist, dessen Radiärkanäle den Ringkanal erreichen. Charakteristisch ist ferner die distale Lage der Gonaden auf den Radiärkanälen und der Schirmwand mit Tentakel und Kolben dazwischen. Da von Browne die proximale Lage der Gonaden am Magengrund bei den echten Williaden *Willia* und *Proboscidactyla* nachgewiesen ist, da

aber sowohl bei Haeckel wie in der älteren Literatur Formen mit verzweigten Radiärkanälen vorkommen, die sicher distale Gonaden besitzen, so kann gerade dies von Haeckel vernachlässigte Merkmal zum trennenden Familiencharakter zwischen Williaden und Bereniciden werden, nicht aber die Verzweigung der Kanäle; denn sonst kann eine Berenicide mit zwei regulären Gabelästen eines Radiärkanals durch das in der Ontogenie nachgewiesene asymmetrische Sprossen eines weiteren Gabelastes zur Williade und durch einen folgenden Gabelast unter Ausgleich der Asymmetrie wieder zur Berenicide werden.

Dies zeigt sich bei der in Haeckels System nun folgenden Gattung *Dyscannota.* Sie ist von Haeckel nach der Agassiz'schen Abbildung von *Willia ornata* (1865, Fig. 274a — 279) aufgestellt, und zwar bei den Bereniciden als *D. dysdipleura*, während die eigentliche Mc Crady'sche *Willia ornata* mit dem neuen Namen *Willetta ornata* bei den Williaden steht. Nun ist es zwar vielleicht richtig, die Mc Crady'sche Form auf Grund der Vierzahl der Radiärkanäle von der Typengattung Forbes *Willia*, die 6 Radiärkanäle zeigt, generisch zu trennen (Mc Crady hatte daraus nur einen Speziesunterschied gemacht (1857, p. 47), und in der Tat sind die Ähnlichkeiten im Übrigen sehr gross); auf keinen Fall aber darf die Agassiz'sche Form von der Mc Crady'schen getrennt werden; denn Haeckel hat nicht erkannt, dass, wie schon Browne hervorhebt (1904, p. 727), Agassiz nur die frühen und Zwischenstadien beschrieben und dabei die Entwicklung des Kanalsystems gezeigt hat. Es sind ferner bei einer hieher gehörigen Form Medusenknospen beobachtet worden (Brooks 1882), ohne dass man darum die Art von *ornata* getrennt hätte. Fewkes hat indessen, da er die Lebensgeschichte von *ornata* ohne Spuren einer Knospung verfolgen konnte, aus der Brooks'schen eine besondere Art gemacht, *Willia gemmifera.* Darin ist ihm auch Mayer gefolgt, der sie als *Dyscannota gemmifera* abbildet (1900, β, p. 8). Auch Browne hat in seiner ausgezeichneten Revision der Williaden (1904, p. 727) diese Form spezifisch getrennt als *Proboscidactyla* (s. u.) *gemmifera*; in einer fast gleichzeitigen Mitteilung hat Mayer

aber wieder den spezifischen Unterschied aufgegeben und *gemmifera* für eine „southern variety" erklärt (1904, p. 13). Immerhin bestehen aber auch ausser der Sprossung noch einige Verschiedenheiten; die sprossende Form zeigt nur ein Nesselpolster auf jedem Streifen, die geschlechtliche mehrere; der Magen der ersteren ist viel schmächtiger, doch sind alles nur graduelle Unterschiede.

Die Gonaden liegen ausgesprochen proximal, diese Formen sind also als vierteilige Williaden den sechsteiligen Typenformen anzugliedern, mit denen sie auch die eigentümlichen, zentripetalen Nesselstreifen der Exumbrella, sowie die rudimentäre Bildung des Ringkanals gemeinsam haben.

Ganz anders verhält sich die bei Haeckel folgende Gattung *Berenice* Pér. und Les. Wenn wir der Haeckel'schen Darstellung folgen, so sind sowohl auf den alten Abbildungen, wie bei den wenigen von ihm selbst untersuchten Exemplaren die Gonaden ganz distal, ferner stehen meist Kolben zwischen den Tentakeln am Schirmrand, und der Ringkanal ist wohl ausgebildet. Diese Formen sind in der neueren Literatur nicht mehr erwähnt; mancher Autor könnte daher geneigt sein, namentlich im Hinblick auf die von Haeckel geschilderte Namens „confusion" (1879, p. 153) den schönen Namen *Berenice* als obsolet fallen zu lassen; doch wird man ihn im Hinblick auf die Haeckel'schen Abbildungen (1879, Taf. IX, Fig. 4 und 5) noch beibehalten, und hoffentlich können dann bald einmal wieder Formen mit unzweifelhaft distalen Gonaden durch moderne Untersuchung ausser Frage gestellt werden.

Hierher zu nennen ist eine neue Gattung A. G. Mayers *Tetracannota* (1900, β, p. 46), die laut Autor „closely allied to *Cannota* und *Berenice*". Sie besitzt 16 Radiärkanäle, die sich (auch ontogenetisch) auf direkte Viergabelung der 4 ursprünglichen Kanäle zurückführen. Ein asymmetrisches Auswachsen wie bei Williaden findet nicht statt, auch ist der Schirmrand mit Kolben zwischen den Tentakeln versehen und entbehrt der zentripetalen Nesselstreifen; die Form wäre also den Bereniciden anzureihen; doch besitzt sie proximale Gonaden.

(In der generischen Definition A. G. Mayers heisst es zwar distal; doch kann dies nur ein Druckfehler sein, da es gleich darauf bei den Speziescharakteren heisst: „the gonads are found in the proximal portions of the 16 radial canals, very near to the point, where they branch off from the proboscis".) Damit stimmt auch die Abbildung und eine spätere Beschreibung A. G. Mayers (1904, p. 13). Die Gonaden liegen also unzweifelhaft anders als bei *Berenice*; aber ihre proximale Partie scheint doch nicht wie bei den Williaden den Magen selbst zu umfassen.

Ebenfalls hier anzuführen ist ein weiteres neues Genus *Netocertoides* A. G. Mayer (1900, β, p. 45, 1904, p. 12), das gleichfalls 16 Radiärkanäle besitzt, die jedoch aus einfacher Gabelung von 8 Kanälen resultieren. Hier liegen die Gonaden noch ausgesprochener proximal; über die Stellung dieser Gattung wird noch bei Erwähnung der Brooks'schen *Dichotomia*, der Günther'schen *Bythotiara* und der Maas'schen *Sibogita* zu reden sein.

Das letzte Genus der eigentlichen Berenicīden bildet bei Haeckel *Dipleurosoma*, von A. Boeck (1866) für eine norwegische Form gegründet. Sie besitzt wie die später zu erwähnenden *Willia* und *Toxorchis* 6 Radiärkanäle, die jedoch nicht radiär angeordnet sind, sondern zu je 3 an den Ecken des ausgezogenen Magens abgehen sollen und unregelmässige Seitenäste abgeben. Haeckel hat hierunter 2 Arten von A. Boeck als *D. typicum* vereinigt, ferner *Ametrangia hemisphaerica* Allman als *D. irregulare* (1873) hinzugezogen, und wie gewöhnlich eine neue, an ihm selbst beobachtete Art, *D. amphitectum* hinzugefügt. Laut E. T. Browne, der 1897 und 1900 die unregelmässige Verzweigung der Kanäle bei zahlreichen Exemplaren in sehr schönen Abbildungen beschrieben hat, fallen *hemisphaerica - typicum - irregulare* zusammen, und die Unregelmässigkeit im Abgang und der Zahl der Radiärkanäle, die auch nicht alle Gonaden tragen, ist für das Genus charakteristisch. Die nachträglich von Haeckel beschriebene regulär-zweiseitige Art, *D. amphitectum*, von der allein er die Genus-

merkmale abstrahiert, müsse deshalb aus der Gattung ausscheiden (1900, p. 717). Ich stimme Browne bezüglich der Neuaufstellung der Gattungsmerkmale vollständig bei (auch eine von Agassiz und Mayer erwähnte neue *D. pacifica* zeigt solche Unregelmässigkeit, 1902, p. 148, Fig. 13), nur glaube ich, dass bezüglich der Haeckel'schen Art keine besonderen Weiterungen zu machen sind. Sie kam „nur in einem einzigen Exemplar zu Gesicht" (1879, p. 155) gegen 217 Exemplare, in denen Browne die Radiärkanäle studierte (1900, p. 718), und dieses Exemplar zeigte zufällig eine mehr reguläre Verteilung der 6 Radiärkanäle zu 3 und 3. Es wird also auch *amphitectum* mit den erwähnten Synonymen zusammenfallen resp. zusammen „fallen" und *typicum* Boeck und *pacifica* (Agass. und Mayer) die einzigen Arten bleiben.

Schwieriger ist die Stellung des Genus zu den grösseren Gruppen, worüber die Lage der Gonaden Aufschluss geben könnte. Laut Haeckel „liegen sie im Proximalteil der Radiärkanäle und gehen von da auf die Magenwand über" (1879, p. 155); er hat sie also für übereinstimmend mit den typischen Willia-Gonaden gehalten, die laut Brownes Nachweis durchaus anthomedusenartig sind. Das trifft aber für *Dipleurosoma*, wie Browne abbildet (1897, Textfig. 12), nicht zu; die Gonaden sind durchaus kanalar, wenn schon mehr proximal gelegen als z. B. bei *Berenice*. Der entscheidende Nachweis wird durch das zugehörige Hydroidenstadium geliefert. Laut Browne ist es gelungen, die bis zum Planulastadium auf der Mutter verbleibenden Embryonen (!) bis zu *Cuspidella*-artigen Hydroiden zu züchten (1900, p. 696), also einem Calycoblasten, im Gegensatz zum Gymnoblasten *Lar*, der das Hydroid von *Willia* ist.

Bei Haeckel folgt nun die Unterfamilie der eigentlichen Williaden, deren Kennzeichen die reine Gabelspaltung der Radiärkanäle sein soll (der Hauptkanal geht in die Gabeläste auf, nur die Gabeläste erreichen den Ringkanal, der Hauptkanal nicht, was, wie oben erwähnt, nur ein Stadienunterschied ist). Nach einem weiteren offenbaren Altersunterschied

macht Haeckel drei Gruppen: Radiärkanäle einmal, zweimal und vielmal gabelig geteilt; in jeder Gruppe unterscheidet er wieder nach der Vier- oder Sechszahl der Kanäle Formen mit proximalen und solche mit distalen Gonaden stehen dabei durcheinander.

	Radiärkanäle		
	einmal gegabelt	zweimal gegabelt	vielmal gegabelt
4 Hauptkanäle	10. *Dicranocanna**)	12. *Willetta**)	14. *Proboscidactyla*
6 Hauptkanäle	11. *Toxorchis**)	13. *Willia*	15. *Cladocanna**)

Anstatt der von Haeckel genommenen Reihenfolge nach der Gabelung der Kanäle empfiehlt sich die Betrachtung der vierzähligen und dann der sechszähligen Formen zusammen.

Die erste vierzählige Gattung, *Dicranocanna*, mit nur einmal gegabelten Kanälen, also 8 Endästen, ist offenbar ein Jugendstadium, das dem *Dyscannota*-Stadium mit 12 Endästen vorangeht. Gonadenlage und Schirmrand stimmen nach der kurzen Beschreibung ohne Abbildung damit durchaus überein. Die einzige Art „*furcillata*" hätte daher von Browne ebenfalls in die Synonyma von (*Willia*) (*Willetta*) *Proboscidactyla ornata* aufgenommen werden können.

Auch die Gattung *Willetta*, die Haeckel für die Mc Crady *Willia ornata* neu aufgestellt hat, ist laut Browne noch kein Endstadium, sondern ein Vorstadium der Brandt'schen Gattung *Proboscidactyla*. Man könnte fragen, ob Browne nicht zu weit gegangen ist, auch diese alte Brandt'sche Gattung in den Formenkreis *Dyscannota*, *Willetta* einzubeziehen resp. ihr als erwachsenem Stadium die letztgenannten unterzuordnen. A. Agassiz hatte sie generisch von *ornata* getrennt auf Grund der symmetrischen Kanalverzweigung; doch ist diese kein bleibendes Merkmal; die $4 \times 2 \cdot 2 = (16)$ ziemlich regelmässig gegabelten Kanäle

*) Von Haeckel neu aufgestellt.

können wieder durch weitere Sprossung unsymmetrisch und noch einmal sprossend wieder symmetrisch werden; auch gleicht die Agassiz'sche Form in Bezug auf die charakteristische Gonadenlage im Magengrund und die merkwürdigen zentripetalen Nesselstreifen der Exumbrella (s. 1865, Fig. 280 und 282) durchaus der Mc Crady'schen *ornata*. Es ist aber immerhin fraglich, ob die andere, von Agassiz mit der Brandt'schen Form *P. flavicirrata* identifizierte Art wirklich damit übereinstimmt. Schon Haeckel hat aus ihr wegen der Form von Magen und Gonaden, worin sie mehr *Willia* gleicht als der Brandt'schen Art, eine andere Art *P. brevicirrata* gemacht. Auch vermisse ich in der Brandt'schen Beschreibung wie auf der Abbildung die zentripetalen Nesselstreifen der Exumbrella. Man könnte daher auch denken, die Brandt'sche *Proboscidactyla* solchen Formen wie den gleich zu erwähnenden *Bythotiara* und *Dichotomia* anzugliedern, doch weist die Abbildung der Gonaden und die rudimentäre Ausbildung des Schirmrands sicher auf echte Williaden hin. Es soll daher mit Browne der Brandt'sche Gattungsname alle Williaden mit 4 Radiärkanälen umfassen, einerlei wie deren Verzweigung, die im Lauf der Ontogenese wechselt, beschaffen ist. Ob sich alle einzelnen von Browne mit Berücksichtigung der Synonymie sorgfältig zusammengestellten Spezies als solche halten lassen, wird zukünftiger Untersuchung vorbehalten sein; alle sind einander sehr ähnlich, auch die atlantischen den pazifischen. Die Stammart ist *P. flavicirrata* Brandt, aus dem nördlichen Pazifik, von Agassiz und neuerdings von Murbach und Shearer wieder beschrieben (1902, p. 178); dazu kommt die atlantische *P. (Willia) ornata* Mc Crady; zu beiden Formen gehört je eine knospende Art oder „Varietät"; zu *ornata gemmifera*, zu *flavicirrata-tropica*, die Huxley in seiner Anatomie der Wirbellosen abgebildet (1877, p. 120, Fig. 17), und die jetzt von E. T. Browne mit Namen versehen worden ist (1904, p. 727). Von einer sprossenden Form habe ich auch im Sibogamaterial und von Bedot und Pictet Exemplare erhalten. Die sprossenden Formen zeigen i. G. geringere Ausbildung des Kanalsystems, der Nesselpolster etc.; es lässt sich nach Analogie sehr wohl an-

nehmen, dass sie nur die Jugendformen darstellen, die mit der Fähigkeit ungeschlechtlicher Vermehrung ausgestattet sind und sich nach Abstossung der Stolonen noch weiter verändern. Die beiden sprossenden Formen sind, wie ich bei dem Sibogamaterial erörtern kann, einander sehr ähnlich, zeigen aber wie die geschlechtlichen aus Atlantic und Pazific immerhin einige deutliche Unterschiede; ob die von Fewkes von Kalifornien erwähnte neue Form *P. occidentalis* (1889, p. 109, pl. V) eine besondere Art ist, oder nur ein jüngeres Stadium der Brandt'schen, ist fraglich. Eine neue Art Brownes, *P. varians* ist nur auf Grund eines einzigen, zudem abnormen Exemplars aufgestellt (1904, p. 728, pl. LIV, Fig. 152).

An diese *Proboscidactyla*-Formen erinnert ein von W. K. Brooks jüngst beschriebenes neues Genus *Dichotomia cannoides* (1903, p. 13, pl. 1), das ebenfalls 4 mehrmals regulär gegabelte Radiärkanäle aufweist. Brooks selber hat an die Möglichkeit gedacht, seine Art den Cannotiden anzuschliessen und nahe oder in das Genus *Proboscidactyla* zu verweisen; er lehnt es aber wieder ab, weil seine Form eine einfache Gonade am Magen hat, wie Anthomedusen, die nur auf die Radiärkanäle übergreift, während die Cannotiden ja durch Gonaden etc. nach Haeckel richtige Leptomedusen seien. Dies trifft nach E. T. Brownes Untersuchungen aber bekanntlich nicht mehr zu, und man könnte jetzt um so mehr daran denken, die Brooks'sche *Dichotomia* zu den Williaden s. rect. zu stellen.

Die gleiche Überlegung gilt für eine neue Gattung R. T. Günthers, *Bythotiara* (1903, p. 424, pl. X, Fig. 4 und 5). Auch bei ihr gabeln sich die 4 Radiärkanäle (einmal), so dass sie zu den Cannotiden zu gehören scheint, aber die Lage der Gonaden ist deutlich interradial auf dem Magen selbst, wie bei den Anthomedusen (l. c. p. 425). Günther hat darum ein neues Tiaridengenus daraus gemacht.

Ich war geneigt, beide Formen den Williaden einzuordnen, fand aber unter dem Material der Sibogaexpedition ebenfalls eine Meduse mit verzweigten Radiärkanälen, sonst jedoch durchaus tiaridenartigem Habitus und mit Gonaden am Magen. Durch

die eigentümlich irreguläre Art der Kanalverzweigung, die Tentakel etc., unterscheidet sich diese Form von den beiden anderen und bildet eine neue Gattung *Sibogita*. Alle drei Gattungen zeigen ein mehr anthomedusen- und tiariden-artiges Verhalten als die Williaden; sie dürften daher die Grundlage einer neuen Familie abgeben, die ich nach der Günther'schen Gattung *Bythotiara* Bythotiaridae nenne; die Günther'sche und meine Gattung stammen aus grösserer Tiefe. Die Familie steht zwischen den Tiariden und den eigentlichen Williaden; die Brooks'sche Form ist allerdings viel Williaden-ähnlicher wie die beiden anderen, die Gonaden greifen vom Magen auf die Radiärkanäle und sogar auf deren Gabeläste über. Es ist an das oben über die Brandt'sche etwas zweifelhafte Auffassung von Proboscidactyla zu erinnern (p. 432); sollte die Brandt'sche Art wirklich, im Gegensatz zur bisherigen Annahme von *ornata* etc. und Agassiz *flavi-(brevi) cirrata* generisch verschieden sein und der zentripetalen Nesselstreifen entbehren, so ist die Brooks'sche mit ihr in einer Gattung zu vereinigen.

Es verbleiben nun noch zur Erörterung die Haeckel'schen 6 zähligen Gattungen mit regulär gegabelten Kanälen, zunächst *Toxorchis*. Durch Schirmrand, Form und die ganz distalen kanalar gelegenen Gonaden erweist sich die Form als Leptomeduse und den Bereniciden im oben rektifizierten Sinn angehörig. Durch die Regelmässigkeit der Kanäle wie durch die ganz distal auf den Gabelungen gelegenen Gonaden unterscheidet sich die Gattung von *Dipleurosoma*. Zu bemerken ist allerdings, dass sie nur nach einem einzigen Exemplar von Haeckel aufgestellt ist.

Zu den Bereniciden gehörig ist ebenfalls, wenn überhaupt aufrecht zu erhalten, die Haeckel'sche Gattung *Cladocanna*, auf Grund einer Abbildung Lesueur's von *Berenice* selbst abgetrennt. Zum Verwechseln für die älteren Autoren waren hier jedenfalls auch 6 teilige Olindiaden, die erst neuerdings beschrieben wurden, *Olindoides* (s. Goto 1903); die aufgeführten Synonyme beruhen auf Wiederbeschreibung resp. Kopie der Originalfigur, die mir zudem 4, nicht 6 Hauptkanäle zu zeigen

scheint (s. Blainville 1832, p. 32, Fig. 1). Auch hier hat Haeckel der nur in der alten Literatur zu findenden Form *thalassina*, aus der er eine neue Gattung gemacht, eine neue eigene Art *polyclada* hinzugefügt mit sehr problematischen Merkmalen. Ausser bei Lendenfeld (1884, p. 600) wird diese Form nirgends erwähnt.

Die letzte noch verbleibende Gattung ist die von Forbes 1848 als Typus der Familie Williadae aufgestellte *Willsia* (in *Willia* zu rektifizieren), deren Zugehörigkeit zum Polypen *Lar* von Browne erkannt wurde (1897). Damit und mit der Erkenntnis der Gonadenlage am Magen hat Browne die Stellung der engeren Gruppe entschieden. Die von Haeckel zur Forbes'schen Stammart *stellata* hinzugefügte Art *furcillata* zeigt nur graduelle Unterschiede. Browne hat eine weitere Art *W. mutabilis* beschrieben (1902, p. 280), deren Variabilität und Unregelmässigkeit an die Gattung *Dipleurosoma* erinnert.

Dass die „Gattung" *Psythia*, die A. G. Mayer auf Grund eines Exemplars aufgestellt hat (1902, p. 143), wie er meint, zu den Williaden gehört, ist, wie schon Browne erörtert (1904, p. 729), in keiner Weise ersichtlich. Mindestens ist sie kein besonderes Genus.

Damit sind die bei Haeckel angeführten Gattungen sowie die seither von anderen Autoren beschriebenen Formen mit gefiederten und gegabelten Radiärkanälen erledigt. Es zeigt sich, dass von den 15 bei Haeckel genannten Genera nur $^{2}/_{3}$ etwa sich aufrecht erhalten lassen. Auch die verbleibenden Genera können nicht in einer gemeinsamen Familie vereinigt werden, sondern sind sehr verschiedenartige Elemente. *Gonynema* ist als Trachomeduse den Petasiden einzuordnen, *Ptychogena* und *Staurophora* den Thaumantiaden, eventuell als besondere Unterfamilie, *Polyorchis* und *Spirocodon* sind in einer besonderen Familie Polyorchidae unterzubringen, deren Kennzeichen die gefiederten Radiärkanäle und die eigentümliche Lage der Gonaden am Grund der Subumbrella ist. Die Stellung dieser Familie im System ist noch zweifelhaft; von einigen

Autoren wird sie sogar mit den Aglauriden, also Trachomedusen in Beziehung gebraucht; mir erscheint sie nach ihren wesentlichen Merkmalen als den Leptomedusen gehörig.

Nach Abzug aller dieser Gattungen bleiben nur noch Formen mit wirklich gabelspaltigen Kanälen übrig; aber auch diese sind nicht, wie es nach Haeckel scheint, eine grössere einheitliche Gruppe, die sich nach der Art der Kanalverzweigung in zwei nahe verwandte Unterfamilien teilt, sondern sie zeigen zwei ganz verschiedene Typen, die ganz heterogenen Medusengruppen angehören. Die einen, die Williaden (nicht im Sinne Haeckels, sondern nach Forbes und Browne in der hier weiter ausgeführten Fassung), haben als Anthomedusen Gonaden auf dem Magen, die noch u. U. etwas auf die Radiärkanäle übergreifen, 4 oder 6 Radiärkanäle mit im Wachstum fortschreitender Gabelung, Tentakel von einerlei Art, die am Ende eines jeden Gabelastes stehen, und dazwischen zentripetale Nesselpolster. Die nachgewiesenen Hydroiden sind Gymnoblasten (*Lar*). Die anderen, die Bereniciden (ebenfalls nicht im Sinne Haeckels, der auch Williaden darunter anführt), haben ihre Gonaden als richtige Leptomedusen auf den Radiärkanälen, meist ganz distal, zeigen am Schirmrand Tentakel und meist Kolben in Vielzahl, dagegen keine zentripetalen Nesselpolster. Die Hydroiden sind, soweit nachgewiesen, Calycoblasten (*Cuspidella*). Die erste Gruppe hat in mehreren Arten neuerdings auf ihre anatomischen Merkmale studiert werden können, die zweite besteht dagegen meist aus Formen, die nur in der älteren Literatur figurieren und seit Haeckel nicht wieder aufgefunden wurden; sie bedarf daher erneuter Prüfung.

Zur ersten Gruppe oder wenigstens in ihre unmittelbare Verwandtschaft gehört noch eine weitere neue Anthomedusenfamilie, *Bythotiaridae*, Maas, die den Übergang der Tiariden zu den Williaden zu vermitteln scheint. Sie zeigt gastrale Gonaden, verzweigte Radiärkanäle, aber keine zentripetalen Nesselstreifen, sondern einen tiaridenartigen Schirmrand.

Eine kurze Zusammenstellung der behandelten Formen

mit ihren Hauptmerkmalen nach der neuen Anordnung möge zum Schluss hier folgen.

Zu den

Anthomedusen

gehörig, an die Tiariden anschliessend:

Familie **Bythotiaridae** Maas.

Hochglockige Anthomedusen. Mit interradialen Gonaden im Magengrund, mit verzweigten Radiärkanälen und entsprechend zahlreichen hohlen Tentakeln.

Genus Bythotiara Günther 1903.

Mit 4 (einmal) regulär verzweigten Radiärkanälen, Gonaden nur am Magen, als interradiale Leisten, mit 8 Randtentakeln.

Bythotiara Murrayi Günther 1903, p. 425, pl. X, Fig. 4 u. 5.

Genus Sibogita Maas.

Mit 4 asymmetrisch, aber dennoch regulär verzweigten Radiärkanälen, so dass an Stelle eines Radiärkanals 4 – 8 in den Ringkanal münden. Hauptkanäle von den Seitenkanälen durch Kaliber verschieden. Entsprechend den Hauptkanälen 4 × 4 lange hohle Tentakel am Schirmrand. Gonaden bilden 4 interradiale Querfaltenreihen am Magen.

Sibogita geometrica Maas.

Nähere Beschreibung folgt in den Hydromedusen der Sibogaexpedition.

Hierher gehörig ferner:

Genus Netocertoides A. G. Mayer 1900.

Mit 8 direkt vom Magen abgehenden (einmal) gegabelten Radiärkanälen. Gonaden auf den 8 basalen Aussackungen des Magens. 32 Tentakel, davon 16 grössere, den Endästen der Kanäle entsprechend, 16 dazwischen.

Netocertoides brachiatum A. G. Mayer 1900, p. 45, pl. 18, Fig. 43 u. 44.

Noch hierher gehörig?:

Genus Dichotomia Brooks 1903.

Mit 4 wiederholt dichotomisch verzweigten Radiärkanälen, so dass 32 und mehr Endäste vorhanden sind. Gonaden den Magen allseitig umfassend und viele auf die Kanäle und ihre Verzweigungen übergreifend. Mit 16 hohlen Haupttentakeln und dazwischen je 2—3 kleineren soliden Sekundärtentakeln.

Dichotomia cannoides Brooks 1903, p. 12, pl. I, Fig. 1, 2, 3.

Familie **Williadae** Forbes 1848. v. Haeckel 1879. Sens. rect. Browne 1896. (Hydrolaridae Allman 1872. Hydrolarinae Délage und Hérouard 1901.) Williadae Browne 1904. Williadae s. m. Maas.

Flachglockige Anthomedusen mit 4 oder 6 verzweigten Radiärkanälen, deren Verzweigung im Laufe der Entwicklung unregelmässig zunimmt. Magen mit 4 oder 6 basalen Gonaden tragenden Aussackungen, die in die Kanäle überführen. Hohle Tentakel entsprechend den Endästen der Radiärkanäle. Dazwischen zentripetale Nesselstreifen auf der Enumbrella.

Genus Proboscidactyla Brandt 1838. S. em. Browne 1904.

Williade mit 4 wiederholt verzweigten Radiärkanälen. *Willia* (non Forbes) Mc Crady 1857 und Nachfolger (s. Spezies synonymie). *Willetta, Dyscannota, Proboscidactyla, Dicranocanna* Haeckel 1879. *Proboscidactyla* und *Willia* A. Agassiz 1865. *Proboscidactyla* Murbach und Shearer 1903.

Proboscidactyla flavicirrata Brdt. 1838, p, 390, Taf. XIX. A. Ag. 1865, p. 173, Fig. 280—282. P. flavi-(brevi-)cirrata Haeckel 1879, p. 159 u. 160, Browne 1904, p. 726. Murbach und Shearer 1903, p. 178.

Hierher als sprossende (Jugend?)form *Willsia spec.* Huxley 1877, p. 120, Fig. 17. *Proboscidactyla tropica* Browne 1904, p. 727. *Proboscidactyla flavicirrata* var. *stolonifera* Maas. Hydromedusen der Sibogaexpedition.

Eventuell hierher gehörig:

Willia occidentalis Fewkes (1889, p. 109, pl. V). Proboscidactyla occidentalis Browne (1904, p. 726) als jüngeres Stadium, zwischen der sprossenden und der erwachsenen Form stehend.

Ferner?:

Proboscidactyla varians Browne 1904, p. 728, pl. LIV, Fig. 1 u. 2.

Proboscidactylu ornata Mc Crady 1857.

Willia ornata Mc Crady 1857, p. 47, pl. IX, Fig. 9, 10, 11. Willia ornata A. Agassiz 1865, p. 171, Fig. 274a — 279. Willia ornata Fewkes 1882, p. 299, Fig. 22 u. 23. Dicranocanna furcillata Haeckel 1879, p. 156. Dyscannota dysdipleura Haeckel 1879, p. 152. Willetta ornata Haeckel 1879, p. 157. Willia ornata A. G. Mayer 1904, p. 13.

Hierzu sprossende (Jugend?)form oder Varietät:

Proboscidactyla gemmifera Fewkes 1882.

Willia ornata Brooks 1882, p. 144. Willia gemmifera Fewkes 1882, p. 300, pl. I. Dyscannota gemmifera Mayer 1900, p. 47, pl. VIII. Willia ornata Mayer 1904, p. 13.

Genus Willia Forbes 1848.

Williade mit 6 Hauptradiärkanälen.

Willia stellata Forbes 1846.

Willsia stellata Forbes 1848, p. 19, pl. I, Fig. 1. Willsia stellata Gosse 1853, p. 359. Willsia cornubica Peach 1807, p. 357. Lar sabellarum! Browne 1896, p. 468.

Willia mutabilis Browne 1902, p. 180.

Zu den

Leptomedusen

gehörig; den Thaumantiaden anzuschliessen:

Familie **Berenicidae** Eschscholtz 1829. non Haeckel 1879.

Cannotinae partim Délage und Herouard 1901. Berenicidae sens. em. Maas.

Leptomedusen mit 4, 6 (mit ziemlich regulär) verzweigten Radiärkanälen, die die Gonaden tragen, mit zahlreichen Ten-

takeln und dazwischen Kolben am Schirmrand, keine zentripetalen Nesselstreifen.

A. Mit 4 Hauptkanälen.

Genus Staurodiscus Haeckel 1879.

Jeder Hauptkanal mit nur einem Paar Seitenäste, die wie der Hauptast Gonaden tragen und eventuell den Ringkanal erreichen (Genus Cannota Haeckel). 12 Haupttentakel, dazwischen zahlreiche Kolben.

Staurodiscus tetrastaurus Haeckel 1879, p. 145, T. IX, Fig. 1, 2, 3.

Inkl. Staurodiscus heterosceles Haeckel 1879, p. 146. Staurodiscus tetrastaurus Mayer 1900, p. 46, pl. 18, 19.

Staurodiscus nigricans A. G. Mayer 1899, p. 164, pl. 4, Fig. 11, 12.

Cannota dodecantha Haeckel? 1879, p. 151.

Genus Berenice Pér. und Les. 1809.

S. em. Haeckel 1879. S. restr. Maas.

Mit 4 sehr vielfach gegabelten Radiärkanälen, die an den distalen Gabelungen die Gonaden tragen. Mit (oder ohne?) Randkolben, zahlreiche Tentakel.

Berenice rosea Eschscholtz 1829.

Berenice capillata Haeckel 1879.

Berenice Huxleyi Haeckel 1879.

Die Arten, wie die ganze Gattung bedürfen der Nachuntersuchung an neu aufzufindendem Material.

Genus Tetracannota Mayer 1900.

Mit 16 Radiärkanälen, die sich zu 4 Gruppen von je 4 Kanälen verteilen. Gonaden auf den Radiärkanälen aber auf deren proximalem Teil. Mit 16 grossen und dazwischen je 7 = 112 kleineren Tentakeln.

Tetracannota collapsa Mayer 1900, p. 46, pl. 7, 8, Fig. 14, 15, 16.

Tetracannota collapsa Mayer 1904, p. 12, Fig. 32.

B. Mit 6 Hauptkanälen.

Genus Toxorchis Haeckel 1879.

Inkl. *Cladocanna* s. ampl. Haeckel 1879.

Mit 6 wiederholt gegabelten Kanälen, mit Gonaden an den Gabelungen der Kanäle, mit zahlreichen Tentakeln und Kolben.

Toxorchis arcuatus Haeckel 1879, p. 157, T. IX, Fig. 6, 7, 8.

Toxorchis thalassina? Pér. 1809.

Cladocanna thalassina Haeckel 1879. Cladocanna polyclada Haeckel 1879. Cladocanna polyclada Lendenfeld 1884.

C. Radiärkanäle unregelmässig an Zahl und in Verzweigung.

Genus Dipleurosoma Boeck 1866. Haeckel 1879. S. em. Browne 1900. *Ametrangia* Allman 1873.

Mit unregelmässigen (mitunter zur Sechszahl neigenden) Kanälen. Gonaden im proximalen Teil der Kanäle. Mit zahlreichen Tentakeln.

Dipleurosoma typicum Boeck 1866.

Dipleurosoma typica Boeck 1866, p. 131, Fig. 1—3. Dipleurosoma stuvitzi Boeck. Dipleurosoma amphitectum Haeckel 1879, p. 155, T. IX, Fig. 9. Dipleurosoma irregulare Haeckel 1879, p. 636. Dipleurosoma typicum Haeckel 1879, p. 155. Dipleurosoma hemisphaerica Browne 1897. Dipleurosoma typicum Browne 1900.

Dipleurosoma pacificum Ag. und Mayer.

Dipleurosoma pacifica Ag. und Mayer 1902, p. 148, pl. 3, Fig. 13, 14.

Familie **Polyorchidae** Ag. 1865. Haeckel s. a. 1879 S. restr. Maas.

Leptomedusen von hochglockiger Form, mit gefiederten Radiärkanälen, die am Grund der Subumbrella die herabhängenden Gonaden tragen. Fiederäste ohne Gonaden. Tentakel hohl, sehr zahlreich, mit Ocellarfleck.

Genus Polyorchis Agassiz 1862.

Melicertum? partim Eschscholtz 1829. Polyorchis s. a. Haeckel 1879. Polyorchis s. restr. Maas.

Polyorchide mit ungeteiltem Schirmrand. Fiederäste der Radiärkanäle einfach; Ringkanal ohne Zentripetalkanäle. Gonaden als Schläuche in grösserer Zahl (bis 8) an der Basis eines jeden Radiärkanals.

Polyorchis penicillata Eschscholtz.

Melicertum penicillatum Eschscholtz 1829, p. 106, T. VIII, Fig. 4. Polyorchis penicillata? Agassiz 1865, p. 119, Fig. 179 bis 183. Polyorchis penicillatus und Polyorchis pinnatus Haeckel 1879, p. 150, T. VIII, Fig. 13. Polyorchis pennicillata? Fewkes 1889. Polyorchis minuta? Murbach und Shearer 1903, p. 174, pl. XIX, Fig. 3.

Genus Spirocodon Haeckel 1879.

Spirocodon Goette 1886. *Gonomaeandrus* Kirkpatrick 1903.

Polyorchide mit festoniertem, tiefgelapptem Schirmrand. Fiederäste der Radiärkanäle dendritisch verzweigt; Ringkanal mit Zentripetalkanälen. Gonaden im proximalen Teil der Radiärkanäle, als je ein vielfach spiralig gewundener Schlauch.

Spirocodon saltatrix Tilesius.

Medusa saltatrix Tilesius 1818, p. 554, T. XVIII. Polyorchis saltatrix und Spirocodon saltatrix Haeckel 1879. Spirocodon saltatrix Goette 1887, p. 832. Gonomaeandrus chrysostephanus Kirkpatrick 1903, p. 615, pl. XXXIII. Spirocodon saltatrix Kirkpatrick 1904.

Literaturverzeichnis.

Agassiz A., 1865. North American Acalephae, Ill. Catalogue Mus. Comp. Zool. Harvard, No. III. Cambridge. U. S. A.

Agassiz A. and Mayer A. G., 1899. Acalephs from the Fiji Islands. Bull. Mus. Comp. Zool. Harvard, Vol. XXXII, pp. 157—189, 17 Pls.

— — 1902. Reports on the Scientific Results of the Expedition to the Tropical Pacific . . . in the Albatross, Part III. Medusae. Mem. Mus. Comp. Zool. Harvard, Vol. XXVI, p. 139—176, Pl. I—XIII.

Agassiz L., 1860—1862. Constributions to the Natural History of the United States America. Vol. III—IV. Boston.

Allman G. J., 1871—1872. A Monograph of the Gymnoblastic or Tubularian Hydroids. Ray Soc. London.

Blainville H. M. de, 1834. Manuel d'Actinologie ou de Zoophytologie. Paris.

Boeck A., 1866. Om to tilsyneladende bilateral symmetriske Hydromeduser. For. Vidensk. Medelser, Kjöbenhaven, No. 10, 11.

Brandt J. F., 1838. Ausführliche Beschreibung der von C. H. Mertens auf seiner Weltumsegelung beobachteten Schirmquallen. Mém. Acad. Imp. St. Petersbourg, Sér. 6, Tom. II (Sci. Nat.), p. 237—411, Taf. I—XXXI.

Brooks W. K., 1880. Budding in Free Medusae. American Naturalist, Vol. XIV, pp. 670—671.

— 1882. List of Medusae, found at Beaufort, North Carolina during the Summers of 1880—1881. Studies Biol. Lab. Johns Hopkins Univ., Vol. II, p. 135—146.

— 1903. On a New Genus of Hydroid Jelly-Fishes. Dichotomia. Proc. Am. Phil. Soc., Vol. 42, p. 11—14, pl., Philadelphia.

Browne E. T., 1896. On British Hydroids and Medusae. Proc. Zool. Soc. 1896, pp. 459—500, Pls. XVI—XVII. London.

— 1897. On British Meduse, ibid. 1897, p. 816—835, pl. XLVIII u. XLIX.

— 1898. On British Medusae. Proc. Zool. Sco. 1897, p. 816—835. Pls. XLVIII—XLIX.

— 1900. The Medusae. In: TheFauna and Flora of Valencia Harbour. Proc. Roy. Ir. Acad., Ser. 3, Vol. V, p. 694—737, pl. XX u. XXI.

Browne E. T., 1902, A Preliminary Report on Hydromedusae from the Falkland Islands. Ann. and Mag. Nat. Hist. Ser. 7, Vol. IX, p. 272—284.

— 1904. Hydromedusae, with a Revision of the Williadae and Petasidae. In: Fauna and Geography of the Maldive and Laccadive Archipelagoes. London. Vol. II, part 3, p. 722—749, pl. LIV—LVII.

Chamisso A. de, et Eysenhardt C. G., 1820. De Animalibus quibusdam e Classe Vermium Linneana, in circumnavigatione Terrae ... annis 1815—1818 peracta, observatis. Nova Acta K. Leop. Carol. Acad. Deutsch. Naturforscher, Bd. X.

Délage Y. et E. Hérouard, 1901. Traité de Zoologie Concrète. T. II, Part II, Les Coelentérés.

Eschscholtz F., 1829. System der Acalephen. Berlin.

Fewkes J. W., 1882. Notes on Acalephs from the Tortugas, with a description of New Genera and Species. Bull. Mus. Comp. Zool., Vol. IX, p. 251—290, Pl. I—VII.

— 1882. On the Acalephae of the East Coast of New England. Bull. Mus. Comp. Zool. Harvard, Vol. IX, p. 291—310, Pl. I.

— 1889. On a few Californian Medusae. Am. Nat., Vol. XXIII.

— 1889. New Invertebrata from the Coast of California. Bull. Essex. Institute, Vol. XXI, p. 99—146, Pls. I—VII, Salem U. S. A.

Forbes E., 1848. A Monograph of the British Naked-Eyed Medusae: Ray. Soc. London.

Gegenbaur C., 1856. Versuch eines Systemes der Medusen. Zeitschr. wiss. Zool., Bd. VIII, p. 202—273, Taf. VII—X.

Goette A., 1886. Verzeichnis der Medusen, welche von Dr. Sander. Stabsarzt auf S. M. S. Prinz Adalbert, gesammelt wurden. Sitzungsbericht Preuss. Akad. Wiss., Berlin, XXXIX, p. 831—837.

Gosse P. H., 1853. A Naturalists Rambles on the Devonshire Coast. London.

Goto S., 1903. The Craspedote Medusa Olindias and some of its Natural Allies. Mark Anniversary Volume, p. 1—22, p. I—III.

Günther R. T., 1903. Report on the Coelenterata from the intermediate, Waters of the N. Atlantic .... Ann. Mag. Nat. Hist. (Ser. 7) Vol. 11, p. 420—430, Pl. 9, 10.

Haeckel E., 1879—1880. Das System der Medusen. Jena.

Hartlaub Cl., 1897. Die Hydromedusen Helgolands. Wiss. Meeresuntersuchungen. Kiel. Bd. II, p. 449—512, T. XIV—XXIII.

Huxley T. H., 1877. A Manual of the Anatomy of Invertebrated Animals. London,

Kirkpatrick R., 1903. Notes on some Medusae from Japan. Ann. and Mag. Nat. Hist. Ser. 7, Vol. XII, p. 615—621, Pl. I.

Kirkpatrick R., 1904. A Correction to „Notes on some Medusae from Japan". Ibid. 7. Ser., Vol. 13, p. 80.

Lendenfeld R. von, 1884. The Australian Hydromedusae. Part V. The Hydromedusinae, Hydrocorallinae and Trachomedusae. Proc. Linn. Soc. New South Wales, Vol. IX, p. 581 ff.

— 1887. Descriptive Catalogue of the Medusae of the Australian Seas. Sidney, p. II. The Hydromedusae.

Lesson R. P., 1843. Histoire naturelle des Zoophytes Acaléphes Paris.

Maas O., 1893. Die craspedoten Medusen. Ergebnisse der Plankton-Expedition „National", Bd. II, K c, p. 107, Taf. 1–8.

Mayer A. G., 1900. Some Medusae from the Tortugas, Florida. Bull. Mus. Comp. Zool., Vol. XXXVII, p. 11–82, Pl. I–XLIV.

— 1904. Medusae of the Bahamas. Mém. Nat. Sc. Brooklyn Inst. Vol. I, p. 1–33, pl. I–VII.

Mc Crady J., 1858. Gymnophthalmata of Charleston Harbour. Proc. Elliott Soc. Vol. I, p. 103–221, Pl. VIII–XII. Charleston U. S. A.

Murbach L. and Shearer C.. 1903. On Medusae from the Coast of British Columbia and Alaska. Proc. Zool. Soc. 1903, Vol. II, pp. 164—192, Pls. XVII–XXII, London.

Peach C. W. On New British Naked-Eyed Medusae. Journ. R. Inst. Cornwall, Vol. II, p. 355–360, Pl. I–II.

Perkins H. F., 1903. The Development of Gonionema Murbachii. Proc. Ac. N. Sc. Philadelpkia. Vol. 54, p. 750–790, 21. Fig., Pl. 31–34.

Péron F. et Lesueur C., 1809. Tableau des caractères génériques et spécifiques de toutes les espèces de Méduses connues jusqu'à ce jour. Ann. Mus. Hist. Nat. Tom XIV, p. 325—366. Paris.

Quoy J. R. et Gaimard P., 1833. Voyage de l'Astrolabe. Zoologie, Tom IV, Paris.

Tilesius, 1818. De nova Medusarum specie. Mém. Acad. St. Petersb. Taf. VI, p. 550—565, Taf. XVIII.

Vanhöffen E., 1902. Die craspedoten Medusen der deutschen Tiefsee-Expedition. I. Trachymedusen. Ergebnisse deutsch. Tiefsee-Exp. Bd. III, p. 53–86, Taf. IX–XII.



Das Imaginäre in der Geometrie der konfokalen Flächen II. Ordnung.

Von **E. von Weber.**

(*Eingelaufen 5. November.*)

Die reellen Erzeugenden der Flächen eines reellen konfokalen Systems II. Ordnung besitzen die charakteristische Eigenschaft, dass die zwei konjugierten Minimalebenen, die durch je eine dieser Geraden gehen, alle Systemflächen berühren. Aus dieser Bemerkung fliesst nun, wie wir im folgenden zeigen wollen, eine Methode, um das Imaginäre in der Geometrie der konfokalen Flächen II. Ordnung auf die einfachste und natürlichste Weise reell-geometrisch zu deuten, d. h. also alle komplexen Raumgebilde, die in der algebraisch-projektiven Theorie des konfokalen Systems eine Rolle spielen, der unmittelbaren Anschauung und der elementar-geometrischen Konstruktion zugänglich zu machen.

Den Ausgangspunkt bilden einige Sätze aus der Geometrie der Speere (§ 1), die ich an anderer Stelle[1]) begründet habe. Da die ∞^2 orientierten Erzeugenden der Systemflächen ein elliptisches Gebilde (§ 2) darstellen, so ergeben sich viele unserer Sätze durch einfache dualistische Übertragung der von A. Clebsch[2]) und A. Harnack[3]) mit Hilfe der elliptischen Funktionen gewonnenen, von A. Voss[4]) und H. Schröter[5]) direkt begründeten

[1]) „Die komplexen Bewegungen." Lpz. Ber., 1903, p. 384.

[2]) J. f. Math., 63, p. 94 u. 189.

[3]) Math. Ann., 12, p. 47.

[4]) Math. Ann., 10, p. 143.

[5]) Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumkurve IV. Ordnung, 1. Spezies. Lpz. 1890.

Theoreme über Raumkurven IV. Ordnung erster Art (§ 3 und 4). Von neuen Resultaten hebe ich hervor: Die geometrische Darstellung und konstruktive Behandlung der verschiedenen Arten von Systemflächen, insbesondere der nullteiligen und komplexen (§ 3, 4); die Einführung der Henriciflächen (§ 4), die Konstruktion der Minimalerzeugenden und komplexen Nabelpunkte (§ 5), die Betrachtung der zyklischen Quadrupel und Speervierseite (§ 6), ferner einige, wie ich glaube, neue Sätze über die Krümmungskreise des Kegelschnitts (§ 7), endlich mehrere auf die Striktions- und Mittelfläche bezügliche Ergebnisse (§ 7), durch die unsere Untersuchung mit der differentiellen Liniengeometrie und der Theorie der Minimalflächen zusammenhängt.

§ 1. Speere und Zyklen.

1. Sind $u\,v\,w\,\bar{\omega}$ komplexe Konstante, die der Bedingung

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

genügen, ohne dass $u\,v\,w$ gleichzeitig verschwinden, so stellt die Gleichung

$$ux + vy + wz + \bar{\omega} = 0 \tag{1}$$

in rechtwinkligen Koordinaten $x\,y\,z$ eine Minimalebene dar, die mit ihrer konjugierten eine im Endlichen liegende reelle Gerade g gemein hat. Diese betrachten wir als Trägerin zweier orientierter Gerader oder „Speere" (Study), und ordnen der Minimalebene (1) denjenigen dieser Speere zu, der die Richtungskosinus:

$$\frac{v'w'' - w'v''}{\varrho}, \quad \frac{w'u'' - u'w''}{\varrho}, \quad \frac{u'v'' - v'u''}{\varrho}; \quad (\varrho = u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

besitzt.[1]) Vermöge dieser Verabredung ist jedem Speer σ des Raums eine Minimalebene (σ) umkehrbar eindeutig zugewiesen, so dass wir $u\,v\,w\,\bar{\omega}$ auch als „Koordinaten des Speers σ" bezeichnen können. Konjugierten Minimalebenen entsprechen entgegengesetzte, parallelen Minimalebenen syntaktische (d. i.

---

[1]) Es ist $u = u' + iu''$ etc. gesetzt.

gleichgerichtete) Speere. Jedes Bündel syntaktischer Speere repräsentiert einen und nur einen Punkt des unendlich fernen Kugelkreises, den wir im folgenden mit $\varkappa_\infty$ bezeichnen.

2. Ein komplexer Punkt P mit den rechtwinkligen Koordinaten

$$a + i a', \quad b + i b', \quad c + i c'$$

kann reell repräsentiert werden durch den „Pfeil $[A A']$", d. h. die Strecke mit dem „Anfangspunkt" $A(a\,b\,c)$ und dem „Endpunkt" $A'(a + a',\ b + b',\ c + c')$ oder auch (nach E. Laguerre)[1]) durch den Ort aller reellen Punkte, die von P die Entfernung null haben, nämlich durch den Kreis mit dem Zentrum A, dessen Ebene zur Geraden $A A'$ senkrecht und dessen Radius r gleich der Strecke $A A'$ ist; diesen Kreis $\varkappa$ versehen wir mit einer Umlaufsrichtung, die von A' aus betrachtet ebenso erscheint, wie von einem Punkte der positiven z-Achse aus betrachtet die Umdrehung, durch welche die $+x$-Achse auf dem kürzesten Wege in die $+y$-Achse übergeführt wird. Die Speere der ∞^2 Minimalebenen, die durch den Punkt P gehen, sind dann die Erzeugenden der ∞^1 konfokalen einschaligen Rotationshyperboloide, die den Kreis $\varkappa$ zur Fokalkurve haben; jede dieser Erzeugenden ist so orientiert, dass ihre Projektion auf die Ebene von $\varkappa$ den Punkt A in dem gleichen Sinne umkreist wie $\varkappa$ selbst. Unter diesen Speeren befinden sich auch die im selben Sinne wie $\varkappa$ orientierten Tangenten dieses Kreises. Diese ∞^2 Speere sollen uns künftig neben dem Kreis $\varkappa$ und dem Pfeil $[A A']$ als reelle Repräsentation des komplexen Raumpunktes P dienen; wir bezeichnen diesen Inbegriff von ∞^2 Speeren als einen „Zyklus", $[A A']$ als den zugehörigen Pfeil, die reelle Verbindungslinie $A A'$ der konjugiert komplexen Punkte $P \bar{P}$ als die „Achse", A als das „Zentrum", $\varkappa$ als den „Äquator", r als den „Radius" des Zyklus. Der entgegengesetzte Zyklus, der aus dem Gegebenen durch Umkehrung des Sinnes aller Speere hervorgeht, reprä-

[1]) Nouv. Ann. (2), 11 (1872), p. 14—21, 108—118, 241—254.

sentiert den konjugierten Punkt $\bar{P}$; der zugehörige Pfeil $[A A'']$ liegt so, dass A die Strecke $A' A''$ halbiert.

3. Ist P reell, so reduziert sich der zugehörige Zyklus auf das Speerbündel durch P. Ein „ausgearteter Zyklus" besteht aus zwei verschiedenen Bündeln syntaktischer Speere und repräsentiert einen nicht auf $\varkappa_\infty$ liegenden reellen oder komplexen unendlich fernen Punkt, je nachdem die beiden Bündel entgegengesetzt sind oder nicht.

4. Ist ein Speer σ und ein reeller Punkt A gegeben, so erfüllen die Endpunkte A' der Pfeile $[A A']$, welche je einen komplexen Punkt der Minimalebene (σ) repräsentieren, deren zugehörige Zyklen also den Speer σ enthalten, eine Gerade h, die folgendermassen konstruiert wird: Bedeutet B den Fusspunkt der von A auf σ gefällten Senkrechten, und wird B' so bestimmt, dass die Strecke $A B'$ senkrecht zur Ebene (A, σ) und gleich $A B$ ist, und dass der Speer σ, die von B nach A weisende und die von A nach B' weisende Richtung in analogem Sinne aufeinander folgen wie die positive x-, y-, z-Richtung unseres Koordinatensystems, dann ist h die durch B' parallel zu σ gezogene Gerade.

5. Eine Gerade g, die den Kreis $\varkappa_\infty$ nicht trifft, liegt auf 2 verschiedenen Minimalebenen $(\sigma)(\tau)$; sie kann also durch das zugehörige Speerpaar reell repräsentiert und demgemäss als „die Gerade (σ, τ)" bezeichnet werden. Ist g reell, also σ und τ entgegengesetzt, so werden die komplexen Punkte von g repräsentiert durch den Inbegriff der Pfeile $[A A']$, die ganz auf g liegen.

Ist g hochimaginär, d. h. ohne reelle Punkte, so liegen σ und τ nicht in derselben reellen Ebene; ist die Gerade g niederimaginär, also in einer reellen Ebene e gelegen, und liegt ihr reeller Punkt M im Endlichen, so schneiden sich die Speere σ, τ in ihm. In beiden Fällen erfüllen die Anfangspunkte A der ∞^2 Pfeile $[A A']$, durch welche die auf g liegenden komplexen Punkte repräsentiert werden, eine Ebene e, die „Mittelebene" der Speere σ, τ. Diese Ebene geht durch die Gerade, die sowohl σ als τ senkrecht schneidet, und bildet mit σ und τ

gleiche Winkel, so zwar, dass die Vertikalprojektionen von σ und τ auf e antitaktisch sind. Die Endpunkte A' erfüllen eine zu e parallele Ebene e'. Wenn σ, τ und A gegeben sind, wird A' nach Nr. 4 als Schnitt zweier Gerader gefunden.

Ist g hochimaginär, so bilden die ∞^2 reellen Geraden AA' eine Linienkongruenz (1, 1), die die beiden konjugiert komplexen Geraden $g\bar{g}$ zu Leitlinien hat. Bedeutet g eine niederimaginäre Gerade, so koinzidiert e' mit e, und g ist ganz in der reellen Ebene e enthalten.

Liegt der reelle Punkt M der niederimaginären Geraden g im Unendlichen, dann und nur dann sind die Speere σ und τ antitaktisch und gehen beide durch M hindurch. Die Anfangspunkte A der ∞^2 Pfeile $[AA']$, welche die Punkte von g repräsentieren, erfüllen jetzt die reelle Gerade h, die mit σ und τ in derselben reellen Ebene ε liegt, ihnen parallel läuft und von beiden Speeren denselben Abstand hat. Die Endpunkte A' liegen auf einer zu h parallelen Geraden, die mit h zusammen auf einer zu ε senkrechten Ebene e liegt. Diese letztere Ebene bezeichnen wir in diesem Falle als die „Mittelebene" der Speere σ, τ.

6. Ist g eine Minimallinie, d. h. trifft sie den Kreis $\varkappa_\infty$, so geht nur eine doppelt zählende Minimalebene (σ) durch sie hindurch. Die Anfangs- bezw. Endpunkte der ∞^2 Pfeile $[AA']$, die zu den komplexen Punkten von g gehören, erfüllen wiederum zwei parallele, zu σ senkrechte Ebenen e, e'. Danach kann eine hochimaginäre Minimalgerade reell repräsentiert werden durch einen Speer σ und einen auf ihm liegenden Pfeil $[M_0 M]$; die Ebenen e und e' stehen in den Punkten M_0 bezw. M auf σ senkrecht. Koinzidiert M mit M_0, also e' mit e, so erhält man eine niederimaginäre Minimalgerade, deren reeller Punkt M_0 ist und die von der Minimalebene (σ) aus der zu σ senkrechten, durch M_0 gehenden reellen Ebene e ausgeschnitten wird. Die Figur $(\sigma, M_0 M)$ resp. (σ, M_0) nennen wir die „reelle Repräsentation" unserer Minimallinie.

Projiziert man also den Pfeil $[AA']$ eines komplexen Punktes P senkrecht auf einen Speer σ des zugehörigen Zyklus und sind M_0, M die betreffenden Fusspunkte, so ist $(\sigma, M_0 M)$

eine durch P gehende Minimallinie; berührt der Speer σ den Äquator in M_0, so erhält man insbesondere eine durch P gehende niederimaginäre Minimalgerade (σ, M_0).

Zwei Minimalebenen, deren Speere σ, τ syntaktisch sind, schneiden sich in einer Tangente t des Kreises $\varkappa_\infty$, und irgend zwei Speere desselben syntaktischen Bündels definieren also dieselbe unendlich ferne Gerade t.

7. Drei Speere $\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3$ bestimmen einen sie enthaltenden Zyklus (den Schnittpunkt der Minimalebenen (σ_i)), der mit $(\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3)$ bezeichnet werde. Sein Zentrum A ist der Schnittpunkt der Mittelebenen der drei Speerpaare $(\sigma_i\, \sigma_\varkappa)$, worauf A' nach Nr. 4 gefunden wird. Nur der Fall, dass die 3 Speere derselben reellen Ebene parallel laufen, erfordert besondere Konstruktionen.[1]) Die Annahme, dass zwei der σ_i syntaktisch sind, führt auf ausgeartete Zyklen.

8. Um den Schnittpunkt $[A\,A']$ einer gegebenen Minimalgeraden $(\sigma, M_0\, M)$ mit einer gegebenen Minimalebene (τ) zu finden, konstruiere man die parallelen Ebenen e und e', welche die Anfangs- bezw. Endpunkte der zu der Geraden (σ, τ) gehörigen Pfeile enthalten (Nr. 5), ferner die Ebenen e_0 und e_0', die im Punkte M_0 bezw. M auf σ senkrecht stehen. Ist h die Schnittlinie der Ebenen e, e_0, h' diejenige der Ebenen e', e_0', so ist der Ort der Endpunkte der Pfeile, welche zu Punkten der Geraden (σ, τ) gehören und deren Anfangspunkte auf h liegen, eine in e' gelegene Gerade h'', die aus h' den Punkt A' ausschneidet; A ergibt sich dann mittels der Bemerkung, dass die Punktreihen h und h'' ähnlich sind.

Zwei Zyklen P, Q haben einen oder zwei Speere gemein, je nachdem die Gerade PQ den Kreis $\varkappa_\infty$ trifft oder nicht. Auf die elementar-geometrische Konstruktion dieser Speere kann hier nur verwiesen werden.[2])

---

[1]) Vgl. meine Arbeit, Lpz. Ber., 1903, p. 393 f.

[2]) Lpz. Ber., 1903, p. 392.

§ 2. Das konfokale Speersystem als elliptisches Gebilde.

9. Ist ein reelles konfokales System Σ

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1\ (a^2>b^2>c^2>0) \tag{1}$$

vorgelegt, so werden die ∞^2 „Speere des Systems Σ" oder orientierten Erzeugenden der in (1) enthaltenen einschaligen Hyperboloide, d. h. also alle Minimalebenen, die der Relation

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=\tilde{\omega}^2$$

genügen, durch die Formeln definiert:

$$\begin{aligned}\varrho u &= 1-k\,sn^2\varphi; \qquad \varrho v = i(1+k\,sn^2\varphi)\\ \varrho w &= -2\,|\sqrt{k}|\,sn\,\varphi; \quad \varrho\tilde{\omega}=|\sqrt{a^2-b^2}|\,cn\,\varphi\cdot dn\,\varphi,\end{aligned} \tag{2}$$

worin das Argument φ eine unabhängige komplexe Variable bedeutet, während der Modul k der elliptischen Funktionen $sn\,\varphi$, $cn\,\varphi$, $dn\,\varphi$ unter Gebrauch der Abkürzung:

$$\alpha=\frac{a^2+b^2-2c^2}{a^2-b^2}$$

durch die Gleichung:

$$k=\left|\sqrt{\alpha-|\sqrt{\alpha^2-1}|}\right|$$

bestimmt ist. Die Perioden von $sn\,\varphi$ bezeichnen wir wie üblich mit $4K$, $2iK'$.

10. Der durch (2) definierte Speer des Systems Σ werde kurz der „Speer φ" genannt;[1]) zwei Speere φ, ψ sind dann und nur dann identisch, wenn $\varphi\equiv\psi$.[2]) Der zu dem Speer φ entgegengesetzte Speer hat das Argument $-\bar{\varphi}+iK'$. Aus dem Speer φ erhält man durch Umwendung um die x-, y- und z-Achse bezw. die Speere

---

[1]) Die Buchstaben φ, ψ, χ reservieren wir für die Argumente der elliptischen Funktionen, die Buchstaben σ, τ, $\tilde{\omega}$ zur Bezeichnung der Speere selbst.

[2]) Das Kongruenzzeichen bezieht sich, wenn nichts anderes bemerkt wird, auf die Moduln $4K$, $2iK'$.

$$\varphi + i K', \ \varphi + 2K + iK', \ \varphi + 2K,$$

ferner durch Spiegelung an den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und am Koordinatenanfangspunkt O bezw. die Speere

$$\bar{\varphi} + 2K, \ \bar{\varphi}, \ \bar{\varphi} + iK', \ \bar{\varphi} + 2K + iK'.$$

Vier Speere $\varphi_1 \ldots \varphi_4$ liegen zyklisch, d. h. die betreffenden Minimalebenen gehen durch einen Punkt, dann und nur dann wenn $\Sigma \varphi_i \equiv 0$. Damit also die Speere $\varphi' + i\varphi''$, $\psi' + i\psi''$ einen reellen Punkt gemein haben, ist notwendig und hinreichend, dass sie mit ihren entgegengesetzten zusammen einen Zyklus bilden, dass also

$$\varphi'' + \psi'' \equiv 0 \text{ oder } K' \pmod{2K'}.$$

11. Die 4 Quadranten der xy-Ebene, welche bezw. von der $+x$- und $+y$-Achse, der $-x$- und $+y$-Achse, der $-x$- und $-y$-Achse, endlich der $+x$- und $-y$-Achse begrenzt werden, bezeichnen wir mit I, II, III, IV. Ferner nennen wir einen Speer nach oben oder unten gerichtet, je nachdem er die xy-Ebene in demselben oder im entgegengesetzten Sinne wie die positive z-Richtung durchsetzt. Endlich sagen wir, ein Speer umwindet die z-Achse positiv oder negativ, je nachdem seine Vertikalprojektion auf die xy-Ebene dem Sinne nach mit der Drehrichtung, die die $+x$-Achse auf dem kürzesten Weg in die $+y$-Achse überführt, übereinstimmt oder nicht.

Bezeichnet man ferner die 4 Intervalle:

$$0 \ldots K \ldots 2K \ldots 3K \ldots 4K$$

bezw. mit $a'\ b'\ c'\ d'$, und die Intervalle

$$0 \ldots \frac{K'}{2} \ldots K' \ldots \frac{3K'}{2} \ldots 2K'$$

mit $a''\ b''\ c''\ d''$, so ergibt sich folgende Tabelle:

$(a'a'')$(II + –); $(b'a'')$(I + –); $(c'a'')$(IV + –); $(d'a'')$(III + –)
$(a'b'')$(II – –); $(b'b'')$(I – –); $(c'b'')$(IV – –); $(d'b'')$(III – –)
$(a'c'')$(III – +); $(b'c'')$(IV – +); $(c'c'')$(I – +); $(d'c'')$(II – +)
$(a'd'')$(III + +); $(b'd'')$(IV + +); $(c'd'')$(I + +); $(d'd'')$(II + +).

Die Zusammenstellung $(d' b'')$ (III — —) besagt z. B.: wenn die reelle Zahl φ' mod. $4\,K$ einem Wert zwischen $3\,K$ und $4\,K$, und φ'' mod. $2\,K'$ einem Wert zwischen $\frac{K'}{2}$ und K' kongruent ist, dann und nur dann schneidet der Speer $\varphi' + i\varphi''$ die xy-Ebene in einem Punkte des Quadranten III, ist nach unten orientiert und umwindet die z-Achse negativ.

12. Auch die Fälle, in denen φ' oder φ'' einer Viertelsperiode gleich ist, können aus obiger Tabelle unmittelbar abgelesen werden. So ergibt sich:

Numeriert man die Quadranten, in die die xz-Ebene durch die x- und z-Achse zerlegt wird, analog wie die der xy-Ebene, so ist der Speer mit dem reellen Argument φ' eine nach oben gerichtete Tangente der Fokalhyperbel von Σ, deren Berührpunkt im Quadranten I, II, III oder IV liegt, je nachdem die Zahl φ' dem Intervall $b'\,d'\,a'\,c'$ angehört. Die Speere, welche die Fokalellipse berühren und die z-Achse negativ bezw. positiv umwinden, sind bezw. durch Argumente der Form $\frac{1}{2}\,i\,K' + \varphi'$, $\frac{3}{2}\,i\,K' + \varphi'$ gekennzeichnet. Der Speer mit dem rein imaginären Argument $i\,\varphi''$ schneidet die negative x-Achse senkrecht; er ist nach oben oder unten gerichtet, je nachdem φ'' in den Intervallen $a''\,d''$ oder $b''\,c''$ liegt, und umwindet die z-Axe positiv oder negativ, je nachdem φ'' den Intervallen $a''\,b''$ oder $c''\,d''$ angehört u. s. w. f.

13. Wir bezeichnen mit 1 und 2 die nach oben gerichteten Speere, die die Fokalhyperbel in den Endpunkten der $-x$- resp. $+x$-Achse berühren, mit 3 und 4 die nach oben orientierten Asymptoten dieser Hyperbel, die mit der $-x$- resp. $+x$-Achse je einen spitzen Winkel bilden, ferner mit 5 6 7 8 die Speere, die die z-Achse positiv umwinden und die Fokalellipse bezw. in den Endpunkten der Halbachsen $+x$, $+y$, $-x$, $-y$ berühren, endlich durch darüber gesetzte Querstriche die jedesmal entgegengesetzten Speere. Dann findet man für die Speere $1\,\bar{1}\,2\,\bar{2}\,3\,\bar{3}\,4\,\bar{4}$ die Argumentwerte:

$0,\ i\,K',\ 2\,K,\ 2\,K + i\,K',\ -K,\ K + i\,K',\ K,\ -K + i\,K';$

und für die Speere $5\,\bar{5}\,6\,\bar{6}\,7\,7\,8\,\bar{8}$ die folgenden:

$$2K - i\frac{K'}{2},\ 2K + i\frac{K'}{2},\ -K - i\frac{K'}{2};\ K + i\frac{K'}{2},\ -i\frac{K'}{2},\ i\frac{K'}{2}$$

$$K - i\frac{K'}{2},\ -K + i\frac{K'}{2}.$$

Diese 16 „ausgezeichneten" Speere entsprechen dualistisch den 16 Wendeberührpunkten der Raumkurve IV. Ordnung.[1])

§ 3. Involutorische Speertransformationen.

14. Lässt man jedem Argumentwert φ ein ψ vermöge der Formel

(1) $$\varphi + \psi = C$$

entsprechen, so erhält man eine involutorische Transformation $\mathfrak{R}$, die das Speersystem Σ in sich überführt; die so definierten ∞^2 Speerpaare φ, ψ repräsentieren die Erzeugenden einer Regelschar II. Ordnung des konfokalen Systems,[2]) die wir kurz als die „Regelschar C oder $\mathfrak{R}$" bezeichnen wollen, während C der „Argumentwert" dieser Schar und ψ der „Begleitspeer des Speeres φ in Bezug auf die Regelschar C" heissen möge. Die „adjungierte", d. h. auf derselben F_2 liegende Schar ist durch den Argumentwert $-C$ charakterisiert. Die einzelne Fläche II. Ordnung des konfokalen Systems wird demnach mit $\pm C$ zu bezeichnen sein. Kongruente Werte von C (und nur solche) liefern dieselbe Regelschar.

15. Der Zusammenhang zwischen dem Argumentwert C einer Regelschar und dem Parameter λ der zugehörigen F_2 (Nr. 9) wird durch die Formel

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{a^2 - b^2}{2}\,(cn\,\gamma\, dn\,\gamma + k\, sn^2\,\gamma)$$

hergestellt, wo $\gamma = C - iK'$ gesetzt wurde. Die konfokale Flächenschar selbst erscheint so als elliptisches Gebilde auf

---

[1]) H. Schröter, „Grundzüge", § 11.

[2]) A. Harnack, Math. Ann., 12, p. 71 ff.

einer über der komplexen λ-Ebene ausgebreiteten zweiblätterigen Riemann'schen Fläche, deren Verzweigungspunkte den 4 ausgearteten Flächen des Systems entsprechen. Diese sind: der nullteilige Fokalkegelschnitt, die Fokalhyperbel, die Fokalellipse und der Kreis $\varkappa_\infty$; sie gehören bezw. zu den Argumentwerten:

$$2K + iK',\ iK',\ 0,\ 2K.$$

Die ∞^2 komplexen Tangenten eines Fokalkegelschnitts werden also definiert durch die ∞^2 Paare von Speeren des Systems Σ, die sich auf der betreffenden Hauptebene schneiden und dieselbe zur Mittelebene (Nr. 5) haben. Die ∞^2 Paare syntaktischer Speere des Systems Σ repräsentieren die unendlich fernen Tangenten des Kreises $\varkappa_\infty$ (Nr. 6 a. E); die beiden Träger eines solchen Paares gehen durch Spiegelung am Koordinatenanfang O auseinander hervor.

Wir wollen die Transformationen, die den Speer φ bezw. in die Speere

$$-\varphi + 2K + iK',\ -\varphi + iK',\ -\varphi,\ -\varphi + 2K$$

verwandeln, mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ resp. bezeichnen; sie entstehen, indem man den zu φ entgegengesetzten Speer bezw. an den Ebenen $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$ und an O spiegelt.

16. Durch zwei gegebene Speere σ, τ des Systems Σ ist eine die komplexe Gerade (σ, τ) enthaltende Regelschar $\mathfrak{R}$ des konfokalen Systems eindeutig bestimmt. Um den Speer τ_1 zu konstruieren, der vermöge der Transformation $\mathfrak{R}$ einem gegebenen Speer σ_1 des Systems entspricht, verstehe man unter $(\sigma_i' \tau_i')$ die Speerpaare, die aus (σ, τ) vermöge der Transformationen $\mathfrak{A}_i$ hervorgehen. Diese Paare sind i. A. verschieden; sie reduzieren sich dann und nur dann auf bloss zwei verschiedene, wenn τ aus σ durch Spiegelung an O oder an einer der Hauptachsen hervorgeht, und definieren Gerade der zu $\mathfrak{R}$ adjungierten Regelschar. In allen Fällen ist τ_1 der zweite gemeinsame Speer der Zyklen $(\sigma\, \sigma_i'\, \tau_i')$. Ebenso ergibt sich die Lösung der Aufgabe: Wenn drei beliebige Speere $\sigma\, \sigma'\, \sigma''$ des Systems Σ gegeben sind, den vierten Speer σ''' zu finden, den der Zyklus

$(\sigma\,\sigma'\,\sigma'')$ mit dem Speersystem Σ gemein hat. Es ist nämlich σ''' der zweite gemeinsame Speer der Zyklen $(\sigma_i\,\sigma_i'\,\sigma'')$, wenn $\sigma_i\,\sigma_i'$ das Speerpaar bedeutet, das aus $\sigma\,\sigma'$ durch die Transformation $\mathfrak{A}_i$ entsteht.

17. Die Regelschar $\mathfrak{R}$ der Nr. 14 liegt auf einer reellen Fläche des konfokalen Systems, wenn C eine der vier Formen

$$C',\; C'+iK',\; i\,C'',\; 2K+i\,C''$$

besitzt, wo C', C'' reelle Konstante bedeuten. Die beiden ersten Formen gehören zu den ovalen Flächen des Systems, und zwar die erste zu den Ellipsoiden, die zweite zu den zweischaligen Hyperboloiden. Durch die dritte Form der Konstanten C sind die einschaligen Hyperboloide, durch die vierte die nullteiligen Flächen des Systems definiert. Nur die ovalen Flächen des Systems besitzen niederimaginäre Erzeugende, und alle Erzeugende einer solchen Fläche sind niederimaginär; die zugehörigen ∞^2 Speerpaare sind dadurch gekennzeichnet, dass die beiden Speere σ, τ eines solchen Paares sich in je einem Punkte der ovalen Fläche schneiden und daselbst entweder beide aus dem Innern der Fläche austreten oder beide in dasselbe eintreten, je nachdem die komplexe Gerade $(\sigma,\,\tau)$ dem einen oder andern Erzeugendensystem der Fläche angehört.

18. Den Inbegriff der ∞^1 Speere, deren Argumentwerte die Form $i\,\varphi''+\varrho$ besitzen, wo φ'' eine reelle Konstante, ϱ eine reelle Variable bedeutet, nennen wir eine „Kette 1. Art". Diese Kette umwindet die z-Achse positiv oder negativ, je nachdem φ'' mod. $2K'$ den Intervallen $a''\,b''$ oder $c''\,d''$ angehört, und ist nach oben oder unten orientiert, je nachdem φ'' in den Intervallen $a''\,d''$ oder $b''\,c''$ liegt (Nr. 11). Die entgegengesetzte Kette wird durch $i\,(\varphi''+K')+\varrho$ dargestellt. Die Ketten 1. Art, die in der Regelschar $i\,C''$ enthalten sind, werden durch die Ausdrücke

$$\varrho+\tfrac{i}{2}\,(C''+K')$$

definiert. Alle übrigen ∞^2 Erzeugenden einer solchen Regelschar, ferner alle Erzeugenden der nullteiligen und komplexen Flächen des konfokalen Systems sind hochimaginär.

19. Bewegt sich der Speer φ auf einer reellen Regelschar $i D''$, so beschreibt sein Begleitspeer in Bezug auf die Schar $i C''$ wiederum eine Regelschar mit dem Argumentwert $i(2C'' - D'')$, Dies ist ein Spezialfall des allgemeinen Satzes: Liegt die komplexe Gerade (σ, τ) auf der Regelschar C, und sind σ_1, τ_1 die Begleitspeere von σ, τ in Bezug auf die Regelschar C_0, so liegt die komplexe Gerade (σ_1, τ_1) auf der Regelschar D, wo C und D durch die Relation

$$C + D = 2 C_0 \tag{2}$$

verknüpft sind, d. h. die Speertransformation $\varphi + \psi = C_0$ begründet eine involutorisch-eindeutige Transformation des in Nr. 15 genannten elliptischen Gebildes in sich. Hierbei bleiben vier Regelscharen fest, die bezw. die Argumentwerte

$$C_0,\ C_0 + i K',\ C_0 + 2K,\ C_0 + 2K + iK' \tag{3}$$

besitzen.

20. Der Übergang von einer beliebigen Regelschar C_0 zu einer der drei übrigen Regelscharen (3) ist mit einer involutorischen Transformation der Flächen (nicht bloss der Regelscharen) des konfokalen Systems unter sich äquivalent. Die so definierten Involutionen nennen wir $J_1\, J_2\, J_3$; die zugehörigen Transformationsgleichungen des Parameters λ (Nr. 9) entstehen aus:

$$\lambda \lambda' - (\lambda + \lambda') a^2 + a^2 b^2 + a^2 c^2 - b^2 c^2 = 0 \qquad (J_1)$$

durch zyklische Vertauschung der Buchstaben $a\ b\ c$. Bei der Involution J_1 bleiben fest: das einschalige Hyperboloid $\pm i \frac{K'}{2}$ und die nullteilige Fläche $\pm \left(2K + i \frac{K'}{2}\right)$; bei der Involution J_2 das Ellipsoid $\pm K$ und das zweischalige Hyperboloid $\pm (K + iK')$; endlich bei J_3 die beiden konjugiert komplexen Flächen $\pm \left(K + \frac{iK'}{2}\right)$ und $\pm \left(K - i \frac{K'}{2}\right)$. Diese drei Flächenpaare sind die „Voss'-

schen Flächen" [1]) des konfokalen Systems. Die Involutionen $J_1 J_2 J_3$ bilden mit der Identität zusammen eine Vierergruppe; jede einzelne derselben vertauscht die beiden adjungierten Regelscharen auf jeder ihrer Fixflächen, und die zwei Flächen eines jeden der beiden andern Paare.

Die Voss'schen Flächen können auch durch die Eigenschaft charakterisiert werden, dass die beiden involutorischen Transformationen der Systemflächen, welche bezw. zu den beiden Regelscharen einer Voss'schen Fläche gehören (Nr. 19), identisch werden.

§ 4. Die Henriciflächen.

21. Wir betrachten jetzt die Speertransformation $\mathfrak{S}$, welche durch eine Gleichung der Form

$$\psi = \varphi + C \qquad (\mathfrak{S})$$

dargestellt wird.[2]) Die ∞^2 Speerpaare φ, ψ, die dieser Relation genügen, definieren die Erzeugenden einer Linienfläche VIII. Ordnung und Klasse, die durch Umwendung um jede der drei Hauptachsen in sich übergeht und als die „Henricifläche C oder $\mathfrak{S}$" bezeichnet werde. Zu entgegengesetzten oder kongruenten Werten von C (und nur zu solchen) gehört dieselbe Henricifläche. Die Speertransformation $\mathfrak{S}$ ist mit jeder andern Transformation dieser Art vertauschbar, führt also jede Henricifläche in sich über, während sie jede Regelschar D des konfokalen Systems in eine andere Regelschar D' nach dem Gesetz

$$D' = D + 2C$$

transformiert.

Die Aufgabe, den Speer ψ_1 zu bestimmen, der einem gegebenen φ_1 vermöge einer Transformation $\mathfrak{S}$ entspricht, von der zwei einander entsprechende Speere φ, ψ gegeben sind, lässt sich auf die der Nr. 16 mittels der Bemerkung zurückführen, dass der Speer ψ_1 Begleitspeer des Speeres $-\varphi_1$ in

[1]) A. Voss, Math. Ann., 10, p. 143 ff., § VI.

[2]) Vgl. A. Harnack, Math. Ann., 12, p. 77.

Bezug auf eine Regelschar II. Ordnung ist, von der die Begleitspeere $-\varphi$ und ψ gegeben sind, sowie dass der Speer $-\varphi$ aus φ und ebenso $-\varphi_1$ aus φ_1 durch die Transformation $\mathfrak{A}_3$ hervorgeht (Nr. 15).

22. Die Henricifläche $C' + i\,C''$ besitzt i. A. keine reelle, dagegen zwei verschiedene Systeme von je ∞^1 niederimaginären Erzeugenden. Die reellen Punkte der letzteren erfüllen die beiden Raumkurven IV. Ordnung γ_1 und γ_2, wonach das einschalige Hyperboloid $+(C'' + K')\,i$ von dem Ellipsoid $\pm C'$ bezw. dem zweischaligen Hyperboloid $+(C' + i\,K')$ geschnitten wird; diese Raumkurven enthalten alle reellen Punkte der Fläche. Die letztere hat zu Doppelkurven die vier Kegelschnitte, welche resp. von den Flächen II. Ordnung mit den Argumentwerten:

$$\pm(C + 2\,K + i\,K'); \ \pm(C + i\,K'); \ \pm C; \ \pm(C + 2\,K)$$

aus den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und der unendlich fernen Ebene ausgeschnitten werden. Ausserdem hat die Henricifläche mit jeder der vier Hauptebenen noch die vier Geraden gemein, die den Fokalkegelschnitt in den Punkten berühren, wo er von dem betreffenden Doppelkegelschnitt getroffen wird.

23. Die Henricifläche C ist dann und nur dann reell, wenn C eine der vier Formen:

$$i\,C'', \ i\,C'' + 2\,K; \ C'; \ C' + i\,K'$$

besitzt, wo C', C'' reelle Konstante bedeuten. Die Flächen der drei ersten Kategorien sind nullteilig (ohne reelle Gerade) und besitzen je zwei nullteilige und zwei einteilige Doppelkegelschnitte, sonst keine reellen Punkte.

Jede Fläche der vierten Kategorie enthält ∞^1 reelle Gerade; sie ist zweiteilig, d. h. sie besteht aus zwei reellen Mänteln, welche sich längs einer zur Fokalellipse konfokalen Hyperbel, längs einer zur Fokalhyperbel konfokalen Ellipse, endlich längs einer zum nullteiligen Fokalkegelschnitt konfokalen Ellipse wechselseitig durchdringen, und besitzt ausser den reellen nur hochimaginäre Erzeugende. Die orthogonalen

Trajektorien der Erzeugenden sind Raumkurven IV. Ordnung; ängs einer jeden der letzteren durchdringen sich je ein Ellipsoid und ein zweischaliges Hyperboloid des konfokalen Systems. Denkt man sich eines der konfokalen einschaligen Hyperboloide als bewegliches Stabmodell unter Festhaltung der drei Achsen deformiert, so erhält man der Reihe nach alle konfokalen einschaligen Hyperboloide, während der einzelne Stab den einen Mantel einer Henricifläche[1]) beschreibt. Das Gleichungspaar

$$\frac{y}{\sqrt{b^2-\lambda}}+\frac{z}{\sqrt{\lambda-c^2}}=\varrho\left(1+\frac{x}{\sqrt{a^2-\lambda}}\right);$$

$$1-\frac{x}{\sqrt{a^2-\lambda}}=\varrho\left(\frac{y}{\sqrt{b^2-\lambda}}-\frac{z}{\sqrt{\lambda-c^2}}\right)$$

stellt bei konstantem ϱ und variabelem λ die ∞^1 Erzeugenden einer Henricifläche dar.

Den Werten $i K'$, $2K + iK'$, $2K$ der Konstanten C entsprechen drei „spezielle" Henriciflächen vierter Ordnung,[2]) welche bezw. die x-, die y- und die z-Achse zu Doppellinien haben. Die zugehörigen Speertransformationen $\mathfrak{S}_x$, $\mathfrak{S}_y$, $\mathfrak{S}_z$ sind bezw. die Umwendung um die x-, y- und z-Achse. Die Henricifläche $\mathfrak{S}_x$ enthält zwei getrennte reelle Teile, bestehend aus den Geraden des konfokalen Systems, die die negative bezw. positive x-Achse senkrecht schneiden, die Fläche $\mathfrak{S}_y$ dagegen nur einen reellen Teil, bestehend aus allen Systemgeraden, die die y-Achse senkrecht schneiden; $\mathfrak{S}_z$ endlich ist eine nullteilige Fläche.

24. Bezeichnet man als „Kette 2. Art" den Inbegriff aller Speere mit den Argumentwerten $\varphi + i\varrho$, wo φ eine Konstante, ϱ eine reelle Variable bedeutet, so liegen auf einer Henrici-

[1]) Diese Bezeichnung wurde gewählt, weil bekanntlich Henrici diesen Vorgang zuerst beschrieben hat. Vgl. indessen die ältere Literatur bei W. Fr. Meyer, Schriften der phys.-ökon. Ges. Königsberg, Bd. 41 (1900), p. [24].

[2]) A. Harnack, Math. Ann., 12, p. 79 $C = 0$ gibt die Minimal developpable Γ; vgl. § 5.

fläche der Kategorie $C' + i K'$ zwei Paare entgegengesetzter Ketten 2. Art:

$$\pm \tfrac{1}{2} C' + i \varrho; \quad \pm \tfrac{1}{2} C' + 2 K + i \varrho$$

und jede Kette $\varphi' + i \varrho$ ist auf einer und nur einer Henricifläche $2 \varphi' + i K'$ gelegen.

Die spezielle Fläche $\mathfrak{S}_x$ enthält die beiden verschiedenen Ketten $i \varrho$ und $2 K + i \varrho$, welche bezw. den zwei reellen Bestandteilen der Fläche entsprechen und unter allen Ketten 2. Art allein die Eigenschaft haben, zu jedem Speer auch den entgegengesetzten zu enthalten. Die Fläche $\mathfrak{S}_y$ trägt zwei entgegengesetzte Ketten 2. Art.

25. Ist ein Speer σ des Systems gegeben, $\varphi' + i \varphi''$ sein Argumentwert, so kann man die Speere σ', σ'' mit den Argumenten φ' bezw. $i \varphi''$ sofort konstruieren. Denn σ' und σ'' liegen mit σ auf derselben Kette 2. bezw. 1. Art. Ist also P der Punkt, wo σ die xy-Ebene schneidet, so trifft σ' die negative x-Achse in einem Punkte der durch P gehenden, zur Fokalellipse konfokalen Ellipse, und σ'' schneidet die x-Achse da, wo sie von dem durch P gehenden, zur Fokalellipse konfokalen Hyperbelast getroffen wird. Da ferner aus der Lage von σ die Intervalle, in denen die Zahlen φ' und φ'' liegen, sofort ermittelt werden können, so sind die Speere σ', σ'' nach Nr. 12 vollkommen bestimmt.

Durch Umkehrung dieses Verfahrens kann man, wenn die Speere φ' und $i \varphi''$ gegeben sind, den Speer $\varphi' + i \varphi''$ eindeutig konstruieren. Diese Aufgabe ist auch ein Spezialfall der folgenden: zu zwei gegebenen Speeren φ, ψ den Speer $\varphi + \psi$ zu finden; sie wird gelöst, indem man den Begleitspeer des Speeres 0 (Nr. 13) in Bezug auf die Regelschar $C = \varphi + \psi$ aufsucht (Nr. 16).

26. Aus den Sätzen der Nr. 17 und 24 folgt unmittelbar: Die Begleitspeere eines gegebenen Speers σ in Bezug auf alle einschaligen Hyperboloide des konfokalen Systems Σ erfüllen die Kette 2. Art, die den zu σ entgegengesetzten Speer enthält. Die Begleitspeere von

σ in Bezug auf die ∞^1 nullteiligen Flächen des Systems bilden die Kette 2. Art, die aus der vorigen durch Umwendung um die z-Achse entsteht. Beide Ketten liegen auf verschiedenen Mänteln derselben zweiteiligen Henricifläche, die den Speer σ enthält.

Nach Nr. 17 können wir hinzufügen:

Die Begleitspeere von σ in Bezug auf alle Ellipsoide des Systems erfüllen die Kette 1. Art, deren Speere von σ geschnitten werden und mit σ übereinstimmend nach oben oder unten gerichtet sind. Die Begleitspeere von σ in Bezug auf die zweischaligen Hyperboloide bilden die zu der vorigen entgegengesetzte Kette.

27. Ist von der einen Regelschar $\mathfrak{R}$ eines einschaligen Hyperboloids eine komplexe Erzeugende (σ, τ) gegeben, so dass die Speere σ, τ die zu Anfang der vorigen Nummer angegebene Lage besitzen, so erwächst die Aufgabe, die Regelschar selbst, d. h. also eine ihrer reellen Geraden zu konstruieren. Dazu genügt es offenbar, von der zu $\mathfrak{R}$ adjungierten Schar $\mathfrak{R}'$ die beiden reellen Erzeugenden g und g' zu ermitteln, die die x-Achse senkrecht schneiden. Zu diesem Zwecke wählen wir zwei beliebige Speere σ_1, σ_2 des Systems Σ, die die negative x-Axe senkrecht schneiden, und bestimmen nach Nr. 16 ihre Begleitspeere τ_1 bezw. τ_2 in Bezug auf $\mathfrak{R}$, die die negative x-Achse ebenfalls senkrecht treffen (Nr. 23 und 26). Nun bilden die reellen Treffgeraden der komplexen Linie $(\sigma_i\, \tau_i)$ eine Linienkongruenz (1, 1), diejenigen unter ihnen, die überdies die x-Achse senkrecht schneiden, also eine sofort konstruierbare paraboloidische Regelschar. Die Geraden g, g' erweisen sich sonach als Schnittlinien zweier bekannter Regelscharen II. Ordnung, die sich ausserdem in der x-Achse und der unendlich fernen Geraden der yz-Ebene durchsetzen.[1])

[1]) Diese Konstruktion ist übrigens linear, nicht quadratisch, da g und g' durch Umwendung um die z-Achse auseinander hervorgehen.

§ 5. Doppelspeere und Nabelpunkte.

28. Wir kehren zur Betrachtung der involutorischen Speertransformation $\mathfrak{R}$:

$$\varphi + \psi = C$$

zurück. Es gibt zwei und nur zwei entgegengesetzte Ketten 1. Art:

$$\tfrac{1}{2}\,C \pm \tfrac{1}{2}\,i\,K' + \varrho$$

der Eigenschaft, dass jeder Speer der einen vermöge $\mathfrak{R}$ in einen Speer der andern übergeht; sie erfüllen die reelle Regelschar $\mathfrak{R}_1$ mit dem Argumentwert $i\,C''$, wo $C = C' + i\,C''$ gesetzt wird. Ferner gibt es zwei und nur zwei (ebenfalls entgegengesetzte) Ketten 1. Art:

$$\tfrac{1}{2}\,C + \varrho,\ \tfrac{1}{2}\,C + i\,K' + \varrho,$$

die vermöge $\mathfrak{R}$ je in sich übergehen. Sie erfüllen die reelle Regelschar $\mathfrak{R}_2$ mit dem Argument $i\,(C'' + K')$, die der Schar $i\,C''$ vermöge der Involution J_1 entspricht (Nr. 20). Jede dieser Ketten enthält zwei Speere

$$\tfrac{1}{2}\,C,\ \tfrac{1}{2}\,C + 2\,K \text{ bezw. } \tfrac{1}{2}\,C + i\,K',\ \tfrac{1}{2}\,C + i\,K' + 2\,K, \quad (1)$$

die vermöge $\mathfrak{R}$ fest bleiben. Diese Speere, die „Doppel- oder Fixspeere der Transformation $\mathfrak{R}$“, gehen aus einem unter ihnen durch Umwendung um die drei Hauptachsen hervor, und jedes solches System von vier Speeren ist Fixspeersystem einer ganz bestimmten Regelschar C. Wir nennen solche vier Speere ein Quadrupel.[1] Zur adjungierten Regelschar $-C$ gehört ein Quadrupel, das aus dem ebengenannten hervorgeht, indem man irgend einen der Speere (1) den vier Transformationen $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_4$ (Nr. 15) unterwirft.[2]

29. Die vier Fixspeere einer Regelschar, die auf einem Ellipsoid (zweischaligen Hyperboloid) unseres konfokalen Systems liegt, berühren die Fokalhyperbel (= ellipse) in den

[1] Vgl. die in der Einleitung zitierten Arbeiten, bes. H. Schröter, a. a. O., § 8.

[2] Vgl. H. Schröter, a. a. O.

Punkten, wo sie von der Fläche geschnitten wird, d. h. in den reellen Nabelpunkten, und treten daselbst entweder alle vier aus der Fläche aus oder alle vier in dieselbe ein.

Die vier Doppelspeere einer reellen, auf dem einschaligen Hyperboloid H gelegenen Regelschar $\mathfrak{R}$ sind paarweise entgegengesetzt, also auf zwei reellen Geraden g, g' gelegen, die die x-Achse senkrecht schneiden und durch Umwendung um die z-Achse auseinander hervorgehen; sie liegen auf dem einschaligen Hyperboloid H', das dem H vermöge der Involution J_1 zugeordnet ist, und zwar auf derjenigen Regelschar desselben, die die z-Achse entgegengesetzt umwindet wie die Regelschar $\mathfrak{R}$. Das unter den sechs Voss'schen Flächen enthaltene einschalige Hyperboloid ist also dadurch ausgezeichnet, dass die beiden Doppelspeerpaare jeder auf ihm liegenden Regelschar jedesmal der andern Regelschar angehören.

Die Doppelspeere einer nullteiligen Regelschar $\mathfrak{R}$ liegen ebenfalls paarweise auf zwei reellen Geraden g, g', die die y-Achse senkrecht treffen und demjenigen einschaligen Hyperboloid angehören, das aus $\mathfrak{R}$ durch die Involution J_8 (Nr. 20) entsteht.

Betrachtet man daher die Doppelspeere als Repräsentanten der zugehörigen Regelscharen unseres konfokalen Systems Σ, so werden die Ellipsoide durch die Tangenten der Fokalhyperbel, die zweischaligen Hyperboloide durch die der Fokalellipse, die einschaligen Hyperboloide durch die Speere der speziellen Henricifläche $\mathfrak{S}_x$, endlich die nullteiligen Flächen durch die der Fläche $\mathfrak{S}_y$ (Nr. 23) repräsentiert.

30. Unter den Erzeugenden jeder Regelschar $\mathfrak{R}$ finden sich vier Minimalgerade; die durch sie gehenden Minimalebenen werden bezw. durch die Doppelspeere von $\mathfrak{R}$ repräsentiert.

Jeder Speer σ oder φ unseres Systems Σ ist Doppelspeer einer ganz bestimmten Regelschar $\mathfrak{R}$ mit dem Argumentwert 2φ. Wir fragen nun nach der reellen Repräsentation (σ, $M_0 M$)

der auf der Minimalebene (σ) gelegenen Minimalerzeugenden von $\mathfrak{R}$, d. h. also der Minimalgeraden, längs deren die Ebene (σ) ihre Enveloppe berührt. Damit erhalten wir die reelle Repräsentation für die ∞^2 Erzeugenden und die ∞^4 Punkte der Minimaldeveloppabeln Γ, die unserm konfokalen System umschrieben ist.

31. Die gesuchte Minimalgerade, die mit $[\sigma]$ bezeichnet werde, ist Ort der Punkte, wo die Minimalebene (σ) die Flächen des Systems berührt. Bedeuten also σ_1 und σ_1' die Begleitspeere von σ in Bezug auf irgend zwei adjungierte Regelscharen, so repräsentiert der Zyklus $(\sigma\,\sigma_1\,\sigma_1')$, der mit Σ den Speer σ doppelt zählend gemein hat, einen Punkt der Geraden $[\sigma]$.

Sei k einer der im Endlichen liegenden Fokalkegelschnitte, P_0 der Punkt, wo σ die Ebene von k trifft, Q_0 der auf dem Durchmesser $O\,P_0$ liegende Punkt, der von P_0 durch k harmonisch getrennt ist, g die durch Q_0 gehende Polare von P_0 in Bezug auf k, endlich σ' der zweite durch P_0 gehende Speer des Systems Σ, der so orientiert ist, dass die Ebene von k Mittelebene des Speerpaares $(\sigma\,\sigma')$ wird. Die Gerade $(\sigma\,\sigma')$ ist dann Tangente von k, ihr komplexer Berührpunkt liegt auf g, sein Pfeil also ebenfalls, und zwar ist der Anfangspunkt offenbar Q_0, während sein Endpunkt Q durch die Konstruktion der Nr. 4 gefunden wird. Der Pfeil $[Q_0\,\bar{Q}]$ des komplexen Punktes, in dem die zu $(\sigma\,\sigma')$ konjugiert komplexe Gerade $(\bar{\sigma}\,\sigma')$ den Kegelschnitt k berührt, liegt dann so, dass Q_0 die Mitte der Strecke $Q\,\bar{Q}$ wird; offenbar sind die Punkte Q und $\bar{Q}$ auch dadurch bestimmt, dass sie hinsichtlich k konjugiert und zu Q_0 symmetrisch auf g liegen.

Bedeuten nun $M_0\,M$ und $M_0'\,M'$ die Vertikalprojektionen der Punkte $Q_0\,Q$ auf σ bezw. σ', so sind $(\sigma,\,M_0\,M)$ bezw. $(\sigma',\,M_0'\,M')$ die reellen Repräsentationen der beiden Minimalgeraden $[\sigma]$ und $[\sigma']$.[1]) Der komplexe Punkt mit dem Pfeil

---

[1]) Diese Konstruktion lässt sich in der Weise verallgemeinern, dass man unter k eine ovale Fläche von Σ, unter g die Polare der reellen

$[Q_0 Q]$ ist der Schnittpunkt dieser zwei Geraden, also einer der drei auf der Minimalgeraden $[\sigma]$ im Endlichen liegenden Nabelpunkte der Fläche II. Ordnung, zu deren Regelscharen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ die Doppelspeere σ, σ' gehören. Bedeutet $\bar{\sigma}$ den zu σ entgegengesetzten Speer, so besitzt die Minimalgerade $[\bar{\sigma}]$ die reelle Repräsentation $(\bar{\sigma}, M_0 \bar{M})$, und es ist M_0 die Mitte der Strecke $M \bar{M}$.

32. Berührt der Speer σ den einteiligen Fokalkegelschnitt k, so koinzidieren die Punkte $M_0 M$ in den Berührungspunkt, d. h. also in einen der reellen Nabelpunkte der ovalen Fläche, zu der σ als Doppelspeer gehört. Durch Umwendung um die beiden in der Ebene von k liegenden Hauptaxen gehe der Speer σ in σ' bezw. σ'', der Punkt M_0 in M_0', M_0'' über; ist dann $\varkappa'$ der orientierte Kreis, der σ in M_0 und $\bar{\sigma}'$ in M_0' berührt, ferner $\varkappa''$ der Kreis, der den Speer σ in M_0 und $\bar{\sigma}''$ in M_0'' berührt, so werden durch $\varkappa'$ und $\varkappa''$ die beiden andern auf der Minimalgeraden (σ_0, M_0) gelegenen Nabelpunkte unserer ovalen Fläche dargestellt. Daraus folgt nebenbei die Tatsache, dass jede der beiden Serien von doppelt berührenden Kreisen eines Kegelschnitts k komplexe Punkte eines zu k „fokalen" Kegelschnitts repräsentiert.

33. Der Punkt M_0, der in der reellen Repräsentation $(\sigma, M_0 M)$ der Minimalgeraden $[\sigma]$ auftritt, ist, wie man durch Rechnung oder durch die weiter unten (Nr. 49) angestellte Überlegung findet, der „Striktionspunkt" der reellen Geraden, auf der σ liegt, d. h. durchläuft σ eine reelle Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}$ des konfokalen Systems, so beschreibt M_0 die Striktionslinie von $\mathfrak{R}$. Aus Nr. 32 ergibt sich also folgende einfache Konstruktion der Striktionslinie einer Regelschar II. Ordnung: Ist P_0 der Punkt, wo eine beliebige Erzeugende h der Schar eine der Hauptebenen e schneidet, Q_0 der auf dem Durchmesser $O P_0$ liegende

---

Geraden $(\sigma \bar{\sigma})$ in Bezug auf k, unter P_0 den Schnittpunkt der Geraden $(\sigma \bar{\sigma})$ mit der Ebene (O, g) versteht. Dann ist $[Q_0 Q]$ der Punkt, wo die Minimalebene (σ) die Fläche k berührt.

Punkt, der von P_0 durch den in e liegenden Fokalkegelschnitt harmonisch getrennt wird, so ist der Striktionspunkt von h der Fusspunkt der von Q_0 auf h gefällten Senkrechten.

Dieser Satz liefert, auf eine Tangente der Fokalellipse oder -hyperbel angewendet, als Spezialfall die bekannte Tatsache, dass die Tangente und zugehörige Normale eines Kegelschnitts jedes seiner Brennpunktepaare harmonisch trennt.

34. Ist von einer involutorischen Speertransformation $\mathfrak{R}$ einer der Doppelspeere σ gegeben, so kann man sofort beliebig viele weitere Speerpaare von $\mathfrak{R}$ angeben. Denn entsteht $\sigma^{(i)}$ aus σ durch die Transformation $\mathfrak{A}_i$ (Nr. 15), und ist $(\sigma^{(i)}, M_0^{(i)} M^{(i)})$ die reelle Repräsentation der Minimalgeraden $[\sigma^{(i)}]$, so ist der Begleitspeer τ' eines gegebenen Speers τ in Bezug auf die Regelschar $\mathfrak{R}$ der zweite gemeinsame Speer der nach Nr. 8 zu konstruierenden Zyklen oder komplexen Punkte, wonach die Minimalebene (τ) die Minimalgeraden $(\sigma^{(i)}, M_0^{(i)} M^{(i)})$ schneidet.

Die umgekehrte Aufgabe, von einer Regelschar $\mathfrak{R}$, die durch ein gegebenes Speerpaar definiert ist, die Doppelspeere zu bestimmen, ist trivial, wenn es sich um eine ovale Fläche handelt.

Liegt aber $\mathfrak{R}$ auf einem einschaligen Hyperboloid des konfokalen Systems Σ, so bestimme man zunächst zwei Speere σ, τ, die sich vermöge $\mathfrak{R}$ entsprechen und die negative x-Achse senkrecht schneiden (Nr. 24 und 26), also Argumentwerte der Form $i\varphi''$, $i\psi''$ besitzen. Die Argumentwerte derjenigen beiden Doppelspeere von $\mathfrak{R}$, die ebenfalls die negative x-Achse senkrecht treffen, haben dann die Form $i\chi''$, bezw. $i(\chi'' + K')$, und es ist χ'' durch die Beziehung

$$\varphi'' + \psi'' = 2\chi'' \text{ (mod. } 2K') \tag{2}$$

definiert. Setzt man nun

$$\varphi_1'' = -\varphi'', \quad \psi_1'' = -\psi'' + K',$$

so gehen die Speere σ_1, τ_1, die den Argumentwerten $i\varphi_1''$ resp.

$i\psi_1''$ entsprechen, aus σ bezw. τ durch Spiegelung an der Ebene $y = 0$ bezw. $z = 0$ hervor, und die Gleichung (1) geht über in:

$$i\varphi_1'' + i\psi_1'' + 2i\chi'' + iK' \equiv 0,$$

d. h. das Speerpaar $i\chi''$, $i(\chi'' + K')$ liegt mit dem Paar $\sigma_1 \tau_1$ zyklisch, wird also nach Nr. 27 konstruiert.

Man kann statt dessen auch direkt die zu den Nabelpunkten des einschaligen Hyperboloids H gehörigen Pfeile und dann durch Umkehrung des Verfahrens der Nr. 31 die Doppelspeere von H ermitteln. Ist nämlich k' der Kegelschnitt, den die Fläche H aus der Ebene des einteiligen Fokalkegelschnitts k ausschneidet, so existiert innerhalb des konfokalen Systems, das k' zum Fokalkegelschnitt hat, eine ovale Fläche H', die aus der Ebene von k' den Kegelschnitt k ausschneidet, und die nach Nr. 32 zu konstruierenden, in der Ebene von k liegenden komplexen Nabelpunkte von H' sind mit denen der Fläche H identisch.

35. Um endlich einen Doppelspeer χ der Regelschar $\mathfrak{R}$ zu finden, die durch die Sperre σ, τ mit den Argumentwerten

$$\varphi = \varphi' + i\varphi'', \quad \psi = \psi' + i\psi''$$

definiert ist, konstruiere man nach Nr. 25 zunächst die nach oben orientierten Tangenten σ', τ' der Fokalhyperbel mit den Argumenten φ', ψ', und den einen der beiden nach oben orientierten Doppelspeere der Regelschar, die die komplexe Gerade (σ', τ') enthält, also auf dem durch den Schnittpunkt von σ' und τ' gehenden Ellipsoid des Systems Σ gelegen ist. Bedeutet χ' den (reellen) Argumentwert dieses Doppelspeeres, so hat man

$$\varphi' + \psi' \equiv 2\chi' \pmod{4K}.$$

Ferner ermittele man nach Nr. 25 die Speere σ'' und τ'', die zu den Argumenten $i\varphi''$ und $i\psi''$ gehören, also die negative x-Achse senkrecht schneiden, und bestimme für die reelle Regelschar $i(\varphi'' + \psi'')$ nach Nr. 34 den Doppelspeer, der die negative x-Achse senkrecht schneidet, dessen Argument also die Form $i\chi''$ hat und der Relation (2) genügt. Aus den

Speeren χ' und $i\chi''$ lässt sich dann nach Nr. 25 der Speer mit dem Argument $\chi = \chi' + i\chi''$ sofort konstruieren; dieser ist wegen

$$\varphi + \psi \equiv 2\chi$$

einer der gesuchten Doppelspeere der Regelschar $\mathfrak{R}$.

Die Aufgabe, die Doppelspeere und Nabelpunkte einer vorgegebenen reellen oder komplexen Fläche II. Ordnung unseres konfokalen Systems zu finden, ist durch die Entwickelungen dieses Paragraphen in allen Fällen erledigt.

§ 6. Zyklische Quadrupel und Vierseite.

36. Jeder Zyklus hat mit dem Speersystem Σ vier Speere, ein „zyklisches Quadrupel" gemein; durch irgend drei Speere des Systems ist ein zyklisches Quadrupel bestimmt, dessen vierter Speer nach Nr. 16 gefunden wird. Die zyklischen Quadrupel zerfallen in folgende Kategorien:

a) vier verschiedene Speere;
b) ein doppelt zählender und zwei einfach zählende Speere;
c) zwei je doppelt zählende Speere;
d) ein dreifach und ein einfach zählender Speer;
e) ein vierfach zählender Speer.

37. Die ∞^2 Quadrupel der Kategorie d) definieren die komplexen Punkte, die auf der Rückkehrkante γ der Minimaldeveloppabeln Γ gelegen sind; sie werden in § 7 betrachtet. Die 16 Quadrupel der Kategorie e) werden bezw. durch die 16 ausgezeichneten Speere (Nr. 13) dargestellt. Ist σ insbesondere Scheiteltangente eines Fokalkegelschnitts, P_0 der betreffende Scheitel, k der Fokalkegelschnitt, auf dessen Ebene der Speer σ im Punkte P_0 senkrecht steht, so ist der Zyklus, der mit Σ den vierfach zählenden Speer σ gemein hat, nichts anderes als der Berührpunkt der Minimalebene (σ) mit dem Kegelschnitt k; der Anfangspunkt Q_0 des zugehörigen Pfeils ist also der auf $O\,P_0$ liegende Punkt, der von P_0 durch k harmonisch getrennt wird, während sein Endpunkt Q nach Nr. 31 konstruiert wird.

Ist dagegen σ auf einer Asymptote der Fokalhyperbel gelegen, so ist der Punkt, dessen (ausgearteter) Zyklus mit Σ den Speer σ vierfach zählend gemein hat, der unendlich ferne Berührpunkt der Minimalebene (σ) mit dem Kreis $\varkappa_\infty$.

38. Die ∞^2 Zyklen der Kategorie c) sind die Punkte der vier Fokalkegelschnitte (den Kreis $\varkappa_\infty$ eingerechnet); die zwei verschiedenen Speere eines solchen Zyklus schneiden sich also auf je einer Hauptebene oder sie sind syntaktisch; die zugehörigen Pfeile ergeben sich durch die Konstruktion der Nr. 31.

Die ∞^4 Zyklen b) repräsentieren die Punkte der Minimaldeveloppabeln Γ. Die beiden einfach zählenden Speere $\sigma_1\,\sigma_2$ eines solchen Zyklus sind die Begleitspeere des doppelt zählenden Speers σ in Bezug auf zwei adjungierte Regelscharen des konfokalen Systems. Liegt die komplexe Gerade ($\sigma_1\,\sigma_2$) auf der Regelschar $\mathfrak{R}$, so ist σ Doppelspeer der zu $\mathfrak{R}$ adjungierten Regelschar $\mathfrak{R}'$. Hält man σ fest, und lässt $\sigma_1\,\sigma_2$ nach der obigen Regel variieren, so erhält man die ∞^2 komplexen Punkte der Minimalgeraden [σ] (Nr. 30); lässt man dagegen σ variieren und wählt für $\sigma_1\,\sigma_2$ die Begleitspeere von σ in Bezug auf irgend eine feste Fläche II. Ordnung des Systems, so ergeben sich die ∞^2 Punkte der Kurve IV. Ordnung, längs welcher jene Fläche II. Ordnung von den unendlich benachbarten Flächen des Systems geschnitten, also von der Developpabeln Γ berührt wird.

39. Da drei oder vier Speere, die in derselben reellen Ebene liegen, nur dann einem Zyklus angehören, wenn sie den Äquator desselben berühren, so erhält man aus der Annahme, dass die vorhin genannten Speere $\sigma\,\sigma_1\,\sigma_2$ denselben einteiligen Fokalkegelschnitt berühren, die Regelscharen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ also auf einer ovalen Fläche des Systems liegen, folgenden Satz:

Berührt ein Kreis einen Kegelschnitt k im Punkte M_0, so schneiden sich die beiden übrigen Tangenten,

die er mit k gemein hat, auf dem durch M_0 gehenden, zu k konfokalen Kegelschnitt.[1])

40. Sind zwei Flächen II. Ordnung F und G unseres Systems bezw. mit den Argumentwerten $\pm C$ und $\pm D$ gegeben, so existieren ∞^2 Systeme von je vier Speeren $\sigma_1 \ldots \sigma_4$, deren Argumente $\varphi_1 \ldots \varphi_4$ den Relationen[2])

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varepsilon C; \quad \varphi_2 + \varphi_3 = \eta D; \quad \varphi_3 + \varphi_4 = -\varepsilon C; \quad \varphi_4 + \varphi_1 = -\eta D \quad (1)$$

genügen, wo ε und η unabhängig voneinander die positive oder negative Einheit bedeuten; nach willkürlicher Wahl von σ_1 oder φ_1 erhält man noch vier verschiedene Quadrupel dieser Art. Diese ∞^1 Quadrupel sind zyklisch und repräsentieren die Punkte der Raumkurve IV. Ordnung, wonach sich die Flächen F und G schneiden; lässt man F mit G zusammenfallen, so erhält man die Quadrupel der Nr. 38 wieder.

41. Sind F und G insbesondere ovale Flächen des Systems Σ, so schneiden sich je zwei im Zyklus $\varphi_1 \ldots \varphi_4$ aufeinanderfolgende Speere eines solchen Quadrupels, und je zwei entgegengesetzte dieser Quadrupel liegen auf demselben räumlichen Vierseit. Man bestätigt jetzt leicht folgende Tatsachen:

Zu zwei konfokalen ovalen Flächen zweiter Ordnung F und G gibt es immer ∞^2 windschiefe Vierseite, von denen je einfach unendlich viele auf jedem zu F und G konfokalen einschaligen Hyperboloid liegen und welche sich auf die Fläche F und G stützen, d. h. je zwei auf F und zwei auf G liegende Gegenecken besitzen. Es gibt immer zwei verschiedene Vierseite dieser Art, welche einen gegebenen reellen Punkt von F oder G zum Eckpunkt haben.

Jedes dieser Vierseite ist auf je einem einschaligen Rotationshyperboloid gelegen;[3]) die ∞^2 Fokalkreise

---

[1]) Die Punkte, wo diese zwei Tangenten die im Punkte M_0 an k gezogene Tangente treffen, liegen auf einem zweiten zu k konfokalen Kegelschnitt (Nr. 42).

[2]) A. Harnack, a. a. O.

[3]) Es gibt unter diesen Vierseiten einfach unendlich viele, die auf

dieser Hyperboloide sind die Laguerre'schen Repräsentanten für die komplexen Punkte der Raumkurve IV. Ordnung, wonach sich die gegebenen Flächen F und G schneiden.

Damit ein windschiefes, einem dreiachsigen Hyperboloid H angehörendes Vierseit auf einem Rotationshyperboloid[1]) gelegen sei, ist notwendig und hinreichend, dass eines der Gegeneckenpaare auf einer zu H konfokalen (ovalen) Fläche II. Ordnung liege; dann liegt das andere Gegeneckenpaar von selbst auf einer zweiten zu H konfokalen Fläche.

Auf jedem dreiachsigen einschaligen Hyperboloid liegen ∞^3 solcher Vierseite; wird nämlich eine Ecke P_1 und auf einer der durch P_1 gehenden Erzeugenden eine zweite Ecke P_2 willkürlich angenommen, so gibt es noch vier verschiedene Vierseite der genannten Art.

42. Betrachtet man die Schnittkurven unserer ovalen Flächen F und G mit der Ebene der Fokalellipse oder -hyperbel, so erhält man als Spezialfälle der vorstehenden Resultate die folgenden Sätze:

Die drei Gegeneckenpaare des Vierseits, das von den gemeinsamen Tangenten eines Kegelschnitts k und eines Kreises gebildet wird, liegen bezw. auf drei zu k konfokalen Kegelschnitten $k_1\, k_2\, k_3$.[2]) Umgekehrt,

---

je zwei verschiedenen Rotationshyperboloiden liegen; durch jedes Gegeneckenpaar eines solchen Vierseits gehen dann je ein Ellipsoid und ein zweischaliges Hyperboloid des Systems Σ hindurch. Die Anfangsspeere φ_1, welche zu solchen Vierseiten führen, verteilen sich auf 16 Ketten 2. Art. Vgl. übrigens die dualen Sätze bei Voss und Harnack a. a. O.

[1]) Das windschiefe Vierseit auf dem Rotationshyperboloid ist als Verallgemeinerung des Tangentenvierseits eines Kreises zu betrachten; z. B. gilt für jenes wie für dieses der Satz, dass die Summen der Gegenseitenpaare gleich sind. Für beliebige zyklische Speerquadrupel liefert der Begriff der „Doppeldifferenz" einen allgemeineren Satz (vgl. meine Arbeit, Lpz. Ber., 1903, p. 402 ff.).

[2]) Dieser von Th. Reye (Zürich, Viert. 41 (1895), p. 68 f., Geom. der Lage, p. 181 f.) aufgestellte Satz enthält den der Nr. 39 als Grenzfall; vgl. auch E. Müller, Deutsche Math.-Ver., Ber. 12 (1903), p. 105.

liegen zwei Gegenecken eines Tangentenvierseits von k auf demselben zu k konfokalen Kegelschnitt, so gilt dasselbe von den zwei anderen Eckenpaaren, und das Vierseit ist einem Kreise umschrieben.[1])

Sind ein einteiliger Kegelschnitt k und zwei zu ihm konfokale einteilige Kegelschnitte $k_1 k_2$ gegeben, von denen keiner ganz im Innern von k liegt, so existieren einfach unendlich viele reelle Kreisvierseite, die k umschrieben sind und sich auf k_1 und k_2 stützen, d. h. je ein auf k_1 liegendes und ein auf k_2 liegendes Gegeneckenpaar besitzen. Zu jedem im Äussern von k liegenden, auf k_1 oder k_2 willkürlich angenommenen Punkt P gibt es zwei verschiedene reelle Vierseite dieser Art, die P zur Ecke haben. Das dritte Gegeneckenpaar liegt dann jedesmal auf einem zu k konfokalen Kegelschnitt k_3, der mit k gleichartig oder ungleichartig ist, je nachdem k_1 mit k_2 ungleichartig oder gleichartig ist, und zwar durchläuft k_3 alle dieser Bedingung genügenden, nicht ganz im Innern von k liegenden Kegelschnitte des konfokalen Systems, wenn das Vierseit die genannte Serie beschreibt.

Aus der Tatsache, dass drei ovale konfokale Flächen II. Ordnung stets acht verschiedene, paarweise konjugiert komplexe Schnittpunkte besitzen, folgt jetzt sofort:

Sind vier einteilige konfokale Kegelschnitte $k_1 k_2 k_3 k_4$ gegeben, worunter drei und nicht mehr gleichartige, und ist keiner der Kegelschnitte $k_1 k_2 k_3$ ganz innerhalb k_4 gelegen, so gibt es vier dem Kegelschnitt k_4 umschriebene Kreisvierseite der Eigenschaft, dass die drei Gegeneckenpaare eines jeden derselben bezw. den Kegelschnitten $k_1 k_2 k_3$ angehören. Diese Vierseite gehen aus einem unter ihnen durch Spiegelung an den Achsen

---

[1]) M. Chasles, Paris, C. R. 17 (1843), p. 841; das Vierseit kann auch ein Parallelogramm sein, der Kreis also in ein Paar unendlich ferner Punkte ausarten.

hervor. Unter jeder anderen Annahme über die einteiligen konfokalen Kegelschnitte $k_1 \,.\,.\, k_4$ gibt es kein reelles Tangentenvierseit der genannten Art.

43. Die Gleichungen

$$\varphi_1 + \varphi_2 = C;\ \varphi_2 + \varphi_3 = -C;\ \varphi_3 + \varphi_4 = C;\ \varphi_4 + \varphi_1 = -C$$

sind nur dann verträglich, wenn $4\,C \equiv 0$. Für eine Voss'sche Fläche (Nr. 20) und nur für eine solche[1]) gibt es also ∞^2 nichtzyklische Quadrupel $\sigma_1 \,.\,.\, \sigma_4$ derart, dass je zwei anstossende Speere $\sigma_i\,\sigma_{i+1}$, desselben eine Erzeugende der Fläche repräsentieren. Insbesondere existieren innerhalb des Systems Σ für jede der beiden ovalen Voss'schen Flächen ∞^2 Speervierseite, deren Ecken alle auf der betreffenden ovalen Fläche liegen. Jedes dieser Vierseite ist auf zwei verschiedenen Rotationshyperboloiden gelegen; durch jedes seiner Gegeneckenpaare geht ausser der betrachteten Voss'schen Fläche noch je eine zweite ovale Fläche des konfokalen Systems hindurch, und die Punkte jedes Paares liegen hinsichtlich der z-Achse symmetrisch.

44. Bezeichnet man die Fokalellipse bezw. -hyperbel mit e und h, die Ellipse, die das Voss'sche Ellipsoid aus der xy-bezw. xz-Ebene ausschneidet, mit e', e'', endlich die Hyperbel, die das zweischalige Voss'sche Hyperboloid mit der xy- bezw. der xz-Ebene gemein hat, mit h' resp. h'', so erhält man aus der vorigen Nummer folgende Sätze:

Es gibt ∞^1 Parallelogramme, die der Ellipse e umschrieben und der Ellipse e' eingeschrieben sind, ebenso ∞^1 Parallelogramme, die der Ellipse e umschrieben und der Hyperbel h' eingeschrieben sind. Die Tangenten der Ellipse e in den Punkten, wo sie von h' getroffen wird, sind zu den Asymptoten von h' parallel.

Es gibt ∞^1 Tangentenvierseite der Hyperbel h,

[1]) A. Voss, A. Harnack, a. a. O.

der Eigenschaft, dass je zwei Gegeneckenpaare eines solchen Vierseits auf der Ellipse e'' liegen; und ∞^1 Tangentenvierseite von h, welche die analoge Eigenschaft in Bezug auf die Hyperbel h'' besitzen. Die z-Achse ist Symmetrieachse aller dieser Vierseite und enthält die dritten Gegeneckenpaare derselben. Die Tangenten der Hyperbel h in den Punkten, wo sie von der Ellipse e'' getroffen wird, schneiden sich paarweise in den auf der z-Achse liegenden Scheiteln von e''.

Da durch Angabe der Fokalellipse oder Fokalhyperbel das konfokale System und damit auch die Voss'schen Flächen desselben eindeutig bestimmt sind, so folgt nebenbei der Satz, dass zu jeder Ellipse e (bezw. Hyperbel h) ein und nur ein Paar konfokaler Kegelschnitte $e' h'$ (bezw. $e'' h''$) mit den angegebenen Eigenschaften existiert.[1]) Die Kegelschnitte $e' h'$ sind dem von den vier Scheiteltangenten der Ellipse e gebildeten Rechteck umschrieben; die Kegelschnitte e'' und h'' gehen durch die vier Punkte, in denen die Scheiteltangenten der Hyperbel h deren Asymptoten schneiden.

§ 7. Schmiegungsspeer, Striktionsfläche und Mittelfläche.

45. Unter dem „Schmiegungsspeer" eines gegebenen Speers σ mit dem Argument φ verstehen wir den Speer τ mit dem Argumentwert -3φ, also den vierten Speer des zyklischen Quadrupels, welches den Speer σ dreifach zählend enthält. Der Schmiegungsspeer ist stets von σ verschieden, ausser wenn σ mit einem der 16 ausgezeichneten Speere (Nr. 13) zusammenfällt, und schneidet den Speer σ dann und nur dann, wenn dieser Tangente der Fokalellipse oder Fokalhyperbel ist. Der Schmiegungsspeer des Schmiegungsspeers τ koinzidiert

---

[1]) Wegen des Zusammenhangs dieser Resultate mit bekannten Schliessungssätzen vgl. das Referat von F. Dingeldey, Enc. d. math. Wiss., III, C, 1, Nr. 69 u. Fussn. 420.

dann und nur dann mit σ, wenn dieser letztere (und infolgedessen auch τ) Doppelspeer einer der 12 Voss'schen Regelscharen des Systems ist; es gibt also 24 Paare von Speeren, von denen jeder der Schmiegungsspeer des andern ist.[1])

46. Ist (σ, $M_0\,M$) die reelle Repräsentation der Minimalgeraden [σ], längs welcher die Minimalebene (σ) die Developpable Γ berührt (Nr. 30) und kennt man den Schmiegungsspeer τ, so kann der Punkt, in dem die Gerade [σ] von der Minimalebene (τ) geschnitten wird, nach Nr. 8 konstruiert werden; es ist dies der Punkt, wo die Minimalebene (σ) die Rückkehrkante γ der Developpabeln Γ oskuliert, und die Minimalgerade [σ] diese Rückkehrkante berührt.

47. Unter den verschiedenen Methoden, den Schmiegungsspeer τ eines gegebenen Speers σ zu konstruieren, heben wir die folgenden hervor:

a) Sind $\mathfrak{R}_i$, $\mathfrak{R}'_i$ beliebige adjungierte Regelscharen des konfokalen Systems Σ, τ_i und τ'_i die Begleitspeere von σ in Bezug auf $\mathfrak{R}_i$ und $\mathfrak{R}'_i$, ω'_i der Begleitspeer von τ_i in Bezug auf $\mathfrak{R}'_i$, ω_i der von τ'_i in Bezug auf $\mathfrak{R}_i$, so ist der gesuchte Schmiegungsspeer τ der zweite gemeinsame Speer aller Zyklen (σ, ω_i, ω'_i).[2]).

Dieser Satz enthält als Spezialfall den folgenden:

b) Ist $\mathfrak{R}$ die Regelschar, die den gegebenen Speer σ zum Doppelspeer hat (Nr. 28), $\mathfrak{R}'$ die dazu adjungierte, so ist τ der Begleitspeer von σ in Bezug auf $\mathfrak{R}'$.

Hieraus folgt insbesondere noch die nachstehende spezielle Konstruktion:

c) Bedeuten $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$ die Speere, die aus σ, und $M_0^{(i)}\,M^{(i)}$ die drei Punktepaare, die aus $M_0\,M$ durch Umwendung um die drei Koordinatenachsen hervorgehen, und konstruiert man (nach Nr. 8) die Zyklen der Punkte, in denen die Minimalebene (σ) die drei

---

[1]) Schröter, a. a. O., p. 80 f.

[2]) H Schröter, „Grundzüge", § 3.

Minimalgeraden $(\sigma_i, M_0^{(i)} M^{(i)})$ trifft, so ist τ der zweite gemeinsame Speer dieser drei Zyklen.

d) Unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnungsweise ist τ der vierte Speer, den der Zyklus $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$ mit dem Speersystem Σ gemein hat.

48. Wenn der Speer σ den einteiligen Fokalkegelschnitt k im Punkte M_0 berührt, so ist der Äquator des Zyklus, der mit dem Speersystem Σ den dreifach zählenden Speer σ gemein hat, offenbar nichts anderes, als der zu dem Punkte M_0 gehörige, mit σ übereinstimmend orientierte Krümmungskreis des Kegelschnitts k. Daher liefert jeder der Sätze a) — d) der vorigen Nummer ein entsprechendes Theorem über die Krümmungskreise eines Kegelschnitts.

Zwei Speere, die in der Ebene eines Kegelschnitts k' liegen und sich in einem Punkte P desselben treffen, sollen „gleichartig" heissen, wenn sie im Punkte P beide aus k' austreten oder beide in k' eintreten. Dann gelten die Sätze:

a) Der Speer σ berühre den Kegelschnitt k im Punkte M_0, und es sei $\varkappa$ der mit σ homolog orientierte, zum Punkte M_0 gehörige Krümmungskreis von k. Durch die Punkte $P' P''$, in denen σ einen beliebigen zu k konfokalen Kegelschnitt k' schneidet, lege man die zu σ gleichartigen Speere τ' und τ'', die den Kegelschnitt k berühren und k' zum zweitenmal in Q' bezw. Q'' schneiden mögen, ferner durch Q' resp. Q'' die zu τ' bezw. τ'' gleichartigen Speere ω', ω'', die den Kegelschnitt k ebenfalls berühren. Bedeutet dann $\varkappa'$ den orientierten Kreis, der die Speere $\sigma, \omega', \omega''$ zu Tangenten[1]) hat, so ist die vierte gemeinsame Tangente des Kreises $\varkappa'$ und des Kegelschnitts k unabhängig von der Wahl des dazu konfokalen Kegelschnitts k' und identisch mit der einfach zählenden

---

[1]) Berührung wird dabei in dem Sinne verstanden, dass die Orientierungen der Geraden und des Kreises in dem gemeinsamen Punkte übereinstimmen.

Tangente τ, die der Krümmungskreis $\varkappa$ mit dem Kegelschnitt k ausser σ noch gemein hat.

b) Die dreifach zählende Tangente σ und die einfach zählende Tangente τ, welche der Kegelschnitt k mit seinem im Punkte M_0 oskulierenden Krümmungskreis gemein hat, schneiden sich auf dem durch M_0 gehenden Kegelschnitt, der zu k konfokal ist.

Dieser Satz ist auch in dem Reye'schen Satze der Nr. 42 bezw. in dem der Nr. 39 als Grenzfall enthalten.

c) Der Speer σ berühre den Zentralkegelschnitt k im Punkte M_0, und es seien $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$ die Speere, $M_1\,M_2\,M_3$ die Punkte, die aus σ bezw. M_0 durch Spiegelung an den Achsen von k und an dem Zentrum O hervorgehen. Bezeichnet man dann mit $\varkappa_i$ den orientierten Kreis, der den Speer σ_i im Punkte M_i und den Speer σ berührt,[1]) so haben die drei Kreise $\varkappa_1\,\varkappa_2\,\varkappa_3$ eine gemeinsame orientierte Tangente τ, welche auch den Kegelschnitt k und den zu M_0 gehörigen, mit σ übereinstimmend orientierten Krümmungskreis $\varkappa$ desselben berührt.

d) Der vorhin genannte Speer τ berührt auch den orientierten Kreis, der die Speere $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$ zu Tangenten hat.

Diese Sätze liefern für den Krümmungskreis eines Kegelschnitts Konstruktionen, die an Einfachheit hinter den bekannten nicht zurückstehen.

49. Es sei σ ein beliebiger Speer des Systems Σ, $(\sigma, M_0\,M)$ die reelle Repräsentation der Minimalgeraden $[\sigma]$, ferner $[P_0\,P]$ der nach Nr. 46 zu konstruierende Pfeil des komplexen Punktes Π, in dem die Gerade $[\sigma]$ die Rückkehrkante γ der Developpabeln Γ berührt. Dann liegen die Punkte P_0 und P bezw. in den reellen Ebenen e_0 und e, die in M_0 bezw. M auf dem Speer σ senkrecht stehen. Durchläuft σ alle Speere des Systems

[1]) Vgl. die vorige Anmerkung.

Σ, so beschreibt der Striktionspunkt M_0 eine Fläche s, die „Striktionsfläche", und P_0 eine Fläche m, die „Mittelfläche" des konfokalen Systems Σ.

Bedeuten σ, σ' zwei unendlich benachbarte Speere desselben Zyklus, so bestätigt man entweder durch Rechnung oder durch direkte Überlegung aufs leichteste, dass der auf σ liegende Fusspunkt der kürzesten Entfernung zwischen σ und σ' mit dem Punkte identisch ist, wo σ die Äquatorebene des Zyklus schneidet. Daraus folgt, dass jede Regelschar, die aus Speeren des Zyklus gebildet wird, die Kurve, wonach sie die Äquatorebene schneidet, zur Striktionslinie hat.

Nun ist der obengenannte Punkt Π der Schnittpunkt dreier aufeinanderfolgender Minimalebenen der Developpabeln Γ, d. h. der Zyklus $[P_0\, P]$ hat mit jeder reellen Regelschar, die aus ∞^1 Speeren des Systems Σ besteht und den Speer σ enthält, drei aufeinanderfolgende Speere $\sigma\, \sigma'\, \sigma''$ gemein. Die Äquatorebene unseres Zyklus enthält also den auf σ liegenden Fusspunkt M_0 der kürzesten Entfernung von σ und σ', sowie den auf σ' liegenden Fusspunkt M'_0 der kürzesten Entfernung zwischen den Speeren σ' und σ''. Damit ist nicht nur die früher aufgestellte Behauptung bewiesen, dass M_0 mit dem „Striktionspunkt" des Speeres σ zusammenfällt, sondern es ist weiterhin gezeigt: „Durchläuft der Speer σ innerhalb des Systems Σ eine beliebige Regelschar, so beschreibt der zugehörige Punkt M_0 die Striktionslinie derselben, m. a. W.: die Striktionskurven aller aus dem System Σ herausgegriffenen reellen Regelscharen liegen auf der Striktionsfläche s."

Die Äquatorebene des Zyklus $[P_0\, P]$ ist mit der Tangentialebene der Striktionsfläche s im Punkte M_0 identisch.

Da sonach die Punkte M_0, M'_0 auf der Aquatorebene des Zyklus $[P_0\, P]$ liegen, so muss nicht nur die Ebene e_0, sondern auch die Ebene e'_0, die im Punkte M'_0 auf dem Speer σ' senkrecht steht, durch das Zentrum P_0 unseres Zyklus hindurchgehen; also folgt:

Die Ebene e_0 ist die Tangentialebene der Mittelfläche m im Punkte P_0; d. h. die Mittelfläche ist die Enveloppe der ∞^2 reellen Ebenen, die auf den Speeren des Systems Σ bezw. in deren Striktionspunkten senkrecht stehen.

Die Striktionsfläche s und die Mittelfläche m sind also in folgender Weise umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen: Bedeuten M_0, P_0 zwei entsprechende Punkte auf s bezw. m, so geht die Ebene, die die Fläche s im Punkte M_0 berührt, durch P_0, und die Ebene, die m in P_0 berührt, durch M_0 hindurch.

Die Begriffe „Striktionsfläche" und „Mittelfläche", sowie alle Sätze dieser Nummer lassen sich, wie man sofort erkennt, auf jedes System von ∞^2 Speeren übertragen, welche die oskulierenden Minimalebenen einer ganz beliebigen Minimalkurve γ repräsentieren.

50. Die Striktionsfläche s besitzt folgende Parameterdarstellung:

$$Nx = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)(a^2 - \varrho)^{\frac{3}{2}}(b^2 - c^2);$$
$$Ny = 2\lambda(\lambda^2 + 1)(b^2 - \varrho)^{\frac{3}{2}}(c^2 - a^2);$$
$$Nz = -2i\lambda(\lambda^2 - 1)(c^2 - \varrho)^{\frac{3}{2}}(a^2 - b^2);$$
$$N = (a^2 - \varrho)(c^2 - b^2)(\lambda^2 + 1)^2 + 4\lambda^2(b^2 - a^2)(c^2 - \varrho),$$

worin ϱ und λ die beiden unabhängigen Parameter bedeuten. Dabei sind die Kurven $\varrho = C$ die Striktionslinien der ∞^1 Regelscharen II. Ordnung des konfokalen Systems, die Kurven $\lambda = C$ dagegen die der ∞^1 Henriciflächen (Ketten 2. Art). Die Gleichung von s ergibt sich auch durch Elimination von ϱ aus den beiden Relationen:

$$S\, y^2 z^2 (a^2 - \varrho)^3 (b^2 - c^2)^2 = 0,$$
$$S\, x^2 (b^2 - \varrho)(c^2 - \varrho) = (a^2 - \varrho)(b^2 - \varrho)(c^2 - \varrho).$$

Von der Resultante dieser Gleichungen lässt sich der unwesentliche Faktor $x^2 y^2 z^2$ abspalten. Die Fläche s ist daher von der XII. Ordnung und hinsichtlich der drei Haupt-

ebenen symmetrisch. Jeder der drei Fokalkegelschnitte ist eine Rückkehrkante von s; die Rückkehrtangentialebene in jedem Punkte eines solchen Kegelschnitts ist mit der betreffenden Hauptebene identisch. Die drei Koordinatenachsen sind Doppellinien der Fläche; die vier Punkte, welche jede der drei Achsen mit den Fokalkegelschnitten gemein hat, sind „Klemmpunkte". Ausserdem enthält die Fläche s noch die Asymptoten jedes der drei Fokalkegelschnitte. Der vollständige Schnitt der Fläche s mit einer Hauptebene besteht also aus dem dreifach zählenden Fokalkegelschnitt, dem einfach zählenden Asymptotenpaar und den beiden je doppelt zählenden Achsen desselben.

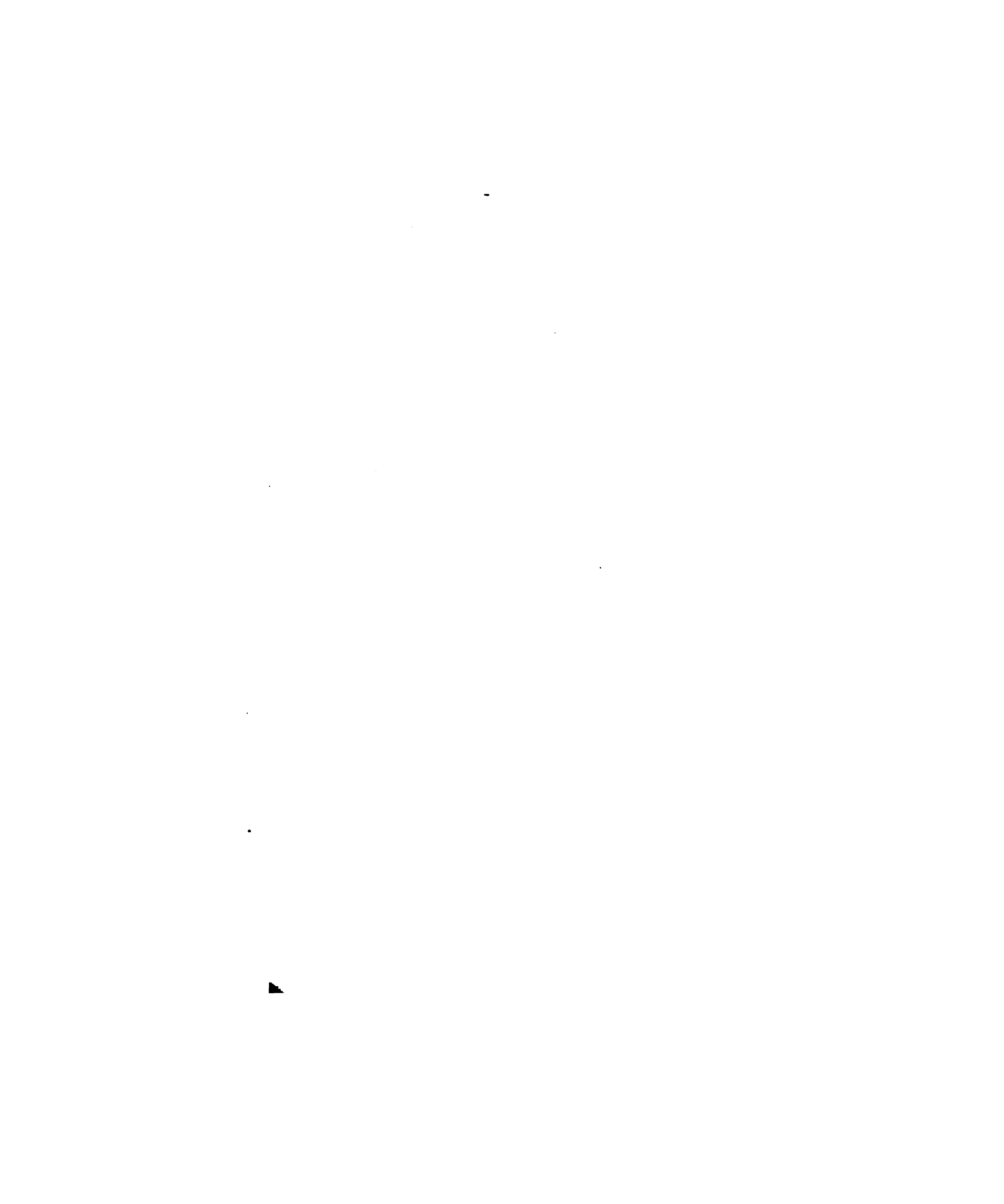
Die Mittelfläche m ist eine algebraische Minimalfläche und zwar eine sogenannte Doppelfläche;[1]) sie ist nämlich der Ort der Mitten je zweier konjugiert komplexer Punkte der Minimalkurve γ, und hat die Evoluten der drei Fokalkegelschnitte zu geodätischen Linien.[2]) Daraus folgt die von R. Townsend[3]) konstatierte Tatsache, dass die Vertikalprojektion der Kurve γ auf eine Hauptebene mit der Evolute des betreffenden Fokalkegelschnitts identisch ist.

---

[1]) G. Darboux, Leçons sur la th. gén. des surfaces I, p. 349.

[2]) Die Resultate der vorliegenden Arbeit lassen sich natürlich sehr leicht auch für das System reeller konfokaler Paraboloide aussprechen; die Mittelfläche m wird in diesem Fall identisch mit der Henneberg'schen Minimalfläche, die die Neil'sche Parabel zur geodätischen Linie hat (vgl. Darboux, a. a. O., Bd. I, p. 352).

[3]) Mess of Math (2), I, 491 (1872).



Öffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 12. November 1904.

Der Präsident der Akademie, Herr K. Th. v. Heigel, eröffnete die Festsitzung mit der folgenden Ansprache:

Das erste Wort gebührt heute dem Landesherrn. Die Akademie der Wissenschaften hat sich nur mit wissenschaftlichen, nicht mit politischen Fragen der Gegenwart zu beschäftigen, aber wir erfüllen nur eine Ehrenpflicht, wenn wir ehrfurchtsvoll und freudigen Herzens zugleich dem Dank Ausdruck geben, dass wir in einem monarchischen Staate leben, dass wir den Schutz des Wittelsbachischen Hauses geniessen, das allzeit sein köstlichstes Reservatrecht in der Pflege von Kunst und Wissenschaft erblickt hat, dass an der Spitze des Staates ein Fürst steht, mild und gütig auf dem Thron, schlicht und brav in seinem Daheim, ein ritterlicher Degen und ein unparteiischer Hüter des Rechts, auf dass alle Stände in gleicher Weise gedeihlich sich fortentwickeln mögen! Dem Allverehrten und seinem blühenden Hause möge der Segen des Himmels allerwegen beschieden bleiben!

Unser Landesherr, die Königliche Staatsregierung und die im Landtag verkörperte Volksvertretung sind die drei Faktoren, denen wir zu danken haben, dass wir uns ungestört und unabhängig unseren wissenschaftlichen Aufgaben widmen können. Doch auch der Spenden grossmütiger Gönner haben wir zu ge-

denken. Wir brauchen uns des Bekenntnisses, dass uns freigebige Wohltäter nötig sind, nicht zu schämen. An die Regierungen treten in unserer Zeit immer stärkere Anforderungen heran, und zumal in wirtschaftlich gedrückten Tagen kann wirklich nicht alles zur Förderung eines grossen wissenschaftlichen Betriebs Notwendige oder doch Nützliche vom Staate geleistet werden. Die Hilfe von einsichtsvollen und opferwilligen Privaten ist dazu unentbehrlich. Der Reiche wird, wenn anders er das Herz auf dem rechten Flecke hat, selbst sich verpflichtet fühlen, seinen Überfluss zum Wohl der Allgemeinheit nutzbar zu machen, und wie könnte dieser Bürgerpflicht auf edlere Weise nachgekommen werden, als durch Förderung der Aufgaben von Kunst und Wissenschaft? Es ist bekannt, welch ungeheure Summen in Amerika für solche Zwecke von Privaten geschenkt werden. Bei uns sind — ich darf wohl sagen: Gott sei Dank! — so märchenhafte Reichtümer nicht in Privatbesitz aufgestapelt. Doch auch in deutschen Landen wird zwar in bescheidenerem Masse, sicher aber nicht mit geringerem Verständnis gespendet. Wenn wir Galerien und wissenschaftliche Institute in Berlin, Leipzig, Hamburg, Frankfurt und anderen deutschen Städten besuchen, begegnen wir auf Schritt und Tritt erfreulichen Beweisen bürgerlicher Munifizenz. Auch unserer Akademie wird zur Vervollständigung der Sammlungen, zur Stellung von Preisaufgaben, zur Unterstützung von Forschungsreisen immer wieder von hochwillkommenen Gönnern hilfreiche Hand geboten. Wir graben die Namen unserer Bundesgenossen dankbaren Sinnes in steinerne Tafeln, doch ein schönerer und dauerhafterer Lohn bietet sich ihnen im Anteil an den segensreichen Wirkungen, welche die echte Wissenschaft zu allen Zeiten auf das gesamte Kulturleben ausgeübt hat.

Von den zahlreichen Geschenken und Widmungen, welche die wissenschaftlichen Staatssammlungen im Jahre 1904 erhalten haben und welche anderweitig veröffentlicht werden, seien hier nur einzelne hervorgehoben:

Die Herren Fabrikant Ernst August Ferdinand Müller, Oberförster a. D. Max Müller und Rechtsanwalt Otto

Kretschmar, sämtliche in Dresden wohnhaft, haben die ungemein wertvolle Käfersammlung, welche der verstorbene Fabrikbesitzer Klemens Müller in Dresden hinterlassen hat, der zoologischen Sammlung zum Geschenk gemacht.

Sie ist eine der reichhaltigsten und wertvollsten privaten Käfersammlungen Deutschlands, in welcher das paläarktische Faunengebiet in ganz aussergewöhnlicher Vollständigkeit der Arten durch hunderttausende von Exemplaren vertreten ist; ihr wissenschaftlicher Wert wird noch dadurch gesteigert, dass sie die berühmte Kiesenwetter'sche und Haag-Rutenberg'sche Sammlung enthält, aufs beste geordnet und samt einer etwa 1200 Bände, darunter sehr seltene Werke enthaltenden entomologischen Bibliothek übergeben wurde.

Herr Krapfenbaur hat der zoologischen Sammlung 8—9000 Konchylien in auserlesenen schönen Exemplaren gewidnet. Der besondere Vorzug dieser Kollektion besteht darin, dass manche seltene Arten in grossen Serien vertreten sind und aus Gegenden stammen, deren politische Verhältnisse Aufsammungen nicht mehr gestatten.

De paläontologische Sammlung wurde durch Ausgrabungen bereichert, welche der Forschungsreisende Herr Eugen Wolf auf Madagaskar hatte vornehmen lassen. Aus den dort gefundenen Bruchstücken lässt sich das Skelett einer nur auf Madagaskar vorkommenden subfossilen Hippopotamusart zusammensetzen. Ein ausserordentlich dankenswerter Zuwachs für unser Sammlung!

Die von Geheimrat von Zittel hinterlassene, sehr reichhaltige Bibliothek, welche fast sämtliche, während der letzten 30 Jahre auf dem Gebiete der Paläontologie erschienenen Schriften enthält, mithin für die Fachwissenschaft von unschätzbarem Wert ist, wurde von drei Akademiemitgliedern, deren Namen nicht genannt werden sollen, erworben und der paläontologischen Statssammlung zum Geschenk gemacht.

Der Wöfflin'sche Reservefond für den Thesaurus linguae Lainae hat durch Vermittlung des Herrn Ge-

heimrats von Wölfflin von Herrn Professor Theodor Usteri in Zürich einen stattlichen Zuschuss erhalten.

Die silberne Medaille Bene merenti widmete unsere Akademie dem Herrn A. Fruhstorfer für Schenkungen von Insekten und Reptilien aus Annam und Tonkin an die zoologische Sammlung, sowie Herrn Paul Gaudin, Direktor der Eisenbahn Smyrna-Kassaba, für die Zuwendung wissenschaftlich wertvoller Grabfunde und späthellenischer Terrakotten an das K. Antiquarium.

Der Grosskaufmann Bernhard Lust in Charlottenburg, aus Nürnberg gebürtig, widmete aus Anlass des 60 jährigen Bestandes seines Geschäfts dem K. Münzkabinett die Summe von 25000 M. zum Ankaufe wertvoller Münzen.

Endlich hat der in Bonn am 10. Oktober ds. Js. verschiedene Universitätsprofessor a. D. Edmund Hardy durch rechtsgültiges Testament vom 28. Oktober 1901 die K. Bayer. Akademie der Wissenschaften zur Erbin seiner Hinterlassenschaft eingesetzt mit der Bestimmung, dass aus der Erbschaftsmasse, abzüglich einiger besonderer Vermächtnisse, mindestens 50000 M. zu einer Stiftung für indologische Studien verwendet werden. Die Stiftung, zu deren Annahme das K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten durch Entschliessung vom 17. Oktober Nr. 22978 die Akademie bereits ermächtigt hat, soll den Namen „Hardy-Stiftung“ führen. Über ihre Verwaltung hat Hardy folgende Bestimmungen getroffen: „Der Zinsertrag soll alljährlich am 9. Juli entweder a) zur Unterstützung eines jungen Gelehrten, gleichviel welchem deutschen Bundesstaat er angehören mag, der seine Universitätsstudien bereits vollendet hat, behufs Fortsetzung seiner Fachstudien, oder b) zu Preisen für vorliegende, wissenschaftliche Leistungen oder c) zur Unterstützung wissenschaftlicher Unternehmungen verwendet werden, — alles jedoch unter Beschränkung auf das Gebiet der Indologie in dem Umfang dieses Begriffes, wie er wissenschaftlich anerkannt wird.

Die Verleihung eines Preises für gedruckte Werke ist auf solche zu beschränken, die im Laufe der letzten 3 Jahre, vom Verleihungstermin an gerechnet, erschienen sind. In diesem Falle, aber auch nur in diesem allein, soll die Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit des Verfassers zu einem deutschen Bundesstaat keinen Unterschied begründen.

Bei der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften soll es stehen, im Falle, dass es sich um eine wissenschaftliche Reise oder um Unterstützung grösserer wissenschaftlicher Unternehmungen handelt, auch über den Zinsertrag von zwei oder mehreren aufeinander folgenden Jahren kraft eines einmaligen Beschlusses zu verfügen. Für die Verlängerung über das dritte Jahr hinaus soll es jedoch eines erneuten Beschlusses bedürfen.

Die Verwendung des Jahresertrages der Hardy-Stiftung soll jedesmal an einer geeigneten Stelle bekannt gegeben werden.

Wenn Verhältnisse irgendwelcher Art die Inanspruchnahme der Zinserträge der Stiftung für ihren eigentlichen Zweck der Förderung der Indologie ausschliessen, so bleibt es der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften anheimgegeben, sie für andere Zweige der orientalischen Forschung, jedoch unter Bevorzugung solcher Zweige, welche sich mit der Indologie berühren, entsprechend zu verwenden."

Hardy schliesst seine Bestimmungen mit den Worten: „Möge diese Stiftung Zeugnis ablegen von meiner Vorliebe für ein Forschungsgebiet, das mir den Vorteil gewährte, in geistigen Verkehr mit vielen Mitstrebenden zu treten, älteren und jüngeren aus der alten und der neuen Welt, und manche derselben mir als Freunde zu erwerben!"

Dem edlen Stifter sei an dieser Stelle der wärmste Dank der Akademie ausgesprochen. Nicht bloss die Gabe selbst ist für uns wertvoll, sondern auch die Tatsache, dass ein Gelehrter, der zu unserer Akademie nicht in näheren Beziehungen stand, uns sein Gut anvertraute, weil er die Überzeugung hatte, dass es hier zu Nutz und Frommen der Wissenschaft vorteilhaft verzinst wird.

Ich komme sicherlich nur einem Wunsche der Mitglieder der Akademie und ebenso auch unserer verehrten Gäste entgegen, wenn ich nach Mitteilungen unseres Mitgliedes Herrn Professor Kuhn die wichtigsten Daten über Leben und Wirken unseres Gönners bekannt gebe.

Edmund Georg Nikolaus Hardy wurde am 9. Juli 1852 zu Mainz geboren, studierte daselbst am bischöflichen Seminar und war, 1875 zum Priester geweiht, mehrere Jahre als Kaplan zu Heppenheim an der Bergstrasse tätig. Nachdem er 1879 in Heidelberg zum Doktor der Philosophie promoviert und später noch einige Zeit in Berlin philosophischen Studien obgelegen hatte, veröffentlichte er 1884 eine geschätzte Abhandlung „Über den Begriff der Physis in der griechischen Philosophie“. 1885 in Freiburg im Breisgau zum Doktor der Theologie promoviert, habilitierte er sich 1886 in der dortigen theologischen Fakultät und erhielt noch im gleichen Jahre eine ausserordentliche Professur, die er mit der Rede „Die allgemeine vergleichende Religionswissenschaft im akademischen Studium unserer Zeit“ öffentlich antrat und bis 1893 bekleidete. 1894 übernahm er eine ordentliche Professur des Sanskrit und der vergleichenden Religionswissenschaft zu Freiburg in der Schweiz, legte jedoch infolge bekannter Vorgänge im Frühjahr 1898 zugleich mit acht anderen reichsdeutschen Kollegen sein Amt nieder und lebte dann als Privatgelehrter zuerst in Würzburg, seit 1903 in Bonn, wo ihn am 10. Oktober dieses Jahres ein vorzeitiger Tod ereilte.

Von Hardys fachwissenschaftlichen Arbeiten können hier nur die wichtigsten genannt werden. 1890 erschien „Der Buddhismus nach älteren Pali-Werken dargestellt“, 1893 „Die vedisch-brahmanische Periode der Religion des alten Indiens“ — zwei Werke, die ihm sofort die allgemeine Anerkennung der Fachgelehrten eintrugen. Seit 1894 beteiligte er sich auf das eifrigste an den Arbeiten der Pali Text Society, eines von Professor Rhys Davids in London begründeten Vereins, der sich die Herausgabe der in Pali (der ältesten Tochtersprache des Sanskrit) geschriebenen Religionsbücher des südlichen Buddhismus

zur Aufgabe gesetzt hat. Sechs Bände dieser Reihe hat Hardy mit unermüdlichem Fleisse und grösster Sorgfalt nach den Handschriften herausgegeben. Daneben liess er in diesen Jahren drei selbständige Schriften erscheinen: in der von Kampers, Merkle und Spahn herausgegebenen „Weltgeschichte in Charakterbildern", die wertvolle Monographie „Indiens Kultur in der Blütezeit des Buddhismus. König Asoka" 1902, eine eingehende Würdigung dieses berühmten Königs aus dem 3. vorchristlichen Jahrhundert nach seinen Inschriften entworfen, und in der bekannten Sammlung Göschen zwei anspruchslose, aber tüchtige Büchlein: „Indische Religionsgeschichte" 1898 und „Buddha" 1903, in welch letzterem der Versuch gemacht wird, den Religionsstifter und seine Weltanschauung auf Grund seiner eigenen Aussprüche psychologisch zu begreifen. Dazu kommt in der Abhandlung „Zur Geschichte der vergleichenden Religionsforschung" in Band IV, 1901 des „Archivs für Religionswissenschaft" ein wertvolles Zeugnis, wie allseitig und umfassend Hardy die Ziele der Religionsgeschichte aufgefasst wissen wollte. In den letzten Jahren beschäftigten ihn die Vorarbeiten zu einem Wörterbuche der Pali-Sprache, dessen Vollendung wir von dem vorher genannten Rhys Davids erhoffen dürfen.

Hardy hat sich in verhältnismässig kurzer Zeit vom einseitigen Parteistandpunkt zur Unbefangenheit des freien Forschers hindurchgearbeitet und bei unverbrüchlicher Treue gegen die Kirche, der er durch Geburt und Erziehung angehörte, steht er mit seinen späteren Arbeiten sichtlich unter dem Einflusse des friedvollen und toleranten Geistes, welcher die Lehre des Fürstensohnes von Kapilavastu so rühmlich auszeichnet.

Die Stiftung des hochherzigen Gelehrten in seinem Sinne zu verwalten, wird der Akademie stets eine Ehrenpflicht sein.

Endlich habe ich noch bekannt zu geben, dass das Kuratorium der Liebigstiftung auf Antrag seines auswärtigen Mitgliedes, des Geheimen Hofrats Prof. Dr. O. Kellner in Möckern-

Leipzig, dem Zivilingenieur Professor Dr. Adolf Frank in Charlottenburg die goldene Liebig-Medaille verliehen hat. Frank hat durch die Einführung der Düngung mit Kalisalzen und durch seine erfolgreichen Bemühungen, den Luftstickstoff in ein wertvolles Düngemittel zu verwandeln, sich um die Landwirtschaft hervorragende Verdienste erworben und dafür eine öffentliche Anerkennung nach dem Stiftungszwecke verdient.

Das Kuratorium hat weiter, dem Antrage desselben Mitglieds und dem vorgelegten Versuchsplane zustimmend, dem Direktor des Landwirtschaftlichen Instituts der Universität Kiel, Professor Dr. Rodewald, zur Ausführung von Versuchen über die Selbstentzündung des Heus aus den Erträgen der Stiftung eine Beihilfe von 1000 M. gewährt.

Hierauf verkündigte der Klassensekretär, Herr C. v. Voit, die Wahl der mathematisch-physikalischen Klasse. Es wurde dabei gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt:

zum ordentlichen Mitgliede das bisherige ausserordentliche Mitglied:

Dr. August Rothpletz, ordentlicher Professor der Geologie und Paläontologie an der hiesigen Universität.

Sitzung vom 3. Dezember 1904.

1. Herr Karl Göbel spricht: „Über die kleistogamen Blüten und die Anpassungstheorien."

Die kleistogamen Blüten sind bisher hauptsächlich teleologisch gedeutet worden, man glaubte, sie träten nur in solchen Fällen auf, wo sie der Pflanze von direktem Nutzen seien. Der Vortragende zeigte zunächst, dass dieser Annahme schon das zeitliche Vorkommen der kleistogamen Blüten, namentlich bei Viola biflora in den bayerischen Alpen widerspricht, dass vielmehr diese Blütenform abhängig sein muss von bestimmten äusseren Faktoren, nicht etwa von dem Ausbleiben der Samenbildung in den gewöhnlichen Blüten. Die experimentelle Untersuchung ergab, dass die kleistogamen Blüten Hemmungsbildungen darstellen, bedingt durch die in zu geringer Menge erfolgende Produktion bestimmter organischer Substanzen. Es gelang demzufolge durch mangelhafte Ernährung Pflanzen mit nur kleistogamen Blüten zu erziehen, und solche, welche schon chasmogame Blüten erzeugt hatten, wieder zur Bildung kleistogamer Blüten zu veranlassen (Impatiens noli tangere) und ebenso durch kräftige Kohlenstoffassimilation und Beschränkung des Wachstums bei Veilchen-Arten, welche normal zuerst im Jahre chasmogame, dann nur kleistogame Blüten bilden, im Herbste wieder chasmogame Blüten hervorzurufen.

2. Herr Carl von Orff legt das 6. Heft der Veröffentlichungen der K. Bayer. Kommission für die internationale

Erdmessung (relative Schwere-Messungen in Bayern, 1. Reihe 1896—1900) vor.

Dasselbe bringt die bisher in Bayern unter seiner Leitung von Herrn Professor Dr. Anding ausgeführten Messungen der Intensität der Schwerkraft zur Darstellung. Diese sowohl für die Geodäsie wie für die Geologie interessanten Bestimmungen bestätigen den durch die österreichischen und schweizerischen Messungen ermittelten Massendefekt unter dem Alpengebiet, während für Bayern nordwärts des Parallels von $48\frac{1}{2}^{\circ}$ Breite unterirdische Massenüberschüsse angedeutet werden.

3. Herr Richard Hertwig hält einen Vortrag: „Experimentelle Untersuchungen über die Differenzierung des Geschlechts bei Rana temporaria und Rana esculenta."

In demselben versucht er die sexuelle Differenzierung auf Veränderungen in dem Mengenverhältnis von Kern und Protoplasma zurückzuführen. Er sucht ferner die Erfahrungen über die Ursachen, welche bei Protozoen Veränderungen im Verhältnis von Kern und Protoplasma hervorrufen, auf das Geschlechtsproblem anzuwenden.

Namen-Register.

Sach-Register.

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1904.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. Band XXV. 1903. 8⁰.

Historische Gesellschaft des Kantons Aargau in Aarau:

Argovia. Bd. 29. 1901; Bd. 30. 1903. 8⁰.

University of Aberdeen:

Studies. No. 8. 9. 1903. 4⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. 27, part 2. 1903. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis. 1903. 1904. 8⁰.
Rad. Vol. 153—156. 1903. 8⁰.
Monumenta historico-juridica. Vol. IX. 1904. 8⁰.
Zbornik. Bd. VIII, 2; IX, 1. 1903. 8⁰.
Rječnik. Svezak 23. 1903. 4⁰.

K. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. VI. 1904. gr. 8⁰.

Kroatische archäologische Gesellschaft in Agram:

Vijesnik. N. Ser. Bd. VII, Heft 1. 1903. 4⁰.

New-York State Library in Albany:

New-York State Library. Annual Report. Vol. 84. 85, 1. 2. 1901—02. 8⁰.

University of the State of New-York in Albany:

New-York State Museum. Report. Vol. 54, 1—4; 55. 1900—01. 8⁰.
Report of the College Department. Vol. 4th 1901; 5th 1902. 1903. 8⁰.
Bulletin of the New-York State Museum. No. 44; 52—62; 64—67. 1901—1903. 8⁰.

Allegheny Observatory in Allegheny:

Miscellaneous scientific Papers. N. Ser. No. 15—17. Chicago und Lancester. 1903. 8⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

G. Durand, La Cathédrale d'Amiens. Tom. II. 1903. fol.
Mémoires. IVᵉ Série, tom. 4. 1903. 8⁰.
Bulletin. Année 1903. 2ᵈ et 3ᵉ trimestres. 1903. 8⁰.

Historischer Verein in Ansbach:

50. u. 51. Jahresbericht. 1903—04. 4⁰.

Redaktion der Zeitschrift „Athena" in Athen:

Athena. Tom. 15. 1903. 8⁰.

École française in Athen:

Bulletin de correspondance hellénique. 1890—1892; 1896—1901; 1902, No. 1—6. Paris 1901—03. 8⁰.

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Zeitschrift. 30. Jahrgang. 1903. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. 23, No. 165. 1903. 8⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XXV, No. 2—4. 1903. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. XXIV, No. 1—3.
American Chemical Journal. Vol. 29, No. 3—6; Vol. 30, No. 1—6; Vol. 31, No. 1—3. 1902—04. 8⁰.
Johns Hopkins University Studies. Ser. XXI, Mo. 1—12. 1903. 8⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. XI, No. 1—9. 1903. 8⁰.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. XIV, No. 153; Vol. XV, No. 154—157. 1903—04. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. XV, 2. 1904. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Zeitschrift für Geschichts- und Altertumskunde. Bd. III, Heft 2. 1904. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1902/03 in 4⁰ u. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 46, afl. 6; Deel 47, afl. 1. 2. 1903—04. 8⁰.
Notulen. Deel 41, afl. 2. 3 1903. 8⁰.
Dagh-Register. Anno 1647—1648. s'Gravenhage 1903. 4⁰.
De Tjandi Mendoet voor de Restaurtatie, door B. Kersjes en C. den Hamer. 1903. fol.
De Java-Oorlog van 1825—30 door P. J. F. Louw. Deel III. 1904. 4⁰.

R. Observatory in Batavia:

Observations. Vol. XXV, 1902. 1904. fol.
Regenwaarnemingen. Jahrg. 1902. 1903. gr. 8⁰.

Kgl. natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 63. Weltevreden 1903. 8⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv. Bd. XXII, 2. 1903. 8⁰.

K. Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

8 Karten zum geologischen Atlas von Macedonien. 1903. fol.

Museum in Bergen (Norwegen):

G. O. Sars, An Account of the Crustacea of Norway. 1903. gr. 8⁰.
Aarbog für 1903. Heft 3. 1904. 8⁰.

University of California in Berkeley:

Schriften aus d. Jahre 1903.

K. preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Politische Correspondenz Friedrichs des Grossen. Bd. 29. 1904. 8⁰.
Corpus inscriptionum latinarum. Pars III. 1904. fol.
Abhandlungen aus dem Jahre 1903. 1903. 4⁰.
Sitzungsberichte. 1903, No. XLI—LIII; 1904, No. I—XXIV. gr. 8⁰.

Zentralbureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Veröffentlichungen. N. F. No. 9. 1904. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 36. Jahrg., Heft 18; 37. Jahrg., Heft 1—10. 1904. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 55, Heft 3. 1903. 8⁰.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Bd. 34. 1904. 8⁰.

Deutsche physikalische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. Jahrg. 2, Heft 1. Braunschweig 1904. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 5, No. 24, 1903; Jahrg. 6, No. 2. Braunschweig 1904. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Zentralblatt für Physiologie. Bd. VII, No. 20—26; Bd. VIII, No. 1—7. 1903. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 1902—03, No. 16. 17. 1903. 8⁰.
Jahrg. 1903—04, No. 5—11. 1904. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XVIII, 4; XXIX, 1. 1904. 4⁰.

K. preuss. geodätisches Institut in Berlin:

Verhandlungen der XIV. allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung. 1904. 4⁰.
Resultater af Vandstands-Observationer paar den Norske Kyst. Heft VI Kristiania 1904. 4⁰.
Veröffentlichung. N. F., No. 14—16. 1904. 8⁰.
F. R. Helmert, Zur Abteilung der Formel von C. F. Gauss für den mittleren Beobachtungsfehler. 1904. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Ergebnisse der Wolkenbeobachtungen in Potsdam i. d. J. 1896 u. 1897. 1903. 4⁰.

Ergebnisse der Arbeiten am Aeronautischen Observatorium 1901—02 von R. Assmann und Berson. 1904. 4°.
Abhandlungen. Bd II, No. 3. 4. 1902—04. 4°.
Die Temperatur der Luft über Berlin 1902—03 von Rich. Assmann. 1904. 4°.
Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1903. Heft 1. 1904. 4°.
Archiv des Erdmagnetismus. Heft 1. Potsdam 1903. 4.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 32, Jahrg. 1901, Heft 3. 1903. 8°.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 1904, Heft 1—13. 1904. gr. 8°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. XXIII. Jahrg., 1903, Heft 12; XXIV. Jahrg., 1904, Heft 1—6. 4°.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. XXIX. Bd. Zürich 1904. 8°.
Quellen zur Schweizer Geschichte. Bd. XV, 2 u. XXI. Basel 1902—04. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Verhandlungen in Locarno. 2.—5. Sept. 1903. Zürich 1904. 8°. Nebst einem französ. Auszug daraus. Genève 1903. 8°.

Société d'Émulation du Doubs in Besançon:

Mémoires. VIIe Sér., Vol. 7, 1902 1903. 8.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. Serie III. Vol. XXI, fasc. 4-6; Vol. 22, fasc. 1-3. 1903—04. 8°.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte. 1903, 1. u. 2. Hälfte. 1903—04. 8°.

Ausschuss für das Kekulé-Denkmal in Bonn:

Das Kekulé-Denkmal. Berlin 1904. 8°.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 60. Jahrg., 1902, 2. Hälfte; 61. Jahrg., 1903, 1. Hälfte. 1903—04. 8°.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1904, No. 1—12. 1904. 8°.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. XXXIX, No. 5—18. 1903—04. 8°.
Memoirs. Vol. XIII, 1. Cambridge 1904. 4°.

Public Library in Boston:

Annual Report. Vol. 34. 1903. 8°.

Verein für Naturwissenschaft in Braunschweig:

.9 und 13. Jahresbericht für die Jahre 1893—95 und 1901—03. 1903 bis 1904. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XVII, 3. 1903. 8⁰.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. VIII. Jahrg., Heft 1. 2. 1904. 8⁰.

Mährisches Landesmuseum in Brünn:

Zeitschrift. Bd. IV, 1. 1904. 8⁰.
Casopis. Bd. IV, 1. 2. 1904. 8⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. Bd. 41, 1902. 1903. 8⁰.
21. Bericht der meteorol. Kommission. 1902. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés. Tom. XVI. XVII. XVIII, 7. 1904. 8⁰.
Bulletin. IV. Série, Tom. XVII, No. 11. 12; Tom. XVIII, No. 1—5. 1903. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Mémoires. Tom. 54, fasc. 6. 1904. 4⁰.
Mémoires couronnés in 4⁰. Vol. 62, fasc. 5—. 1904. 4⁰.
Mémoires couronnés in 8⁰. Tom. 63, fasc. 8; Tom. 64; Tom. 65, fasc. 1. 2; Tom. 66. 1903/04. 8⁰.
Biographie nationale. Tom. XVII, 2. 1903. 8⁰.
Annuaire. 1904. 8⁰.
Bulletin. a) Classe des lettres 1903, No. 11. 12; 1904, No. 1—4. 8⁰.
b) Classe des sciences 1903, No. 11. 12; 1904, No. 1—4. 8⁰.
Recueil des Instructions générales aux Nonces de Flandre 1596—1635. 1904. 8⁰.
La Chronique de Gislebert de Mons. 1904. 8⁰.
Matricule de l'Université de Louvain I. 1903. 4⁰.
Actes on Procès-verbaux des séances tenues par le conseil de l'Université de Louvain. Tom. I. 1903. 4⁰.
Actes et documents anciens intéressant la Belgique. Nouv. Sér. par Charles Duvivier. 1903. 8⁰.

Bibliothèque Royale in Brüssel:

Catalogue des Manuscrits par J. van den Ghein. Tom. 3. 1903. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XXIII, fasc. 1—3. 1904. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tom. 47. 1903. 8⁰
Mémoires. Tom. X. XI. 1903. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Annales. Tom. XXVI, 2. Liège 1903—04. 8⁰.
Bulletin. Tom. XVII, fasc. 5. 6. 1904. 8⁰.

Société belge d'astronomie in Brüssel:

Bulletin. 8ᵉ année, No. 12. 1903.
9ᵉ année, No. 1—5. 1904. 8⁰.

K. ungar. geologische Anstalt in Budapest:

Publikationen: Allgemeine und paläontologische Literatur der Pontischen Stufe Ungarns. Von Gyula Halaváts. 1904. 8⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 33, Heft 10—12; Bd. 34, Heft 1—4. 1903—04. gr. 8⁰.
Jahresbericht für 1601. 1903. 4⁰.
Geologische Spezialkarte der Länder der ungarischen Krone. Blatt $\frac{\text{Zone 15}}{\text{Col. XX}}$, $\frac{\text{Zone 16}}{\text{Col. XX}}$, $\frac{\text{Zone 14}}{\text{Col. XIX}}$. 1904.
4. Nachtrag zum Katalog der Bibliothek von Bruck József. 1897. 4⁰.

K. Ungarische naturwissenschaftliche Gesellschaft in Budapest:

A Magyar Állattani irodalom ismertelése. III, 1891—1900. 1903. 8⁰.
Természettudományi Könyvkiadó-Vállalat. Kötet LXXI. LXXII. LXXIII. 1903. 4⁰.

Botanischer Garten in Buitenzoorg (Java):

Verslag over het jaar 1902. 1903. gr. 8⁰.
Mededeelingen. No. LXVI. LXVII LXX—LXXII. 1903—04. 4⁰.
Bulletin. No. XVIII. 1904. 4⁰.

Society of natural sciences in Buffalo:

Bulletin. Vol. VIII, No. 1—3. 1903. 8⁰.

Institut Égyptien in Cairo:

Bulletin. 1902, fasc. 5—8; 1903, fasc. 1. 2. 1902—03. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1903. July—Dez. 1903. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol XV, part 3. 1904. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New. Ser., No. 1049—1066. 1903—04. 8⁰.
Journal. No. 411—13. 1903. 8⁰.
Proceedings. 1903, No. 6—10. 1903. 8⁰.
Catalogue. Fasc. IV. 1904. 4⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Contents and Index 1887—1897. 1903. 4⁰.
Memoirs. Vol. XXXIII, 3; XXXIV, 3; XXXV, 2. 1903. 4⁰.
Paläontologica Indica. Serie IX, Vol. III, part II, No. 1. 1903. fol.
General Report. 1902—1903. 1903. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 39, No. 9; Vol. 41, No. 2; Vol. 42, No. 5; Vol. 45, No. 1. 2; Vol. 46, No. 1. 1904. 8⁰.
Annual Report for 1902—03. 1903. 8⁰.
Memoirs. Vol. XXIX, Text and Atlas. 1903. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

58th annual Report for 1902—03. 1903. 8⁰.
Annals. Vol. 43, No. 3; Vol. 46, No. 1; Vol. 48, No. 5—7. 9; Vol. 51. 1903. 4⁰.
Circulars. No. 72. 73. 1903. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. XII, 4. 5. 1904. 8⁰.
Transactions. Vol. XIX, part 3. 1904. 4⁰.

South African Association for the advancement of Science in Capetwon:

Report. 1st Meeting. 1903. 8⁰.

South African Museum in Capetown:

Annals. Vol. IV, part 1—3. 1903. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bollettino mensile. Nuova Ser., fasc. 79. 1904. 8⁰.

K. technische Hochschule in Charlottenburg:

G. Hettner, Alte mathematische Probleme. Berlin 1904. 4⁰.

John Crerar Library in Chicago:

9th annual Report for 1903. 1904. 8⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 75. 77—80. 82. 85. 87. 1903. 8⁰.

Yerkes Observatory of the University of Chicago:

Publications. Vol. III, part 1. 1903. 4⁰.

University of Chicago:

The Decennial Publications. 1903. 4⁰.
Report for the period 1899—1902. 1903. 4⁰.

Zeitschrift „Astrophysical Journal" in Chicago:

Vol. XIX, No. 1—4. 1904. gr. 8⁰.

Norsk Folkemuseum in Christiania:

Aarsberetning 1903. 1904. 4⁰.

Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Forhandlingar Aar 1903. 1904. 8⁰.
Skrifter. Mathem.-naturwiss. Klasse. 1903, 2 Bde. 1904. 4⁰.
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. 23—25. 1900—03. 8⁰.

Kgl. Norwegische Universität in Christiania:

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 40. 41. 1902—03. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubunden in Chur:

XXXIII. Jahresbericht. Jahrg. 1903. 1904. 8⁰.

Lloyd Museum and Library in Cincinnati:

Bulletin No. 6. 1903. 8⁰.
Mycological Notes No. 10—14. 1903. 8⁰.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Zeitschrift. Heft 46. 1903. gr. 8⁰.
Mitteilungen. Jahrg. 3, Nr. 1 und 2. 1904. 8⁰.

Kaiserl. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika in Dar-es-Salam:

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Bd. I, Heft 7; Bd. II, Heft 1—3. Heidelberg 1903—04. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mitteilungen. Bd. IX, 7. 1904. 8⁰.

Historischer Verein in Dillingen:

Jahrbuch. XVI. Jahrg. 1903. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. 26, 3e trimestre. 1903. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Dresden:

Literatur der Landes- und Volkskunde Sachsens von Paul Emil Richter. Nachtrag 4. 1903. 8⁰.
Mitgliederverzeichnis 1904. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Ser. III, Vol. 24, part 3 u. 4, Sect. A; part 4 u. 5, Sect. B; part 4 u. 5, Sect. C. 1903—04. 8⁰.
Transactions. Vol. 32, part 7—10, Sect. A; part 3. 4, Sect. B; part 2. 3, Sect. C. 1903—04. 4⁰.

Royal Society in Dublin:

The economic Proceedings. Vol. I, part 4. 1903. 8⁰.
The scientific Proceedings. Vol. X, part 1. 1903. 8⁰.
Transactions. Vol. VIII (Serie II), No. 2—5. 1903. 4⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. XXV, No. 12; Vol. XXVI, No. 1—6. 1903. 8⁰.

Kgl. Preuss. Forstakademie in Eberswalde:

Johannes Schubert. Der Wärmeaustausch im festen Erdboden. Berlin 1904. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XXIV, No. 5; Vol. XXV, No. 1—3. 1903—04. 8⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. III, No. 4. 1903. 8⁰.

Gesellschaft f. bildende Kunst u. vaterländische Altertümer in Emden:

Jahrbuch. Bd. XV, 1. 1903. 8⁰.

Kgl. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Festschrift zur Feier des 150 jährigen Bestehens der Kgl. Akademie. 1904. gr. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Serie, Vol. 26, disp. 4; V. Serie. Vol. 1, disp. 1. 1903—04. 8⁰.

Società Asiatica Italiana in Florenz:

Giornale. Vol. XVI, 2. 1903. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Bd. XXVII, 2 u. 3; XXIX, 1. 1903—04. 4⁰.
Bericht. 1903. 8⁰.

Verein für Geschichte und Altertumskunde in Frankfurt a/M.:

Der Königsleutnant Graf Thorane in Frankfurt a/M. von H. Grotefend. 1904. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für 1902—03. 1904. 8⁰.

Walther Zurhellen, Darlegung und Kritik der zur Reduktion photographischer Himmelsaufnahmen aufgestellten Formeln und Methoden. 1904. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

„Schau-ins-Land". 30. Jahrg. 1903. fol.

Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:

Freiburger Diözesan-Archiv. N. F., Bd. IV. 1903. 8⁰.

Observatoire in Genf:

Resumé météorologique de l'année 1902 pour Genève et le Grand Saint-Bernard 1903. 8⁰.

Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1902. 1903. 8⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Vol. 34, fasc. 4. 1904. 4⁰.

R. Università di Genova in Genua:

Atti. Vol. XI. XVII. 1892—1902. 4⁰.

Oberhessischer Geschichtsverein in Giessen:

Mitteilungen. Bd. XII. 1903. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 79. 1903. 8⁰.

Codex diplomaticus Lusatiae superioris. Bd. 2, Heft 4. 1903. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1904, No. 1—6. Berlin. gr. 8⁰.

Abhandlungen. N. F.
Philol.-hist. Klasse. Bd. V, 5; VII, 5; VIII, 1. Berlin 1904. 4⁰.

Nachrichten. a) Philol.-hist. Klasse 1903, Heft 6; 1904, Heft 1—3. 1904. 4⁰.
b) Math.-phys. Klasse. 1903, Heft 6; 1902, Heft 1 u. 2. 1904. 4⁰.
c) Geschäftliche Mitteilungen. 1903, Heft 2; 1904, Heft 1. 1903—04. 4⁰.

Universität in Gothemburg:

Årsskrift. Bd. VIII, 1902; Bd. IX, 1903. 8⁰.

Scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. XII, article 5—7. 1902—03. 8⁰.

Universität Graz:

Die Glaubwürdigkeit des irenäischen Zeugnisses über die Abfassung des IV. Evangeliums von F. S. Gutjahr. 1904. gr. 8⁰.

Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein in Greifswald:

Pommersche Jahrbücher. Bd. 5. 1904. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VII. Reeks, Deel 2, afl. 1—4. 1904. 8⁰.

Commissie van Advies voors Rijks Geschiedkundige Publication im Haag:
Overzicht. 1904. 4⁰.

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Sér. II, Vol. 3, partie 4; Vol. 8, partie 5. 1903—04. 4⁰.
Catalogue de la Bibliothèque par G. C. W. Bohnensieg. Tom. 3. 1888—1903. 1904. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Série II, Tom. 9, livr. 1—3. La Haye 1904. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 39, No. 12; Heft 40, No. 1—4. 1904. 4⁰.
Abhandlungen. Bd. 80. 81. 1903. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 57, Heft 4; Bd. 58, Heft 1. 2. Leipzig 1903—04. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. 76. Bd., Heft 3—6. Stuttgart 1904. 8⁰.

Thür.-sächs. Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums in Halle:

Neue Mitteilungen. Bd. XXII, 1. 1903. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Hamburg:

Mitteilungen. Bd. IV, Heft 4. Leipzig 1904. 8⁰.

Deutsche Seewarte in Hamburg:

26. Jahresbericht für 1903. 1904. 4⁰.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Jahresberichte der Hamburger wissenschaftlichen Anstalten a. d. J. 1903.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Mitteilungen. 23. Jahrg. 1903. 1904. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Verhandlungen. III. Folge, XI. 1904. 8⁰.

Wetterauische Gesellschaft für die gesamte Naturkunde in Hanau:

Bericht über den Zeitraum vom 1. April 1899 bis 30. Sept. 1903. 1903. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrg. 1903, Heft 3; Jahrg. 1904, Heft 1. 8⁰.

Universität Heidelberg:

Heidelberger Professoren aus dem 19. Jahrhundert. 2 Bde. 1903. 4⁰.
Die Universität Heidelberg im 19. Jahrhundert. Festrede von Erich Marks. 1903. 8⁰.
Über die Entwicklung der Chirurgie von Vinzenz Czerny. 1903. 4⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. XIII, 1. 1904. 8⁰.

Naturhistorisch-medizinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F., Bd. VII, Heft 3—5. 1904. 8⁰.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der Obergermanisch-Raetische Limes des Römerreiches. Liefg. XX u. XXI. 1903—04. 4⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Acta societatis scientiarum Fennicae. Vol. XXV, 1; XXVIII—XXXI. 1899. 4⁰.
Öfversigt XLIV. XLV. 1903—04. 8⁰.
Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 61. 62. 1902—03. 8⁰.

Institut météorologique central in Helsingfors:

Observations météorologiques. Vol. 16 u. 17. 1897 et 1898. 1904. 4⁰.
État des glaces et des neiges en Finlande pendant l'hiver 1892—93. Kuopio 1904. 4⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F., Bd. XXXII, Heft 1 u. 2. 1903—04. 8⁰.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mitteilungen. 52. Bd., Jahrg. 1902. 1903. 8⁰.
Die Unvollkommenheit d. Stoffwechsels v. Karl F. Jickeli. Berlin 1902. 8⁰.
Karl Petri, Monographie der Coleopteren-Tribus Hiperini. Berlin 1903. 8⁰.

Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte in Hildburghausen:

Schriften. 46. u. 47. Heft. 1903—04. 8⁰.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 31. Jahrg. 1904. 8⁰.

Historischer Verein in Ingolstadt:

Sammelblatt. Heft XXVII. 1902. 8⁰.

Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. 28. Jahrg. 1902/03. 1903. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. VII, No. 9; Vol. VIII, No. 1—5. 1903—04. gr. 8.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Festschrift zum 70. Geburtstag von Ernst Haeckel. 1904. fol.
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 38, No. 3. 4. 1904. 8⁰.
Neurobiologische Arbeiten I. v. O. Vogt. Bd. I Text, Liefg. 2; Bd. II Atlas, Teil 1. 1904. fol.
Neurobiologische Arbeiten II. v. O. Vogt. Bd. 1, Liefg. 2.

Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde in Jena:

Zeitschrift. N. F., Bd. XXIV, 1. 1903. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte. Bd. XIII, 2, 1902. 1903. 8⁰.
Schriften. Bd. XII. 1903. 4⁰.

Universität Jurjew (Dorpat):

Biogr. Wörterbuch der Professoren der Universität Jurjew. Dorpat 1903. 8⁰.

Badische historische Kommission in Karlsruhe:

Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins. N. F., Bd. 19, Heft 1 u. 2. Heidelberg 1904. 8⁰.
Bericht über die 22. Plenarsitzung. Heidelberg 1903. 8⁰.
Topographisches Wörterbuch des Grossherzogtums Baden. Bd. I, Halbband 2. Heidelberg 1904. 8⁰.

South African Museum in Kapstadt:

Annals. Vol. IV, part 4—6. Capetown 1904. 8⁰.

Departement of Mines, New South Wales in Kapstadt:

Annual Report 1903. Capetown 1904. fol.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. II. Série, Tome XIII, 3. 4. 1903. 8⁰.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Bd. 70, No. 12; Bd. 71, No 1—6. 1903—04. 8⁰.
W. A. Bogoroditzkij, Allgemeiner Kurs der russ. Grammatik. 1904. 8⁰.
5 Dissertationen in russischer Sprache. 1904. 8⁰.

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:

Zeitschrift. N. F., Bd. XXVII. 1903. 8⁰.
Mitteilungen. Jahrg. 1902. 1903. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Kassel:

Abhandlungen und Bericht XLVIII. 1903. 8⁰.

Société mathématique in Kharkow:

Communications. 2ᵉ Série, Tom. VIII, No. 1—3. 1902. gr. 8⁰.

Société des sciences physico-chimique à l'Université de Kharkow:

Travaux 5 Hefte. 1903. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:

Annales 1903, fasc. 4; 1904, fasc. 1. 1904. 4⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holsteinische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Bd. 33 und Register zu Bd. 21—30. 1904. 8⁰.
Quellensammlung. Bd. 6. 1904. 8⁰.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F., Bd. 5, Abteilung Helgoland, Heft 2; Bd. 6, Abteilung Helgoland, Heft 1 u. 2. 1904. 4⁰.

K. Universität in Kiel:

Schriften aus dem Jahre 1902/03 in 4⁰ u. 8⁰.

Universität in Kiew:

Iswestija. Bd. 43, No. 10—12; Bd. 44, No. 1—3. 1904. 8⁰.

Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:

Jahresbericht für 1902. 1903. 8⁰.
Carinthia I. 98. Jahrg., No. 1—4. 1903. 8⁰.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Carinthia II. 1903, No. 6; 1904, No. 1 u. 2. 8⁰.

Siebenbürgischer Museumsverein in Klausenburg:

Sitzungsberichte. 3 Hefte. 1904. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 44. Jahrg. 1903. 4⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Mémoires. a) 6e Série. Section des lettres, t. VI, No. 2.
b) 6e „ „ „ sciences, t. XII, No. 4.
7e „ „ „ „ t. II, No. 1. 1904. 4⁰.
Oversigt. 1903, No. 6; 1904, No. 1—3. 1904. 8⁰.

Council of the Fridtjof Nansen Fund in Kopenhagen:

The Norwegian North Polar-Expedition 1893—96. Scientific Results. Vol. IV. London 1904. 4⁰.

Conseil permanent international pour l'exploration de la mer in Kopenhagen:

Bulletin. Année 1903—04, No. 1. 2. 4⁰.
Publications de circonstance, No. 8—11. 1904. gr. 8⁰.

Gesellschaft für nordische Altertumskunde in Kopenhagen:

Aarböger. II. Raekke, Bd. XVIII. 1903. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. Oktober und November 1903. 8⁰.
Rozprawy. a) filolog. II. Serie, Tom. 23; b) histor.-filoz. II. Serie, Tom. 21. 1903—04. 8⁰.
Biblioteka pisarzow polskich. No. 47. 48. 1903. 8⁰.
Rocznik. Rok 1902/03. 1903. 8⁰.
Archiwum Komisyi liter. Tom. X. 1904. 8⁰.
Karłowitcz, Słownik gwar. Tom. III. 1903. 8⁰.
Katalog literatury naukowej polskiej. Tom. III, Heft 2 u. 3. 1903. 8⁰.
Bulletin international. 1903, Decembre; 1904, Janvier-Mars. 1903—04. 8⁰.

College of Science and Engineering in Kyōto:

Mémoirs. Vol. I, No. 1. 1903. gr. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Série, Vol. 39, No. 148. 1903. 8⁰.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

Bulletin. Vol. 2, No. 1—9. 1903. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Klasse. Bd. 22, No. 4. 6.
„ „ math.-physik. Klasse. Bd. 28, No. 6. 7. 1904. 4⁰.
Berichte der philol.-histor. Klasse. Bd. 55, No. 3—6.
„ „ math.-physikal. Klasse. Bd. 55, No. 6; Bd. 56, No. 1—3. 1903—04. 8⁰.

Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft in Leipzig:

Jahresbericht. März 1904. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mitteilungen 1903, Heft 1. 1904. 8⁰.
Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Bd. VI. 1904. 8⁰.

Geschichts- und Altertumsverein in Leisnig:

Mitteilungen. 12. Heft. 1904. 8°.

Cuerpo de Ingenieros de minas del Peru in Linna:

Boletín No. 9. 1904. 8°.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletim. 1903, No. 8—12; 1904, No. 1. 2. 8°.

Université Catholique in Loewen:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1903.

National Physical Laboratory in London:

Report for the year 1903. 1904. 4°.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. IX, No. 73. 74. 1904. 8°.

Royal Society in London:

Year Book 1904. 8°.
Proceedings. Vol. 72, No. 486—495. 1903. 8°.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 64, No. 2—7. 1903—04. 8°.

Chemical Society in London:

Journal No. 495—500 und Indexes. 1904. 8°.
Proceedings. Vol. 19, No. 274; Vol. 20, No. 275—281. 1904. 8°.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 59, part 1—4. 1903. 8°.
List. November 2nd 1903. 8°.
Geological Literatur during the year 1902. 1903. 8°.

Linnean Society in London:

The Journal. a) Botany: Vol. 35, No. 248; Vol. 36, No. 253. b) Zoology: Vol. 29, No. 189. 1903—04. 8°.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1904, part 1—3. 8°.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1903, Vol. II, part 1 u. 2. 8°.

The Cancer Research Fund in London:

Scientific Reports No. 1. 1904. 4°.

Museums-Verein für das Fürstentum Lüneburg in Lüneburg:

Museumsblätter. Heft I. 1904. 8°.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. 30, livr. 2; Tom. 31, livr. 1. 1902—04. 8°.

Société Royale des Sciences in Lüttich:

Mémoires. IIIe Sér., Tom. 5. Bruxelles 1904. 8°.

Universität in Lund:

Acta Universitatis Lundensis. Tom. 38. 1902. Afdeling I. II. 4°.
Sveriges offentliga Bibliotek. Accessions-Katalog. XVI. 1901. Stockholm 1902—03. 8°.

Section historique de l'Institut Royal Grand-Ducal in Luxemburg:
Publications. Vol. 51. 52. 1903. gr. 8⁰.

Académie des sciences in Lyon:
Mémoires. IIIe Série, Tome 7. Paris. 1903. 8⁰.

Société d'agriculture, science et industrie in Lyon:
Annales. VII. Série, Tome 9. 10. 1901—02. 1903. 8⁰.

Société Linnéenne in Lyon:
Annales. Année 1902, Tome 49. 1903. 8⁰.

Université in Lyon:
Annales. I. Sciences, fasc. 12; II. Droit, fasc. 11—13. 1903. 8⁰.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:
Transactions. Vol. XIII, part 2; Vol. XIV, part 1. 1902—03. 8⁰.

Wisconsin Geological and Natural History Survey in Madison:
Bulletin. No. 9. 10. 1903. 8⁰.

Government Museum in Madras:
Bulletin. Vol. 5, No. 1. 1903. 8⁰.

Kodaikánal and Madras Observatories in Madras:
Annual Report for the year 1903. 1904. fol.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:
Anuario. 1904. 16⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:
Boletin. Tom. 44, cuad. 1—6. 1904. 8⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:
Rendiconti. Sér. II, Vol. 36, fasc. 17—20; Vol. 37, fasc. 1—3. 1903—04. 8⁰.
Memorie. Classe di scienze matematiche. Vol. 19, fasc. 10 u. 11; Vol. 20, fasc. 2. 1903. 4⁰.

R. Osservatorio di Brera in Mailand:
Publicazioni. No. XL, parte 1. Mediolani 1903. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:
Atti. Vol. 42, fasc. 4; Vol. 43, fasc. 1. 2. 1904. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:
Archivio Storico Lombardo. Ser. III, fasc. 40, anno XXX, 1903; Ser. IV, fasc. 1, anno XXXI. 1904. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:
Memoirs and Proceedings. Vol. 48, part 1. 2. 1903—04. 8⁰.

Altertumsverein in Mannheim:
Mannheimer Geschichtsblätter. 5. Jahrg. 1904, No. 2—7. 4⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:
Mitteilungen. Bd. VI, 3. 1903. 8⁰.

Royal Society of Victoria in Melbourne:
Proceedings. Vol. XVI, part 2. 1904. 8⁰.

Académie in Metz:

Mémoires. Année 1900—01. 1903. 8⁰.

Instituto geológico in Mexico:

Parergones. Tom. 1, No. 1. 1903. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in Mexico:

Boletin mensual. 1902 Marzo—Mayo. 1902. fol.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias y revista. Tomo XVIII, No. 6; Tomo XIX, No. 2—4. 6. 7. 1902—03. 8⁰.

Sociedad de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Serie, Tomo 2, No. 12; Tomo 3, No. 1. 2. 5—10. 1898—1903. fol.

University in Missouri:

Studies. Vol. II, No. 2. 1903. 8⁰.

Musée océanographique in Monaco:

Bulletin No. 1—9. 11. 12. 1904. 8⁰.
Résultats des campagnes scientifiques, fasc. XXV. XXVI. 1904. fol.

Museo nacional in Montevideo:

Annales. Serie II, Entrega 1. 1904. 4⁰.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section des sciences. 2ᵉ Sér., Tom. 3, No. 3. 1903. 8⁰.

Numismatic and Antiquarian Society of Montreal:

The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal. III. Series, Vol. IV, No. 2—4. 1902. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1903, No. 2. 3; 1904, No. 1. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXIII, 3. 4. 1902; Bd. XXIV, 2. 1904. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Publications. Vol. VI. Sacramento 1903. 4⁰.
Bulletin No. 50—55. 1904 4⁰.

Hydrotechnisches Bureau in München:

Verzeichnis der Flächeninhalte der Bach- und Flussgebiete Bayerns. Heft III. 1904. 4⁰.
Jahrbuch. 5. Jahrg., Heft 4; 6. Jahrg., Heft 1. 4⁰.
Abhandlungen. Untersuchungen über den Einfluss des Waldes auf den Grundwasserstand etc. 1904. 4⁰.

Generaldirektion der K. B. Posten und Telegraphen in München:

Verzeichnis der in und ausserhalb Bayern erscheinenden Zeitungen. 10 bezw. 5 Nachträge zu den Zeitungspreisverzeichnissen. fol.

K. B. Technische Hochschule in München:

Personalstand. Sommersemester 1904. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1904. 8⁰.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1904, No. 1—16. 8⁰.

K. Staatswinisterium des Innern in München:

Die Massnahmen auf dem Gebiete der landwirtschaftlichen Verwaltung in Bayern. 1897—1903. 1903. gr. 8⁰.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1903 in 4⁰ u. 8⁰.
Amtliches Verzeichnis des Personals. Sommersemester 1904.

Ärztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. Bd. XII, 1902. 1903. 8⁰.

Kaufmännischer Verein in München:

30. Jahresbericht für das Jahr 1903/04. 8⁰.

Historischer Verein in München:

Altbayerische Forschungen. Heft II. III. 1904. 8⁰.
Oberbayerisches Archiv. Bd. 52, Heft 1. 1904. 8⁰.
Altbayerische Monatsschrift. Jahrg. IV, Heft 4. 5. 1904. 4⁰.

Verein für Luftschiffahrt in München:

14. Jahresbericht 1903. 1904. 8⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten No. 160—165. 1904. 4⁰.

Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens in Münster:

Zeitschrift. Bd. 61 und Register zu Bd. 1—50. 1903. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Sér. III, Tom. 4, fasc. 3. Paris 1903. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Ser. 3, Vol. IX, fasc. 8—12. 1903. 8⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mitteilungen. Bd. XVI, 3; XVII, 1. 2. Berlin 1903—04. 8⁰.

Historischer Verein in Neuburg a/D.:

Neuburger Kollektaneen-Blatt. 65. Jahrg. 1901. 8⁰.

Société des sciences naturelles in Neuchatel:

Bulletin. Tom. 28, Année 1897—1900. 1900. 8⁰.

Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 51, part 7; Vol. 52, part 7; Vol. 53, part 2. 3; Vol. 54, part 2—5 und Index zu Jahrg. 1901. 1904. 8⁰

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Ser., Vol. 17, No. 97—101. 1904. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. XXIV, 2d Half. 1903. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. XIV, 3. 4; XV, 1. 1903—04. 8⁰.

American Jewish Historical Society in New-York:

Publications No. 11. 1903. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Annual Report for 1903. Vol. XVIII, 2; XIX. 1903—04. 8⁰.
Memoirs. Vol. I, part 8. 1903. 4⁰.
Journal. I—III; IV, 1. 2. 1900—04. gr. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 35, No. 5; Vol. 36, No. 1—6. 1903—04. 8⁰.

Archaeological Institute of America in New-York:

American Journal of Archaeology. Vol. VII, No. 4 und Supplement; Vol. VIII, No. 1. 2. 1903—04. 8⁰.

Nederlandsche botanische Vereeniging in Nijmegen:

Prodromus Florae Batavae. Vol. I, pars 3. 1904. 8⁰.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. Jahrg. 1903, Heft 1—4. 8⁰.
Katalog der mittelalterlichen Miniaturen, von E. W. Bredt. 1903. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Tom. XXIV, 2; XXV, 1. 2. 1902—04. 8⁰.
Sapiski (mathemat. Abteilg.). Tom. XX. 1902. 8⁰.

Historischer Verein in Osnabrück:

Osnabrücker Urkundenbuch. Bd. IV. 1902. 8⁰.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mitteilungen. 28. Bd., 1903. 1904. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Altitudes in the Dominion of Canada by James White. Mit Atlas. 1901. 8⁰.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memorie. Nuova Serie. Vol. 19. 1903. 8⁰.

Redaction der Zeitschrift „Rivista di storica antica" in Padua:

Rivista. N. S. Vol. VIII, 1—4. 1904. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Annuario 1904. 8⁰.
Rendiconti. Tom. 18, fasc. 1—3. 1904. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. 1903, Aprile-Dicembre. 1903. gr. 8⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1903, No. 43; 1904, No. 1—26. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 173, No. 26; Tom. 174, No. 1—26. 1903—04. 4⁰.
Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. II. Série, Tom. 5. Paris 1903. 4⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 745—751. 1904. 4°.

Musée Guimet in Paris:

Revue de l'histoire des réligions. Année XXIV, Tom. 48, No. 1. 2. 1903. 8°.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1903, No. 1. 2. 5. 6. 1903. 8°.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. Ve Série, Tom. 4, fasc. 1—4. 1903. 8°.

Sociéte de la Chronique de France in Auxerre-Paris:

La Chronique de France. 4e année 1904. Nebst Carnet bibliographique. Paris. 8°.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. Vol. VIII, No. 2—6; Vol. IX, No. 1. 1902—04. gr. 8°.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 31, fasc. 4; Tom. 32, fasc. 1. 1903—04. 8°.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 28. 1903. 8°.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Byzantina Chronika. Tom. IX, 3. 4; Tom. X, 1—4. 1902—03. 4°.
Annuaire du Musée zoologique. Tom. VIII, 2—4. 1903—04. 8°.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. XXII, No. 1—4 1903. 8°.
Mémoires. Vol. XIII, 4; XV, 1; XIX, 2. Nouv. Sér., Livr. 5—9, 12. 1903. 4°.

Kaiserl. Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta. Vol. XIX, Tom. XXI, 3; XXII, 1. 1903. 4°.

Kaiserlich Russische archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:

Sapiski. Tom. IX, 3. 4; X, 3. 4; XI, 1—4; XII, 1—4. 1897—1902. 4°.
Sapiski. Orientalische Abteilung, Tom. XII, 2—4; XIII, 1—4; XIV, 1—4; XV, 1. 1899—1903. 4°.
Russisch-slavonische Abteilung: Tom. V, 1. 1903. 4°.
Inscriptiones antiquae orae Septentrionalis Ponti Euxiri. Vol. IV. 1901. 4°.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Materialien zur Geologie Russlands. Bd. XXI, 2 1904. 8°.
Verhandlungen II. Serie, Bd. 41, Liefg. 1. 1904. 8°.

Physikal.-chem. Gesellschaft an der Kaiserl. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 35, Heft 9; Tom. 36, Heft 1—4. 1903—04. 8°.

Kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Zapiski der histor. philol. Fakultät. Bd. 49. 50, 1. 52. 53. 54, 1. 55. 56. 62. 63. 1899—1900. 8°.
Schriften aus dem Jahre 1903—04.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. IId Series, Vol. XII, 3. 1903. gr. 4°.
Proceedings. Vol. 55, part 2, 3. 1903. 4°.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 28, No. 109. 110. 1904. 8°.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 39, No. 12; Vol. 40, No. 1—4. 1903—04. 8°.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 42, No. 174. 1903. 8°.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Scienze fisiche. Vol. IX. 1904. 8°.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. XIV, 2. 1904. 4°.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Serie V, Tom. 6. Settembre—Dicembre 1903, Gennajo —Marzo 1904. 8°.

Altertumsverein in Plauen:

Mitteilungen. 16. Jahresschrift auf das Jahr 1903—04. 1904. 8°.
Das Amt Paŭsa von C. v. Raab. 1903. 8°.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. 18. Jahrg. 1. u. 2. Halbband. 1903. 8°.
Historische Monatsblätter. 4 Jahrg. 1903. 8°.

Böhmische Kaiser Franz Josef-Akademie in Prag:

Památky archaeologické. Bd. XX, 7. 8; Bd. XXI, 1. 1903—04. 4°.
Rozprawy. Třída I, Ročník XI; Třída II, Ročník XII; Třída III, číslo 20. 1903. 8°.
Historický Archiv. Číslo 22, 23. 1903. 8°.
Věstník. Ročník XII. 1903. 8°.
Bulletin international. Classe des sceiences mathématiques. Année VII, VIII; Médecine Année VII, VIII. 1903—04. 8°.
Almanach. Ročník 14. 1904. 8°.
Bibliotéka Klassiků. Číslo 6. 8. 1903—04. 8°.
Sbírka pramenů. Skupina I, Řada I, Číslo 5. 6; Řada II, Číslo 6. Skupina II, Číslo 6. 7; Skupina III, Číslo 4. 1903. 8°.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Rechenschaftsbericht für das Jahr 1903. 1904. 8°.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Josef Janko, Soustava etc. 1903. 8°.
Saroslav Bidlo, Jednota Bratrská etc. Bd. 1. 2. 1900—03. 8°.
Jahresbericht für das Jahr 1903. 1904. 8°.
Sitzungsberichte 1903. a) Klasse für Philosophie.
b) Mathem.-naturw. Klasse. 1903. 1904. 8°.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Tom. 33, Heft 1—3. 1903—04. 8°.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

55. Bericht 1903. 1904. 8°.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Bericht für das Jahr 1903. 1904. 8⁰.
Časopis. Bd. 77, Heft 5. 6; Bd. 78, Heft 1. 2. 1903—04. 8⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnet. u. meteorolog. Beobachtungen im Jahre 1903. 64. Jahrg. 1904. 4⁰.

Deutsche Karl Ferdinands-Universität in Prag:

Die feierliche Installation des Rektors für das Jahr 1903/04. 1904. 8⁰.

Verein böhmischer Mathematiker in Prag:

Časopis. Bd. 8. 1904. 8⁰.

Deutscher naturwissenschaftl.-medizin. Verein für Böhmen „Lotos" in Prag:

Sitzungsberichte. 51. Bd. 1903. 8⁰.

Kgl. botanische Gesellschaft in Regensburg:

Denkschriften. Bd. VIII. 1903. 8⁰.

Bibliothèque Nationale in Rio de Janeiro:

O Tamakoaré, especies novas da ordem das Ternstroemiaceas. Manáos 1887. 4⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Boletim mensal. Abril—Junho de 1903. 1903. 4⁰.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. 14. 1903. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Annuario 1904. 8⁰.
Atti. Serie IV. Classe di scienze morali. Vol. XI, parte 2. Notizie degli scaai fasc. 9—12 und Indici Serie V, Vol. I fasc. 1. 1903. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. XII fasc. 11—12⁰ e Indice. 1903. 8⁰.
Atti. Serie Va, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. XII, semestre 2 fasc. 12; Vol. XIII, semestre 1, fasc. 2—11. 1903. 4⁰.

Biblioteca Apostolica Vaticana in Rom:

Studie Documenti di storia e diritto Anno XXI—XXIV. 1900—03. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1903, No. 3. 4. 1903. 8⁰.

Kaiserl. deutsches archäologisches Institut (röm. Abt.) in Rom:

Mitteilungen. Bd. XVIII, Heft 3. 4. 1904. 8⁰.

Service de la Carte géologique d'Italie in Rom:

Carte géologique d'Italie. Feuilles 201—204. 213—215. 223. 1904.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XXVI, 1—4. 1903. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, Vol. 9, fasc. 3. 4; Vol. 10, fasc. 1. 1903—04. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Jahrbuch für die Jahre 1901—02. 1903. 8⁰.

Missouri Botanical Garden in St. Louis:

14th annual Report. 1903. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Anales. Seccion 2ª Año 1902. 1903. fol.

Californio Academy of Sciences in San Francisco:

Proceedings. IIId Series. Zoology. Vol. 3, No. 5. 6; Botany. Vol. 2, No. 10; Geology. Vol. 2, No. 1; Math.-Phys. Vol. 1, No. 8. 1902—03. 8⁰.
Mémoirs. Vol III. 1903. 4⁰.

Universität in Sassari (Sardinien):

Studi Sassaresi. Anno III, Sez. II, fasc. 1. 1903. 8⁰.

R. Accademia dei fisiocritici in Siena:

Atti. Serie IV. Vol. 15, No. 7—10. 1903—04. 4⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno XXVI, 1903, No. 12; Anno XXVII, 1904, No. 1—4. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Archiv för Kemi. Bd. 1, Heft 2. 1904. 8⁰.
Archiv för Botanik. Bd. 1, Heft 4; Bd. 2, Heft 1—3. 1904. 8⁰.
Meteorologiska Jakttagelser i Sverige. Bd. 43. 44 (II. Serie. Bd. 30).
Handlingar. N. F., Bd. 37, Heft 4—8. 1903—04. 4⁰.
Astronomiska iakttagelser. Bd. 8, Heft 1. 1903. 4⁰.
Skrifter af Retzius. 1902. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 25, Heft 7; Bd. 26, Heft 1—4. 1904. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Bd. 37, fasc. 8—10; Bd. 38, fasc. 1—4. 1903—04. 8⁰.

Historischer Verein in Straubing:

Jahresbericht. Jahrg. 1—5. 1898—1902. 8⁰.

K. württemb. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher für Statistik. Jahrgang 1903. Heft 1. 2. 1903. 4⁰.

Australasian Associatian for the advancement of science in Sydney:

Report of the IXth Meeting 1902. Hobart. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

Memoires of the Geological Survey of N. S. Wales. Geology No. 3. 1903. 4⁰.
Palaeontology. Vol. XI. Text und Atlas. 1902. 4⁰.

Linnean Society of New-South-Wales in Sydney:

Proceedings. Vol. 26, part 3. 4. 1903. 8⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Anuario. Año XXIV. 1904. Mexico. 8⁰.

Earthquake Investigation Committee in Tokyo:

Publications. No. 15. 16. 1904. 4⁰.

Kaiserl. Universität in Tokio (Japan):

Calendar 1903—04. 1904. 8⁰.
The Journal of the College of Science. Vol. 18, article 5. 6; Vol. 19, article 2—5. 11—13—16. 17. 20. 1903—04. 4⁰.
Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät. Bd. VI, No. 2. 1903. 4⁰.
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. 6, No. 1. 2. 1904. 4⁰.

Université in Toulouse:

Annales du Midi. 1903. No. 60. 61. 8⁰.
Annales de la faculté des sciences. IIᵉ Sér., Tom. 5. Année 1903. Paris 1903. 4⁰.
Énumération des groupes d'operations d'or donné par Raymond Le Vavasseur. Paris 1904. 4⁰.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XVIII, fasc. 3. 1903. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 39, disp. 1—7. 1904. 8⁰.

Verein für Kunst und Altertum in Ulm:

Katalog des Gewerbemuseums. 1904. 8⁰.

Humanistika Vetenkapssamfund in Upsala:

Skrifter. Bd. VIII. 1902—04. 8⁰.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. 35, Année 1904. 1903—04. fol.

K. Universität in Upsala:

Results of the Swedish Zoological Expedition in Egypt. 1901. Part I. 1904. 8⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks; Deel V, aflev. 1. 1904. 8⁰.

Ateneo Veneto in Venedig:

L' Ateneo Veneto. Anno 25, Vol. 2, fasc. 1—3; Anno 26, Vol. 1, fasc. 1—3; Anno 26, Vol. 2, fasc. 1—3 und Appendice. 1902—03. 8⁰.

R. Instituto Veneto di scienze in Venedig:

Atti. Tom. 61, disp. 10; Tom. 62, disp. 1—10. 1902—03. 8⁰.
Memorie. Vol. XXVII, No. 1. 2. 1902—03. 4⁰.

Accademia Olimpica in Vicenza:

Atti. Annate 1901—02. Vol. XXXIII. 1903. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Warschau:

Prace matematyczno-fizyczne. Tom. 15. 1904. 4⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

20th annual Report. 1903. 4⁰.

Commissioner of Education in Washington:

Report for the year 1902. Vol. 1 und 2. 1903. 8⁰.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

North American Fauna. No. 23. 1904. 8⁰.
Yearbook 1903. 1904. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Contributions to knowledge. No. 1443. 1903. 4⁰.
Index to the Literature of Thorium 1817—1902 by H. Jouet 1903. 8⁰.
Annual Report for the year ending June 30, 1902. 1903. 8⁰.
Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 45, parts 1. 2. 1904. 8⁰.

U. S. National-Museum in Washington:

Report for 1900—01. 1903. 8⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Publications. IId Series, Vol. 5. 1903. 4⁰.
Report for the year 1902—03. 1903. 8⁰.

Philosophical Society in Washington:

Bulletin. Vol. XIV, p. 233—246. 1903. 8⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Annual Reports 1903. 4⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletins. No. 209—217. 1903. 8⁰.
Monographs. No. XLIV, XLV and Atlas. 1903. 4⁰.
Water-Supply Paper No. 80—87. 1903. 8⁰.
Professional Paper No. 9. 10. 13—15. 1903. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. Jahrg. 36, Heft 2 und Register zu Jahrg. 25—30. 1903. 8⁰.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Klasse. Bd. 146. 147. 1903—04. 8⁰.
 " Mathem.-naturwissenschaftliche Klasse. Abt. I, 1902, Bd. 111, Heft 10; Abt. IIa. 1903, Bd. 112, Heft 1—9; Abt. IIb, 1903, Bd. 112, Heft 1—10; Abt. III, 1903, Bd. 112, Heft 1—9, 1903, Bd. 112, Heft 1—10.
Denkschriften. Philos.-hist. Klasse. Bd. 49. 1904. 4⁰.
 " Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse. Bd. 74. 1904. 4⁰.
Archiv für österreichishe Geschichte. Bd. 92, 2. Hälfte; Bd. 93, 1. Hälfte. 1903—04. 8⁰.
Fontes rerum Austriacarum. Abt. II, Bd. 56; Abt. II, Bd. 57. Scriptores Abt. I, Bd. IX, 1. 1903—04. 8⁰.
Almanach. 53. Jahrg. 1903. 8⁰.
Mitteilungen der Erdbebenkommission. N. F., No. 14—23. 1903—04. 8⁰.
Verhandlungen. 1903, No. 16—18; 1904, No. 1—8. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Ärzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1904, No. 1—27. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. 53. Bd., Heft 10; 54. Bd., Heft 1. 5. 1903—04. 8⁰.
Abhandlungen. Bd. II., Heft 3. 4. 1904. 4⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. XVIII, 4. 1903. gr. 8⁰.

Oberstkämmereramt Sr. Majestät des Kaisers von Österreich in Wien:

Anicia Juliana im Wiener Dioskorides-Kodex von Anton v. Premerstein. 1903. fol.

Herzogliche Bibliothek in Wolfenbüttel:

Die Handschriften der herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel. Bd. VIII. 1903. gr. 8⁰.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F., Bd. 35, No. 8; Bd. 36, No. 1—7. 1903—04. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1903, No. 1—7. 8⁰.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Bd. 45. 1903. 8⁰.
Jahresbericht für 1902. 1903. 8⁰.

Schweizerische Meteorologische Zentralanstalt in Zürich:

Annalen 1901. 38. Jahrg. 4⁰.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mitteilungen. Bd. XXVI, 2. 1904. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Neujahrsblatt auf das Jahr 1904. 106. Stück. 4⁰.
Vierteljahrsschrift. 48. Jahrg. 1903. Heft 3. 4. 1904. 8⁰.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F., Band V, No. 2—4. 1903—04. 4⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Ernst Abbe in Jena:

Gesammelte Abhandlungen. Bd. I. 1904. 8⁰.

O. V. Leo Anderlind in Baden-Baden:

Ein System von Mitteln zur Verhütung schädlicher Hochwässer. Leipzig 1904. 8⁰.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. 1904, No. 1—13. Leipzig 1904. 8⁰.
Journal für praktische Chemie. N. F., Bd. 68, No. 1. 2. 11. 12; B. 69, Heft 1—11. Leipzig 1903—04. 8⁰.

Hugo Bermühler, Verlag in Berlin:

Forschungen zur Geschichte Bayerns. Bd. XI. Berlin 1903. gr. 8⁰.

Ch. Ch. Charitonides in Athen:

Ποικίλα φιλολογικά. Tom. I. Athen 1904. 8⁰.

P. Coquelle in Meulan:

Les clochers romans du Vexin français. Pontoise 1903. 8⁰.

M. Doeberl in München:

Bayern und Frankreich. Bd. II. 1903. 8⁰.

Anton Endrös in Traunstein:

Seeschwankungen am Chiemsee beobachtet. 1903. 8⁰.

Adolf Fick in Würzburg:

Gesammelte Schriften. Bd. II. 1903. 8⁰.

Gustav Fischer in Jena:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1904, No. 14—41. 4⁰.

Paul Fredericq in Brüssel:

Les conséquence de l'évangélisation par Rome et par Byzance sur le développement de la langue maternelle des peuples convertis. 1903. 8⁰.

Mme Vve André Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir. Tom. 28. Janvier—Juin 1904. 8⁰.

Otto Gradenwitz in Königsberg:

Laterculi vocum latinarum. Leipzig 1904. 8⁰.

Mary Hallock-Greenewalt in Philadelphia:

Pulse and Rhythm. 1903. 8⁰.

Ernst Haeckel in Jena:

Kunstformen der Natur. Liefg. X. XI. Leipzig 1904. fol.

G. N. Hatzidakis in Athen:

Ἀναγνώσματα. Tom. 2. 1904. 8⁰.

Georg Helmreich in Ansbach:

Galeni de temperamentis libri III. Lipsiae 1904. 8⁰.

E. de Hurmuzaki in Bukarest:

Documente privitóre la Istoria Românilor. Vol. XII. 1903. fol.

A. Justin in Lynn, Mass.:

Mystic Poems. 1904. 8⁰.

Konrad Keller in Zürich-Oberglott:

Die Atmosphäre als elektro-pneumatischer Motor. Zürich 1903. 8⁰.

A. von Köllicker in Würzburg:

Über die Entwicklung der Nervenfasern (Sep.-Abdruck). Jena 1904. 8⁰.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. XIII, 1. 2. Leipzig 1904. 8⁰.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

Ethical Values in History. 1903. gr. 8⁰.

Eduard Loewenthal in Berlin:

Das Radium und die unsichtbare Strahlung. 1904. 8⁰.

Max Lohest in Liège:

La géologie et la reconnaissance du terrain houiller du Nord de la Belgique. 1904. 8⁰.

Marian Ludowski in Dortmund:

Die Erde ein Elektromagnet. 1904. 8⁰.

Bernhard Marr in Dux (Böhmen):

Der Baum der Erkenntnis. 1904. 8⁰.

Alfred Mitscherlich in Kiel:

Landwirtschaftliche Vegetationsversuche. Berlin 1903. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. XXIXe année, Tom. 84, No. I. II; Tom. 85, No. I. II. Paris 1904. 8⁰.

Ad. Nicolas in Angers:

Spokil, langue internationale. 1904. 8⁰.

Sigmund Riefler in München:

Projekt einer Uhrenanlage für die Kgl. Belgische Sternwarte in Uccle. 1904. 4⁰.

Hugo Riemann in Leipzig:

Handbuch der Musikgeschichte. I. Bd. Altertum und Mittelalter (bis 1450) I. Teil. 1904. 8⁰.

Saint-Lager in Lyon:

La Perfidie der homonymes. 1903. 8⁰.

Schmoller in Berlin:

Grundriss der Volkswirtschaftslehre. Leipzig 1904. II. Bd.

Johannes Schubert in Eberswalde:

Der Wärmeaustausch im festen Erdboden. Berlin 1904. 8⁰.

Verlag von Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis 1904, No. 1—13. 4⁰.

Ed. Seler in Berlin:

Rezension über Hartmanns Archaeological Researches in Costa Rica. (Aus dem Globus.)

Aktiengesellschaft Siemens & Halske in Berlin:

Nachrichten. VI. Jahrg. 1902. 4⁰.
Nachrichten der Siemens-Schuckertwerke. Heft 1. 1903. 4⁰.

Georg Steinmetz in Regensburg:

Prähistorische Forschungen in der Umgegend von Laaber. 1904 8⁰.

Adolf Stölzel in Berlin:

Noch einiges über den Brandenburger Schöppenstuhl. 1903. 8°.

Hans Spörry in Zürich:

Die Verwendung des Bambus in Japan. 1903. 8°.

B. G. Teubner, Verlagsbuchhandlung in Leipzig:

Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe, 7. Bd., Heft 1—4. 1904. gr. 8°.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. III, 2, Heft 2. Bd. V, 2, Heft 1. 1904. 8°.

Thesaurus linguae latinae. Index librorum scriptorum u. Vol. 2, fasc. 6. 1904. 4°.

F. Gomes Teixeira in Porto:

Obras sobre mathematica. Vol. I. Coimbra 1904. 4°.

Eduardo Torroja y Caballé in Madrid:

Teoría geométrica de las lineas alabeadas. 1904. 4°.

Eduard von Wölfflin in München:

Archiv für lateinische Lexikographie und Grammatik. Bd. XIII, 4. Leipzig 1904. 8°.

E. v. Zach in Peking:

Lexikographische Beiträge. Teil I. II. 1902—03. 8°.

Chinesische Übersetzung der Geschichte der Ostmongolen von Ssanang Ssetsen.

August Zöppritz in Stuttgart:

Gedanken über Flut und Ebbe. Dresden 1904. 8°.

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis Dezember 1904.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Das Format ist, wenn nicht anders angegeben, 8⁰.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Société d'Émulation in Abbeville:

Hommage à Boucher de Perthes par A. Thieuller. Paris 1904. 4⁰.

K. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. VI, 3. 4. 1904. 4⁰.

Kroatische archäologische Gesellschaft in Agram:

Vijestnik. N. Ser., Bd. VII, 2. 1904. 4⁰.

Geschichts- und Altertumsforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mitteilungen. Bd. XI, 3. 1904.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Mémoires. IVᵉ Série, tom. 2. Paris 1904.
Bulletin. Année 1903, 4ᵉ trimestre; année 1904, 1ᵉʳ trimestre. 1904.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. I. Sectie, Deel VIII, Nr. 6. 7; II. Sectie, Deel X, Nr. 1—6. 1903—04. 4⁰.
Jaarboek 1903. 1904. 4⁰.
Paedagogium. Carmen Johannis Pascoli. 1904.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde. Nieuwe Reeks, Deel IV, No. 2; Deel V, No. 4. 5. 1904. 4⁰.
Verslag. Wis-en natuurkundige Afdeeling. Deel XII, 1. 2. 1904. 4⁰.
Verslagen. Afd. Letterkunde. IV. Reeks, Deel VI. 1904.

K. Zoologisch Genootschap in Amsterdam:

Bijdragen tot de Dierkunde. Aflev. 17 en 18. Leiden 1893—1904. fol.

Paedologisches Laboratorium der Stadt Antwerpen:

Paedologisch Jaarboek. V. Jahrg. 1904.

R. Accademia Petrarca in Arezzo:

A Francesco Petrarca nel VI Centenario della sua nascità. 1904.

Redaktion der Zeitschrift „Athena" in Athen:

Athena. Tom. 16, Heft 1. 2. 1904.

École française in Athen:

Bulletin de correspondance hellénique. 27e année. 1903. Paris 1904. 28e année, No. 1—12. Athen 1904.

Naturwissenschaftlicher Verein in Augsburg:

36. Bericht. 1904.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. XV, No. 158—165. 1904. 4⁰.

Peapody Institute in Baltimore:

37th annual Report-June 1904.

K. Bibliothek in Bamberg:

Katalog der Handschriften. Bd. I, Abt. 1, Lief. 4. (Theologische Handschriften.) 1904. 4⁰.

Historischer Verein in Bamberg:

62. Bericht für das Jahr 1903. 1904.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. XV, Heft 3. 1904.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Basler Zeitschrift f. Geschichte u. Altertumskunde. Bd. 4, Heft 1. 1904.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1903/04 in 4⁰ u. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 47, afl. 3—5. 1904.
Notulen. Deel 41, afl. 4; Deel 42, afl. 1 2. 1903/04.
Verhandelingen. Deel 54, stuk 3; Deel 56, stuk 1. 1904. 4⁰.
Dagh-Register H. N. Stuart, Catalogus der Munten. 1904. 4⁰.
Dagh-Register, gehouden in Casteel Batavia Anno 1677. 1904. 4⁰.

K. Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Glas. No. 67. 68. 1903—04.
Godischniak. XVII, 1903. 1904.
Serbien und die serbische Bewegung 1848 und 1849 von A. M. Parlovića. 1904 (in serb. Spr.).
J. Skerlić, Jakob Ignjatović. 1904 (in serb. Spr.).

Museum in Bergen (Norwegen):

G. O. Sars, An Account of the Crustacea. Vol. V, parts 3 and 4. 1904. 4⁰.
Aarbog für 1904.
Aarsberetning for 1903. 1904.

University of California in Berkeley:

Schriften aus dem Jahre 1903.

K. Preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Inscriptiones graecae. Vol. XII, fasc. III. Supplementum. 1904. fol.
Sitzungsberichte. 1904, No. XXV—XL. 1904.
Corpus inscriptionum latinarum. Vol. XIII, pars I, fasc. 2. 1904. fol.
Acta Borussica. Das preussische Münzwesen im 18. Jahrhundert. 2 Bde. 1904. 4⁰.

K. Geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. Neue Folge. Heft 39. 40. 42. 1904.
Abbildungen und Beschreibungen fossiler Pflanzenreste. Lief. 1. 1904.
Jahrbuch für das Jahr 1901. Bd. XXII. 1904.

Zentralbureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Veröffentlichungen. N. F., No. 10. 1904. 4⁰.

Deutsche Chemische Gesellschaft in Berlin:

37. Jahrg., No. 13—18. 1904.

Allgemeine Elektricitäts-Gesellschaft in Berlin:

Das Kabelwerk der allg. Elektr.-Gesellschaft in Berlin. 1904. 4⁰.
Nachrichten. Heft 3, Juli 1903. fol.

Deutsche Geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 55, Heft 4, 1903; Bd. 56, Heft 1 u. 2. 1904.
Register über die Bände 1—50 (1848—1898). 1903.

Deutsche Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1903. 3 Bde. Braunschweig 1904.
Verhandlungen. Jahrg. 6, No. 3—9. 1904.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Zentralblatt f. Physiologie. Bd. XVII, Register; Bd. XVIII, No. 8—20. 1904.
Verhandlungen. Jahrg. 1903—04, No. 12—16. 1904.

Kaiserlich Deutsches Archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XIX, 2 u. 3 u. Register zu Bd. I—X. 1904. 4⁰.

K. Preuss. Geodätisches Institut in Berlin:

Veröffentlichung. N. F., No. 17. Potsdam 1904.

K. Preuss. Meteorologisches Institut in Berlin:

Bericht über das Jahr 1903. 1904.
Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1901. 1904. 4⁰.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen. II. u. III. Ordnung im Jahre 1897. 1904. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 33, Jahrg. 1902, Heft 1 u. 2. 1904.

Bureau des V. Internationalen Kongresses für angewandte Chemie in Berlin:

Bericht. Bd. I—IV. 1904.

Physikal.-techn. Reichsanstalt in Berlin:

Die bisherige Tätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt. 1904. 4⁰.
Die Tätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt im Jahre 1903. 1904. 4⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den Preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 1904, Heft 14—24; 1905, Heft 1.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen u. Preussischen Geschichte. 17. Bd., 1. u. 2. Hälfte. Leipzig 1904.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 24. Jahrg., Heft 7—12. 1904. 4⁰.

Allgemeine Geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Quellen zur Schweizer Geschichte. Bd. 22. 23. Basel 1904.

Allgemeine Schweizerische Gesellschaft für die gesamten Naturwissenschaften in Bern:

Neue Denkschriften. Bd. XXXIX, 1. 2. Basel 1904. 4⁰.

Schweizerische Geologische Kommission in Bern:

Beiträge zur geolog. Karte der Schweiz. N. F., Lief. XIV. Bern 1904. 4⁰.
Beiträge zur Geologie der Schweiz. Geotechnische Serie. Lief. 3. 1904. 4⁰.

Historischer Verein in Bern:

Archiv. Bd. XVII, 2. 1904.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Procès-verbaux 1902—03. Paris 1903.
VIᵉ Série, tom. 3 et Appendice ou tom. 3. Paris 1903.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 5. 8. 1903.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1904, No. 13—18; 20—24.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 39, No. 19—24; Vol. 40, No. 1—7. 1904.

Meteorologisches Observatorium in Bremen:

Meteorologisches Jahrbuch der freien Hansestadt Bremen. Jahrg. XIV. 1903. 1904. 4⁰.

Schlesische Gesellschaft für Vaterländische Kultur in Breslau:

81. Jahresbericht 1903. 1904.
Die Hundertjahrfeier der Schlesischen Gesellschaft für Vaterländische Kultur. 1904.

Mährisches Landesmuseum in Brünn:

Zeitschrift. Bd. IV, 2. 1904.
Časopis. Bd. IV, 2. 1904.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens u. Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. 8. Jahrg., No. 3. 4. 1904.

The Museum of the Brooklyn Institute of Arts and Sciences in Brooklyn:

Memoirs of natural sciences. Vol. I, No. 1. 1904. 4⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés. Tom. 18, fasc. 8 u. 9. 1904.
Bulletin. IV. Série, Tom. 18, No. 6—9. 1904. 4⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Bulletin. a) Classe des lettres 1904, No. 5—11.
b) Classe des sciences 1904, No. 5—11.

Observatoire Royale in Brüssel:

Annuaire astronomique. 1901—05.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XXIII, 4. 1904.

Société belge de géologie in Brüssel:

Annales. Tom. XXVIII, 1—3. 1904.

Société belge d'astronomie in Brüssel:

Bulletin. 9ᵉ année, No. 7—11. 1904.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Almanach. 1904.
Történettud. Értekezések. (Histor. Abhandlungen.) Bd. XIX, 10.
Archaeologiai Értesitö. Neue Folge. Bd. XXIII, 3—5; XXIV, 1. 2. 4⁰.
Tarsadalmi Értekezések. (Staatswissenschaftl. Abhandlungen.) Bd. XII, 10; XIII, 1. 2. 1903—04.
Nyelvtudományi Értekezések. (Sprachwissenschaftliche Abhandlungen.) XVIII, 6—8; XXX, 3—4; XXXIV, 1. 1903—04.
Csoma József, A. Magyar nemzetséget. 1903.
Mathematikai Ertesitö. (Mathemat. Anzeiger.) Bd. XXI, 3—5; XXII, 1. 2. 1903—04.
Mathematikai Közlemények. (Mathem. Mitteilungen.) Bd. XXVIII, 2. 1904.
Mathemat. und naturwissenschaftl. Berichte aus Ungarn. Bd. XIX. 1901. Leipzig 1904.
Rapport. 1903.
Bölcseszettudományi Értekezések. (Philos. Abhandlungen.) Bd. III, 5. 1904.
Analecta nova ad historiam renascentium in Hungaria litterarum spectantia. 1903.

K. Ungar. Geologische Anstalt in Budapest:

Földtani Közlöny. Bd. 34, Heft 8—10; Bd. 35, Heft 5—7. 1904.
A. Magyar Kir. földtani intézet évkönyve. Bd. XV, 1. 1904.

Statistisches Bureau der Haupt- und Residenzstadt Budapest:

Publikationen. Vol. XXXIII, 1/2; XXXV; XXXVI. Berlin 1904. 4⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Anales. Serie III, tom. 2. 3. 1903—04. 4⁰.

Botanischer Garten in Buitenzoorg (Java):

Mededeelingen. No. 68. 69. 1904. 4⁰.
Bulletin. No. 19. 1904. 4⁰.

Academia Romana in Bukarest:

Analele. Ser. II. Memoriile sect. istorice. Tom. 26. 1904. 4⁰.
Memoriile sect. stiintifice. Tom. 26. 1904. 4⁰.
Partea administrativa. Tom. 25. 26. 1903—04. 4⁰.

Bibliographia Românéscă 1508—1830. Tom I. 1903. 4⁰.
S. F. Marian, Insectele. 1904.
S. F. Marian, Legendele Maicii Domnului. 1904.
Discursuri de receptiune XXVI. 1904. 4⁰.

Institut Égyptien in Cairo:

Bulletin. IVᵉ Série, No. 4, fasc 3. 4. 1903.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Report on the Administration 1903/04. 1904. fol.
Monthly Weather Review 1904, Jan., Febr., April-Juni. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol XVII. 1904. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser., No. 1067—1098. 1904.
Journal. Vol. 68, part I, Extra-No. 2. 1899. No. 414—420. 1904.
Proceedings. No. X, Extra-No. 1903, 1904 No. 1—5.

Office of Superintendent of Government Printing in Calcutta:

Annual Report for the year 1902—03. 1904. fol.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 31, part 1. 2. 1904. 4⁰.
Memoirs. Vol. 35, part 3; Vol. 36, part 1. 1904. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 43, No. 2. 3; Vol. 44. 45. 46, No. 2. 1904.
Annual Report for 1903—04. 1904.
Memoirs. Vol. 30, No. 1. 1904. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

E. C. Pickering, A Plan for the Endowment of Astronomical Research. 1904.
The Astronomical Observatory of Harward College. 1904.
Annals. Vol. 46, part 2; Vol. 53, No. 1—4. 1904. 4⁰.

Observatory in Cambridge:

Annual Report for 1901—02, 1902—03, 1903—04. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. XII, No. 6. 1904.

Department of Agriculture in Capetown:

Annual Report of the Geological Commission. 1903. 1904. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bollettino mensile. Nuova Ser., fasc. 80—82. 1904.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz.

Dekaden-Monatsberichte 1903. Jahrg. VI. 1904. fol.
Jahrbuch 1900. Jahrg. XVIII der neuen Reihe. 1904. 4⁰.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Mémoires. Tom. 33, fasc. 2. Paris 1903.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 81. 83. 84. 86. 89—92. 95. 1903—04.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:

XXXII. Jahresbericht. Jahrg. 1902. 1903.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. Neue Folge. Bd. 46. 1904.

The University of Missouri in Columbia.

Bulletin. Vol. V, No. 4—7. 1904.
Studies. Vol. II, No. 3. 4. 1904. 4°.
The Negroes of Columbia, Missouri. By William Wilson Elwany. 1904.
A Bulletin on the Condition of the County Jails of Missouri. By Charles A. Ellwood. 1904.
A Bulletin on the Condition of the County Almshouses of Missouri. By Charles A. Ellwood. 1904.

The Missouri Commission to the Louisiana Purchase Exposition in Columbia:

The State of Missouri. 1904.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Geschichte der Danziger Willkür von Paul Simson. 1904.
Zeitschrift. Heft 47.
Mitteilungen. Jahrg. 3. 1904. Nr. 3. 4.

Kaiserl. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika in Dar-es-Salam:

Berichte über Land- u. Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Bd. II, 3. 1904.

Historischer Verein für das Grossherzogtum Hessen in Darmstadt.

Archiv für Hessische Geschichte. Neue Folge. Ergänzungsband II, Heft 2, 1903. Bd. III, 3; IV, 1. 1904.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado.

Proceedings, Vol. 7, p. 267—340. 1904.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mitteilungen. Bd. X, 1. 1904.

Verein für Geschichte und Naturgeschichte in Donaueschingen.

Schriften. XI. Heft. 1904. Tübingen 1904.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Vol. 26, trimestre 4. 1903. Vol. 27, trimestre 1. 1904.

K. Sächsischer Altertumsverein in Dresden:

Neues Archiv für sächs. Geschichte. Bd. XXV u. Register zu 1—25. 1904.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Vol. 25, Section A; No. 1. 2. 1904.

Pollichia in Dürkheim.

Mitteilungen. No. 18 u. 19, Jahrg. LX. 1903. Ludwigshafen 1904.
Heinr. Schäfer, Ueber die Stirnwaffen. 1904. 4°.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. 26, No. 7—12. 1904.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 25, No. 4. 1904.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. IV, No. 1. 1904.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Sessions 1902—04. 1904.

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. Jahrg. XVIII. 1904.

K. Universitätsbibliothek in Erlangen:

Schriften aus d. J. 1903/04 in 4⁰ u. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Degli studi e delle vicende della R. Accademia dei Georgofili dal 1854 al 1903 per Tito Marucelli 1904.
Atti. V. Serie, Vol. 1, disp. 2. 3. 1904.

Società Asiatica Italiana in Florenz:

Giornale. Vol. XVII, parte 1. 1904.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Bericht. 1904.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. Bd. XXI. Berlin 1904.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:

Berichte. Band 14. 1904.

Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:

Freiburger Diözesan-Archiv. 1904. 1. Halbjahr. fol.

Universität in Freiburg i. Br.:

Schriften aus d. J. 1903/04 in 4⁰ u. 8⁰.

Universität in Genf:

Schriften aus d. J. 1903—04 in 4⁰ u. 8⁰.

Universität in Giessen:

Schriften aus d. J. 1903/04 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Görlitz:

Abhandlungen. Bd. XXIV. 1904.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 80. 1904.
Codex diplomaticus Lusatiae superioris. II. 1904.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1904, No. VII—XII (Juli—Dez.).
Abhandlungen. N. F.
 a) Philol.-hist. Klasse. Bd. VII, No. 4. 5; VIII, 2. Berlin 1904. 4⁰.
 b) Mathem.-physikal. Klasse. Bd. III, No. 1. 2.
Nachrichten. Mathem.-phys. Klasse. No. 3—5. 1904. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothemburg:

Handlingar. IV. Folge. Heft 5—6. 1904. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mitteilungen. Heft 40. Jahrg. 1903. 1904.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mitteilungen. 35. Jahrg., 1903. Berlin 1904.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Série II, Tom. IX, livr. 4. 5. La Haye 1904.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 40, No. 5—11. 1904. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 58, Heft 3. Leipzig 1904.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 77, Heft 1. 2. Stuttgart 1904.

Thür.-sächs. Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums in Halle:

Neue Mitteilungen. Bd. XXII, 1. 1903.

Deutsche Seewarte in Hamburg:

V. Nachtrag zum Katalog 1903. 1904.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Die im J. 1903/04 erschienenen Veröffentlichungen in 4⁰ u. 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Zeitschrift. Bd. XII, 1. 1904.

Verein für Naturwissenschaftliche Unterhaltung in Hamburg:

Verhandlungen 1900—03. XII. Band. 1904.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrg. 1904, Heft 1—3.

Grossherzogl. Sternwarte in Heidelberg:

Mitteilungen. No. III. IV. Karlsruhe 1904.

Universität Heidelberg:

Die Matrikel der Universität Heidelberg. Teil V, herausgegeben von Gust. Toepke. 1904.

Schriften der Universität aus dem Jahre 1903/04 in 4⁰ und 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. XII, Heft 2. 1903.

Badische Historische Kommission in Heidelberg:

Neujahrsblätter. 1905.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der Obergermanisch-Raetische Limes des Römerreiches. Lief. XXII u. XXIII. 1904. 4⁰.

Kommission géologique de Finlande in Helsingfors:

Bulletin. No. 14, 1903.
Carte géologique à 1:400,000. Section D 2, Nyslott avec texte explicatif. 1904.

Universität Helsingfors:

Schriften aus d. Jahre 1903—04 in 4⁰ u. 8⁰.
Wilhelm Braune, Über die Einigung der deutschen Aussprache. 1904. 4⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F., Bd. XXXI, Heft 2. 1904.
Jahresbericht für das Jahr 1903. 1904.

Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte in Hildburghausen:

Schriften. 48. u. 49. Heft. 1904.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge. Band 48. 1904.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. VIII, No. 6—9. 1904.

Université de Jassy:

Annales scientifiques. Tom. 3, fasc. 1. 1904.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Bd. IV, Liefg. 4, Text u. Atlas; Bd. VI, Teil 2, Text und Atlas. 1904, fol.
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 39, Heft 1. 1904.

Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde in Jena:

Zeitschrift. N. F., Bd. XIV, 2; XV, 1. 1904.
Regesta diplomatica historiae Thuringiae. Bd. III, 1. 1904. 4⁰.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat).

Sitzungsberichte 1903. 1904.
Verhandlungen. Bd. XXI, 1. 1904.

Universität Jurjew (Dorpat):

Schriften aus dem Jahre 1903/04 in 4⁰ u. 8⁰.

Badische Historische Kommission in Karlsruhe:

Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins. N. F., Bd. 19, Heft 3 u. 4. Heidelberg 1904.
Topographisches Wörterbuch des Grossherzogtums Baden. Bd. II, Halbband 1. Heidelberg 1904.

Zentralbureau für Meteorologie etc. in Karlsruhe:

Jahresbericht für das Jahr 1903. 1904. 4⁰.

Grossherzoglich Technische Hochschule in Karlsruhe:

Schriften aus dem Jahre 1903/04 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Karlsruhe:

Verhandlungen. XVII. Bd. 1903—04. 1904.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. II. Série, Tom. XIV, 1. 1904.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Bd. 71, Heft 7—11. 1904.
3 medizinische Dissertationen in russischer Sprache. 1904.

Verein für Hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:

Festschrift zum Gedächtnis Philipps des Grossmütigen. 1904.

Société mathématique in Kharkow:

Communications. 2e Série, Vol. VIII, No. 4—6. 1904.

Université Impériale in Kharkow:

Sapiski 1904. Bd. II.
Annales 1904, kniga 3.

Gesellschaft für Schleswig-Holsteinische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Bd. 34. 1904.

K. Universität in Kiel:

Schriften aus dem Jahre 1903—04 in 4⁰ u. 8⁰.

Universität in Kiew:

Iswestija. Vol. 44, No. 4—10. 1904.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Carinthia II. 94. Jahrg. 1904, No. 3—6.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1903—04 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Universitäts-Sternwarte in Königsberg:

A. Auwers, 14 unbekannt gebliebene Zonen von Königsberg. Berlin 1904. 4⁰.
Astronomische Beobachtungen, Abteil. 40. 1904. fol.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1904, No. 4. 5.
Mémoires. 7e Série, Section des sciences, Tom. I, No. 1—3, Tom. II, No. 2. 3. 1904. 4⁰.

Conseil permanent international pour l'exploration de la mer in Kopenhagen:

Publications de circonstance, No. 12. 13 A. 14—20. 1904. 4⁰.
Bulletin. Année 1903—04, No. 3. 4. 1904. 4⁰.
Rapports. Vol. II. 1904. 4⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. 1904, No. 4. 4⁰.
Rozprawy filologiczne, tom. 36 u. 39. 1903—04.
 „ historyczne, tom. 45. 1903.
 „ matemat. Serya III, tom. 3 A. B. 1903.
Biblioteka pisarzow polskich. No. 49. 1904.
Rocznik. Rok 1903/04. 1904.
Sprawozdanie komisyi fizyograficzny, tom. 37. 1903.
Prace komisyi jezyk wej, tom. I, Heft 3. 1904.
Materyaly antropol. Tom. VII. 1904.
Ubiory luda polskiego. Zeszyt I. 1904. 4⁰.
Finkel, Bibliografia, tom. III, 1. 2. 1904.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. XL. Bd. 1904.

Naturwissenschaftlicher Verein in Landshut:

XVII. Bericht 1900—03. 1904.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 4e Série, Vol. 40, No. 149. 150. 1904.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

Bulletin. Vol. IV, No. 9. 1904. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-histor. Klasse. Bd. XXII, No. 5; Bd. XXIV, No. 1—3. 1904. 4⁰.
Abhandlungen der math.-physik. Klasse. Bd. XXIX, No. 1 u. 2. 1904. 4⁰.
Berichte der philol.-histor. Klasse. Bd. 56, No. I—IV. 1904.

Université de Lille:

Tableaux des cours et conférences 1904—05. 1904.

Cuerpo de Ingenieros de minas del Peru in Linna:

Boletín No. 6—8; 11—14. 1904.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

62. Jahresbericht. 1904.
Moritz v. Schwind u. seine Beziehungen zu Linz, von Alexander Nicoladoni. 1904. 4⁰.

R. Observatorio astronomico in Lissabon:

Campos Rodrigues, Corrections aux Ascensions droites de quelques étoiles. Kiel 1902. 4⁰.
Campos Rodrigues, Observations d'eclipses de Lune. Kiel 1904. 4⁰.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletim. 22e Série, No. 5—10. 1904.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tom. XXI, 1. 2. 1904. 4⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XIX, No. 75. 76. 1904.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 73, No. 496—502. 1904.
Philosophical Transactions. Series A, Vol. 202. 203; Series B, Vol. 196. 1904. 4⁰.
Obituary Notices. Part I. 1904.
" " of fellows. 1904.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 64, No. 8. 9; Vol. 65, No. 1. 1904.
Memoirs. Vol. 54, 1899—1901 u. Appendix, No. 1—5; Vol. 55, 1904 u. Appendix, No. 1. 1904. 4⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 501—506. 1904.
Proceedings. Vol. 20, No. 282—287. 1904.

Linnean Society in London:

116th Session from Nov. 1903 to June 1904. 1904.
The Journal. a) Botany: Vol. 36, No. 254; Vol. 37, No. 257. b) Zoology: Vol. 29, No. 190. 1904.
The Transactions. 2nd Ser. a) Zoology: Vol. VIII, part 13; Vol. IX, part 3—5. b) Botany: Vol. VI, part 7—9. 1903—04. 4⁰.
List of the Linnean Society 1904—05. 1904.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 87. 1904.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1904, part 4—6. 1904.

Zoological Society in London:

Proceedings. Vol. I, part 1. 1904.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. XXXI, 3. 1903—04.
Mémoires. Tom. II, livr. 1. 1904. 4⁰.

Institut Royal-Grand Ducal in Luxemburg:

Publications de la section des sciences naturelles. Tom. XXVII (B). 1904.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 59. Stans 1904.

Société d'agriculture, science et industrie in Lyon:

Annales. VIII. Sér., Tom. 1, 1903. 1904.

Société Linnéenne in Lyon:

Annales. Nouov. Sér., Tom. 50. 1904.

Université in Lyon:

Annales. I. Sciences, fasc. 13—15. 1904.

Wisconsin Geological and Natural History Survey in Madison:

Bulletin. No. XI—XIII. 1903—04.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Revista. Tomo I, No. 1—5. 1904. 4⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 45, cuad. 1—6. 1904.

Instituto geológico in Madrid:

Parergones. Tom. I, No. 3. Mexico 1904.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:

Jahresbericht und Abhandlungen 1902—04. 1904.

Comitato per le onoranze di Francesco Brioschi in Mailand:

Opere matematiche di Francesco Brioschi. Tom. 3. 1904. 4⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Sér. II, Vol. 37, fasc. 4—16. 1904.
Memorie. Classe di scienze matematiche. Vol. XIX, fasc. 12. 13. 1904. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 43, fasc. 3. 1904.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Ser. IV, anno XXXI, 2. 3. 1904.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 48, part 3. 1904.

Department of the Interior. Philippine Weather Bureau in Manila:

Bulletin for January-Mai 1904. 1904. 4⁰.

Altertumsverein in Mannheim:

Mannheimer Geschichtsblätter 1904, No. 8—12; 1905, No. 1. 4⁰.

Universität in Marburg:

Schriften aus dem Jahre 1903/04 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mitteilungen. Bd. VI, 4. 1904.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. Vol. XVII, 1. 1904.

Académie in Metz:

Annales de Baltus, publiées par E. Paulus. 1904.
Mémoires. 3e Série. Anne 31. 1901—02. 1904.
Extrait des Mémoires. Année 1904.

Gesellschaft für Lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. XV. Jahrg. 1903. 4⁰.

Instituto geológico in Mexico:

Parergones. Tomo I, No. 2. 4. 5. 1904.

Observatorio meteorológico-magnético central in Mexico:

Boletín mensual. Junio, Julio 1902. 1902. fol.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate“ in Mexico:

Memorias y revista. Tomo XIII, 7. 8; XIX, 8—10; XX, 5—10. 1903.

Musée océanographique in Monaco:

Bulletin No. 15—17, 20—22. 1904.

Observatoire météorologique du Mont Blanc:

F. Vallot es son oeuvre. Paris 1904. fol.

Museo nacional in Montevideo:

Felix de Azara, Geografía física y esférica de las provincias del Paraguay. 1904. 4⁰.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section des lettres. 2e Série, tom. IV, No. 2. 1904.

Museo Michoacano in Morelia, Mexico:

Relacion de Michoacan. 1904.

Lazarev'sches Institut für Orientalische Sprachen in Moskau:

Trudy. Heft 17. 19. 20 u. Bd. VIIIb. 1904—05.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1903, No. 4. 1904.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXIV, 3. 1904.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Bulletin. No. 56—63. 1904. 4⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:

Münchener Jahresübersichten für 1903. 1904. 4⁰.
Bericht über die Arbeitslosenzählung vom 27. Nov. 1904.

Hydrotechnisches Bureau in München:

Jahrbuch 1903, Heft 5; 1904, Heft 2. 3. fol.
Abhandlungen: Das Pegnitz-Gebiet von Adolf Specht (mit 7 Tafeln). 1904. fol.

K. Schwedisches und Norwegisches Konsulat in München:

Sweden. Its People and its Industry. By Gust. Sundbärg. Stockholm 1904.

Generaldirektion der K. B. Posten und Telegraphen in München:

Nachträge zu den Zeitungspreisverzeichnissen. fol.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1904, No. 17—32.

Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik in München:

Verwaltungsbericht über das I. Geschäftsjahr. 1904. fol.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1903/04 in 4⁰ u. 8⁰.

Ärztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. Bd. XIII, 1903. 1904.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten 1904, No. 166—171. 4⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:

Mémoires. Année 154, 6ᵉ Série, tom. 1. 1904.
Bulletin. Série 3, tom. 4, fasc. 4, tom. 5, fasc. 1. Paris 1903—04.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Ser. 3, Vol. 10, fasc. 1—7. 1904.

Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 53, part 4; Vol. 54, part 6; Vol. 55, part 1. 1904.
Annual Report for the year 1903—04. 1904.
The Anthracitation of Coal. By David Burns. 1904.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Ser., Vol. 18, No. 103—108. 1904.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. XXV, 1st and 2d Half. 1904.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. XV, 2. 1903.

American Museum of Natural History in New-York:

Journal. Vol. IV, 4. 1904.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 36, No. 7—11. 1904.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. Vol. VIII, 3. 1904.

Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:

Jahresbericht 1903. 1904.
Mitteilungen. Heft XVI. 1904.
Die Pflege der Dichtkunst im alten Nürnberg. 1904.

Department of the Interior in Ottawa:

Dictionary of Altitudines in Canada. By James White. 1903.
Report on the Great Landslide at Frank, Alta. 1903. 1904.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Catalogue of Canadian Birds. Part III. 1904.
Annual Report. New Series. Vol. XIII. 1900. With Maps. 1903.

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions. 2d Series. Vol. IX. 1903.

Accademia scientifica Veneto-Trentino in Padua:

Atti, Nuova Serie. Anno I, fasc. 1. 1904.

Redaction der Zeitschrift „Rivista di storica antica" in Padua:

Rivista. N. S., Anno IX, 1. 1904.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. XVIII, 4—6. 1904.

Societa di scienze naturali ed economuli in Palermo:

Giornale. Vol. 24. 1904. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1904, No. 27—31, 33—42.

Académie des sciences in Paris:

Oeuvres de Laplace. Tom. XIII. 1904. 4⁰.
Comptes rendus. Tom. 139, No. 1—26. 1904. 4⁰.

École polytechnique in Paris:

Journal. IIe Série, Cahier 9. 1904. 4⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 751—757. 1904. 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Jubilé du Musée Guimet. 1904.
Revue de l'histoire des réligions. Tom. 48, No. 3; Tom. 49, No. 1 u. 2. 1903—04.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1903, No. 7 u. 8; 1904, Nr. 1. 3.
Nouvelles Archives. IVe Sér., tom. 5, fasc. 1. 2. 1903. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletin et Mémoires. 5e Série, tom. 4, fasc. 5. 6; tom. 5, fasc. 1. 1903—04.

Société des études historiques in Paris:

Revue 1901, Janvier-Avril et Sept-Décembre 1902. 1903. 1904, Janvier-Décembre.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. IX. Année 1904, No. 2—6; X. Année 1905, No. 1. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 32, fasc. 2. 3. 1904.

Société zoologique de France in Paris:

Mémoires. Année 1903, Tom. 16.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Comptes rendus des séances de la Commission sismique. Tom. 1, livr. 3. 1904. 4⁰.
Mémoires. a) Classe historico-philologique VIIIe Série, Vol. VI, No. 5. 6. 1904. 4⁰. b) Classe physico-mathématique. VIIIe Série, Vol. 13, No. 6; Vol. 14, No. 1—10; Vol. 15, No. 1—11; Vol. 16, No. 1—3. 1903—04. 4⁰.
Annuaire du Musée zoologique. 1904, Tom. IX, No. 1—3.

Kaiserl. Bibliothek in St. Petersburg:

Otschet 1899. 1903.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Nouv. Sér., Livr. 10. 11. 13. 4⁰.

Kaiserl. Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. 22, fasc. 2; Tom. 23, fasc. 1. 2. 1904. 4⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Materialien zur Geologie Russlands. Bd. XXII, 1. 1904.
Verhandlungen II. Serie, Bd. XXI, 2. 1903.

Physikal.-chem. Gesellschaft an der Kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 36, No. 5—8. 1904.

Physikal. Zentral-Observatorium Nicolas in St. Petersburg:

Publications. Sér. II, Vol. IX, 3. 4. 1903—04. fol.
Annales. Année 1900 Supplément, Année 1902, partie I, II et Supplément. 1904. 4⁰.

Section géologique du cabinet de Sa Majesté in St. Petersburg:

Travaux. Vol. VI, livr. 1. 1904.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. II. Series, Vol. XII, 4. 1904. gr. 4⁰.
Proceedings. Vol. 56, part I. 1904.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 28, No. 112. 1904.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 43, No. 175. 176. 1904.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. XIV, 3. 5. 1904. 4⁰.
Atti. Memorie. Vol. XX. 1904. 4⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. 1904, April-Juni, August-Novembre.

Kaiser Wilhelm-Bibliothek in Posen:

Die Begründung der Kaiser Wilhelm-Bibliothek in Posen. 1904. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josef-Akademie in Prag:

Památky. Bd. XXI, 2. 1904. 4⁰.
Monumenta palaegraphica Bohemiae et Moraviae. Vydava Gust. Friedrich. Heft I (mit Tafeln in fol.). 1904.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Bd. XI u. XIV. 1904.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. 1904, Bd. 78, Heft 3. 4.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mitteilungen. 42. Jahrg., No. 1—4. 1903.

Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg:

Verhandlungen. Bd. XXIV. (N. F., Bd. XV.) 1904.

Geological Survey Office in Pretoria, Transvaal:

Annual Report of the Geological Survey for 1903. 1904. fol.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. Bd. 55. 1903.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. No. XLVII. 1904.

Bibliothèque Nationale in Rio de Janeiro:

Relatorio de la Bibliotheca Nacional 1901. 1903.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario. 1904.
Boletim mensal. Julio-Dez. de 1903. 1904.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. VIII. IX. X. 4⁰.
Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. I, 2. 3. Notizie degli scavi. 1904. 4⁰.
Atti. Serie V. Classe di scienze fisiche. Memorie, Vol. IV. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. XIII, 1—8. 1904.
Atti. Serie V, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. XIII, semestre I, fasc. 12, semestre II, fasc. 1—11. 1904. 4⁰.
Atti. Rendiconto dell' adunanza solenne del 5 Guigno 1904. Vol. II. 4⁰.
Friderici Cesi opus de plantis, iterum ed. Romualdus Pirotta. 1904. 4⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 57, sessione 1—7. 1904. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1904, Vol. 35, No. 1. 3.

Kaiserl. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abt.) in Rom:

Mitteilungen. Vol. XIX, fasc. 1. 2. 1904.

R. Ministero della Instruzione pubblica in Rom:

Le opere di Galileo Galilei. Vol. XIV. 1904. 4⁰.

Ministero di agricoltura, industria e commercio in Rom:

Catalogo della mostra fotta dal Corpo Reale delle Miniere all' esposizione universale di Saint Louis nel 1904. 1904. 4⁰.

R. Ufficio geologico in Rom:

Carta geologica dei vulcani. Vulsini. 1904.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XXVII, 1. 2. 1904.

Historischer Verein in Rosenheim:

Das bayerische Oberland am Inn. 3. Jahrg. 1904.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1903/04 in 4⁰ u. 8⁰.

Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte in Rotterdam:

Nieuwe Verhandelingen. II. Reeks, V^de^ Deel. 1904. 4⁰.

Académie des sciences in Rouen:

Précis analytique des travaux. Année 1902—03. 1903.
Liste générale des membres. 1903.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, Vol. 10, fasc. 2. 1904.

École française d'Extrême-Orient in Saigon:

Précis de grammaire pâlie par Victor Henry. Paris 1904.
Bulletin. Anno IV, No. 1. 3. Hanoi 1904. 4⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mitteilungen. 44. Jahr 1904.

Academie of Science in St. Louis:

Transactions. Vol. XII, 9. 10; Vol. XIII, 1—9; Vol. XIV, 1—6. 1902—04.

Missouri Botanical Garden in St. Louis:

15. annual Report. 1904.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Almanaque náutico para 1906. 1904. 4⁰.

Sociedade scientifica in S. Paulo:

Relatorio da Directoria 1903—04. 1904.

Bosnisch-Herzegovinische Landesregierung in Sarajevo:

Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen im Jahre 1900. Wien 1903. fol.

Verein für Mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher und Jahresberichte. 69. Jahrg. 1904.
Register über die Jahrgänge 41—50 der Jahrbücher. 1904.

R. Accademia dei fisiocritici in Siena:

Atti. Serie IV, Vol. XVI, 1—6.

K. K. Archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno XXVII, 5—8. 1904.

K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:

Månadsblad. 27. u. 28. Årgang. 1898. 1899. 1901 u. 1902. 1904.
Antiquarisk Tidskrift för Sverige. Bd. XVII, 2. 3. 1904.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Archiv för zoologi. Bd. 1, 3. 4. 1904.
Archiv för botanik. Bd. 2, Heft 4; Bd. 3, Heft 1—3. 1904.
Meteorologiska Jaktagelser i Sverige. Bd. 45. 1903. 1904. 4⁰.
Astronomiska Jaktagelser. Bd. VI, 1. 1904. 4⁰.
Handlingar. N. F., Bd. 38, No. 1—5. 1904. 4⁰.
Årsbok 1904.
Les prix Nobel en 1901. 1904.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. XXVI, 5. 6. 1904.

Nordiska Museet in Stockholm:

Meddelanden 1902. 1904.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Tom. 38, Heft 5—9. 1904.

Kais. Universität Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1903/04.

Württemberg. Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Württemberg. Geschichtsquellen. Bd. V. VI. 1904.
Vierteljahreshefte f. Landesgeschichte. N. F., XIII Jahrg., Heft 1—4. 1904.

K. Württemb. Statistisches Landesamt in Stuttgart:

Statistisches Handbuch für das Königreich Württemberg. 1904. 4⁰.

Linnean Society of New-South-Wales in Sydney:

Proceedings. Vol. XXII, part 1 u. Vol. XXIX, part 2. 1904.

Observatoire astronomique et physique in Taschkent:

Publications. No. 4. 5. 1904. 4⁰.

Earthquake Investigation Committee in Tokyo:

Publications. No. 17. 18. 1904. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- u. Völkerkunde Ostasiens in Tokio:

Hans Haas, Geschichte des Christentums in Japan. Teil II. 1904.

Kaiserl. Universität in Tokio:

The Journal of the College of Science. Vol. XIII, 7; Vol. XVIII, 8; Vol. XIX, 9. 14. 15. 18. 19; Vol. XX, 1. 2. 1904. 4⁰.
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. VI, 3. 1904. 4⁰.

Altertumsverein in Torgau:

Veröffentlichungen. Heft XVII. 1904.

Canadian Institute in Toronto:

Proceedings. N. S., Vol. II, 6. 1904.
Transactions. Vol. VII, 3. 1904.

Université in Toulouse:

Annales du Midi. XVIe année, No. 62. 1904.
Annales de la faculté des sciences. IIe Sér., tom. 5, année 1903; tom. 6, année 1904. Paris 1903—04. 4⁰.
Bulletin de la station de pisciculture No. 1. Paris 1904.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XIX, 1. 1904.

Museum für Kunst und Gewerbe in Troppau:

Jahresbericht 1903. 1904.

Universität Tübingen:

Über die Sprache der Gesetze. Rede von Otto Wendt. 1904. 4⁰.

Tufts College Library in Tufts Coll. Mass.:

Studies. No. 8. 1904. 4⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Osservazioni meteorologiche nell' anno 1903. 1904.
Atti. Vol. 39, disp. 8—15. 1904.
Memorie. Serie II, tom. 54. 1904. 4⁰.

R. Accademia d'agricoltura in Turin:

Annali. Vol. 46. 1903. 1904.

Biblioteca nazionale in Turin:

Inventario dei codici superstili greci e latini antichi. 1904.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Nova Acta. Serie III, Vol. XX, 2. 1904. 4⁰.

K. Universität in Upsala:

Nordiska Studier. Tillogna de Adolf Noreen. 1904.
Eranos. Acta philologica. Vol. 5, fasc. 3. 4. 1904.
Schriften aus dem Jahre 1903/04 in 4⁰ u. 8⁰.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Oeuvres océanografiques, No. 90. 1904.
Annuaire météorologique. Année 1902. 1903. 4⁰.
Onweders ens. 1903.
Schriften. No. 94. 95 (Text u. Atlas). 1904. fol.

Accademia di Scienze in Verona:

Atti e Memorie. Serie IV. Appendice al Vol. III. Vol. IV.

Smithsonian Institution in Washington:

Smithsonian Contributions to knowledge. Vol. 33 and No. 1438 (Part of Vol. 34). 1903—04. fol.
Researches on the otteinment of very low Temperatures by Morris W. Travers. Part I. 1904.
Phylologeny of Fusus. By Am. W. Grabau. 1904.
Miscellaneous Collections. Vol. 45, part 3. 4; Vol. 47, No. 1467. 1904.

U. S. National-Museum in Washington:

Special Bulletin 4, part 1. 2. 1904. fol.
Annual Report 1902. 1904.
Proceedings. Vol. XXVII. 1904.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report for the year 1903—04. 1904.

Philosophical Society in Washington:

Bulletin. Vol. 14, p. 247—276. 1904.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletins. No. 208. 218—233. 241. 1903—04.
Monographs. Vol. 46. 1904. 4⁰.
24th Annual Report 1902—03. 1903. 4⁰.
Professional Papers. No. 11. 12. 16—28. 1903—04. 4⁰.
Water Supply Paper. No. 88—98. 101. 102. 104. 1903—04.
Mineral Resources. 1902. 1904.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 37. Jahrg., Heft 1. 1904.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Klasse. Bd. 148. 1904.
Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse. Abt. I, Bd. 113, No. 1—4, 1904.
Abt. IIa, Bd. 112, No. 10, 1903; Bd. 113, No. 1—7, 1904.
Abt. IIb, Bd. 113, No. 1—6, 1904. Abt. III, Bd. 112, No. 10, 1903; Bd. 113, No. 1—7, 1904.
Denkschriften. Philos.-hist. Klasse. Bd. 50. 1904. 4⁰.

K. K. Geologische Reichsanstalt in Wien:

Mitteilungen der Erdbebenkommission. N. F., No. 24. 1904.
Jahrbuch. Jahrg. 1903, Bd. 53, Heft 2—4; Bd. 54, Heft 1. 1903—04. 4⁰.
Verhandlungen. 1904, No. 9—12. 4⁰.
Abhandlungen. Bd. XVII, Heft 6; Bd. XIX, Heft 2. 3. 1903—04. fol.

K. K. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1902, Bd. 47 (N. F., Bd. 39). 1904. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Ärzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. No. 28—52. 1904. fol.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. 54. Bd., Heft 6—10. 1904.

K. K. Militär-geographisches Institut in Wien:

Astronomisch-geodätische Arbeiten. Bd. XX. 1903. 4⁰.

K. K. Naturhistorisches Hofmuseum in Wien:
Annalen. Bd. XIX, 1. 1904. 4⁰.

v. Kuffnersche Sternwarte in Wien:
Publikationen. Bd. VI, 2—4. 1903—04. 4⁰.

K. K. Universität in Wien:
Schriften aus dem Jahre 1904. 5 Stück.

Verein für Nassauische Altertumskunde etc. in Wiesbaden:
Annalen. Bd. 33, Heft 2. 1904. 4⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:
Jahrbücher. Jahrg. 57. 1904.

Herzogliche Bibliothek in Wolfenbüttel:
Register zur II. u. III. Abteilung des Handschriftenkatalogs. 1904.

Geschichtsverein in Wolfenbüttel:
Jahrbuch. 2. Jahrg. 1903.
Braunschweigisches Magazin. Jahrg. 1903. 4⁰.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:
Verhandlungen. N. F., Bd. 37, No. 1. 2. 1904.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1904, No. 1—3.

Kantonsbibliothek in Zürich:
Schriften aus dem Jahre 1903/04 in 4⁰ u. 8⁰.

Schweizerische Meteorologische Zentralanstalt in Zürich:
Annalen 1902. 1904. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:
Vierteljahrsschrift. 49. Jahrg. 1904, Heft 1. 2.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:
Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. Bd. VI, 1. 1904. 4⁰.
XII. Jahresbericht 1903. 1904.

Sternwarte in Zürich:
Astronomische Mitteilungen. No. 95. 1904.

Von folgenden Privatpersonen:

Fürst Albert von Monaco:
Résultats des Campagnes scientifiques, fasc. XVII. 1904. fol.

Rafael Ramirez de Arellano in Córdoba:
La banda real de Castilla. 1899.

Jon Arginteanu in Bukarest:
Istoria Romänilor Macedoneni. 1904.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig:

Journal für prakt. Chemie. N. F., Bd. 69, Heft 12; Bd. 70, Heft 1—11. 1904.
Beiblätter zu den Annalen der Physik. 1904, No. 14—23. 1904.

Manuel R. de Berlanga in Malaga:

Catálogo del Museo de los Señores marqueses de Casa-Loring. 1903.

Hermann Böhlaus Nachfolger in Weimar:

Zeitschrift der Savigny-Stiftung für Rechtsgeschichte. Bd. 25 der romanischen und germanischen Abteilung. 1904.

Wilhelm v. Christ in München:

Geschichte der griechischen Literatur. 4. Aufl. 1905.

H. Conwentz in Danzig:

Die Gefährdung der Naturdenkmäler u. Vorschläge zu ihrer Erhaltung. 1904.

M. Doeberl in München:

Bayern und Frankreich. II. Bd. München 1904.

Vicomte G. d'Avenel in Paris:

La Noblesse française sous Richelieu. 1901.

Verlag von Gustav Fischer in Leipzig:

Naturwissenschaftl. Wochenschrift. 1904, No. 42—65; 1905, No. 1. 2. 4⁰.

Paul Fournier in Grenoble:

Études sur les Pénitentiels. IV. Maçon 1904.

Vve J. Bte André Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir. Tom. 28. Juillet-Decembre 1904.

Friedrich Goppelsröder in Basel:

Studien über die Anwendung der Capillaranalyse. 1904.

S. Grenander in Upsala:

Les variations annuelles de la température des lacs suèdois. 1904.

S. Guhl in Zürich:

Lücken-Quadrate. 1904.

Victor Hänisch in Wien:

Konstruktion zur Ermöglichung d. intermittierenden Kraftausnützung. 1904.

Jakob Haury in Hof:

Procopii Caesariensis opera omnia. 2 Voll. Lipsiae 1904.

Camillo Hell in Wien:

Ideale Planimetrie. 1904.

G. Henriksen in Christiania:

On the Iron Ore Deposits in Sydvaranger. 1904.

Friedrich Hirth in New-York:

Chinesische Ansichten über die Bronzetrommeln. Leipzig 1904.

Theobald Hofmann in Elberfeld:

Raffael in seiner Bedeutung als Architekt. Dresden 1900.

Bauten des Herzogs Federigo di Montefeltro als Erstwerke der Hochrenaissance (als Manuskript gedruckt).

Alexander von Kalecsinszky in Budapest:

Über die Akkumulation der Sonnenwärme in verschiedenen Flüssigkeiten. Leipzig 1904.

S. F. Kandaloros in Athen:

Κοσμογραφικά. 1904.

Ph. C. Karl Kramář in Jičin, Böhmen:

Über die sumerisch-gruzinische Spracheinheit. Prag 1904.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. XIII, 3. 4. Leipzig 1904.

Pierre Lesage in Rennes:

Contribution à l'étude des Mycoses., Paris 1904.

Ugo Levi in Venedig:

I Monumenti del dialetto di Lio Mazor. 1904.

A. Manouvriez in Valenciennes:

De l'anémie ankylostomiasique. Paris 1904.

Dr. Ch. Mehlis in Neustadt a. H.:

Studien zur ältesten Geschichte der Rheinlande. Leipzig 1904.

Lady Meux in London:

The Book of Paradise by Palladius and others. 2 Voll. 1904.

Basile Modestov in Rom:

Introduction à l'histoire Romaine. 2e partie. St. Petersburg. 1904. 4⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. XXIXe année, tom. 86, No. I. II. Sept.-Dec. 1904. Paris.

Luise Neumann in Joachimsthal:

Franz Neumann, Erinnerungsblätter. Tübingen 1904.

H. Rosenbusch in Freiburg i. Br.:

Mikroskopische Physiographie der Mineralien u. Gesteine. Stuttgart 1904.

Adolf Sandberger in München:

Kompositionen mit französ. Text von Orlando di Lasso. Herausgegeben von Ad. Sandberger. Teil I. Leipzig 1904. fol.

Verlag von Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. 1901. No. 14—24. 4⁰.

Hans Spörry in Zürich:

Das Stempelwesen in Japan. 1901. 4⁰.

Joannes N. Svoronos in Athen:

Τὰ νομίσματα τοῦ κράτους τῶν Πτολεμαίων. 1904. 4⁰.

*

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig:

Archiv der Mathematik u. Physik. III. Reihe, Bd. 8, Heft 1—3. 1904.
Encyklopädie der mathemat. Wissenschaften. Bd. I, Heft 8; Bd. II, 1 u. 5; Bd. IV, 1. II, Heft 1. 1904.
Desgl. in französ. Ausgabe. Tom. I, 1, fasc. 1.
Thesaurus linguae latinae. Vol. 1, fasc. 7; Vol. 2, fasc. 7. 1904. 4⁰.

Giuseppe Veronese in Padua:

La Laguna di Venezia. 1904.

Eugen Wolf in München:

Henry Morton Stanley. † 1904.

E. v. Zach in Peking:

Spiegel der Mandschu-Sprache. Verbesserte Ausgabe des Kaisers Kien-lung aus dem Jahre 1771. 8 Bde.

Marian Zukowski:

Die Erde ein Elektromagnet. Dortmund 1904.

